

2014-11-15 13:00–14:00 いわき市生涯学習プラザ

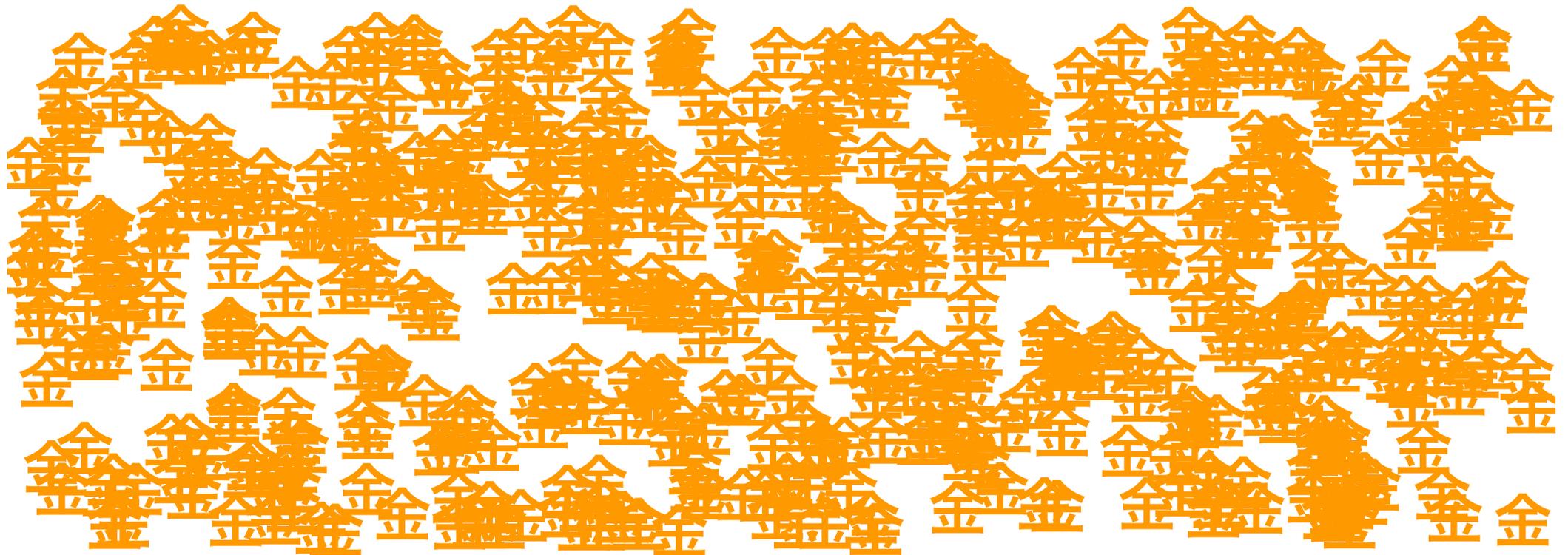
放射線計測のための 統計とデータ処理再入門



h_okumura

奥村晴彦@三重大学

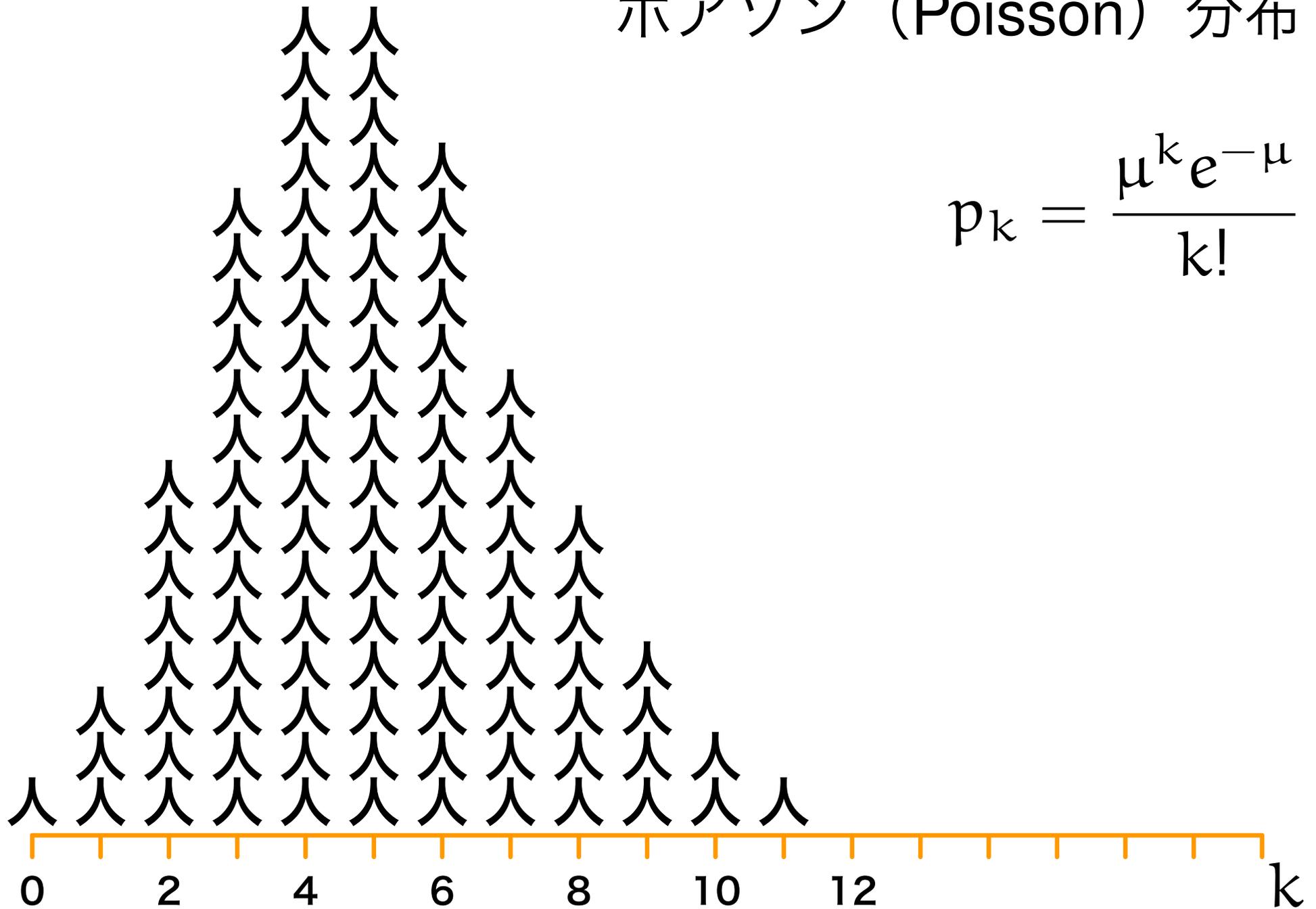
n人に5n枚の金貨をランダムに与えたときの度数分布は？



人
人
人
人
人 人 人 人 人 人 人 人 人 人 人 人 人 人 人 人 人 人 人 人

ポアソン (Poisson) 分布

$$p_k = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$



出会った人がじゃんけんし，勝った人が負けた人から金貨を1枚もらうと，どんな分布になる？

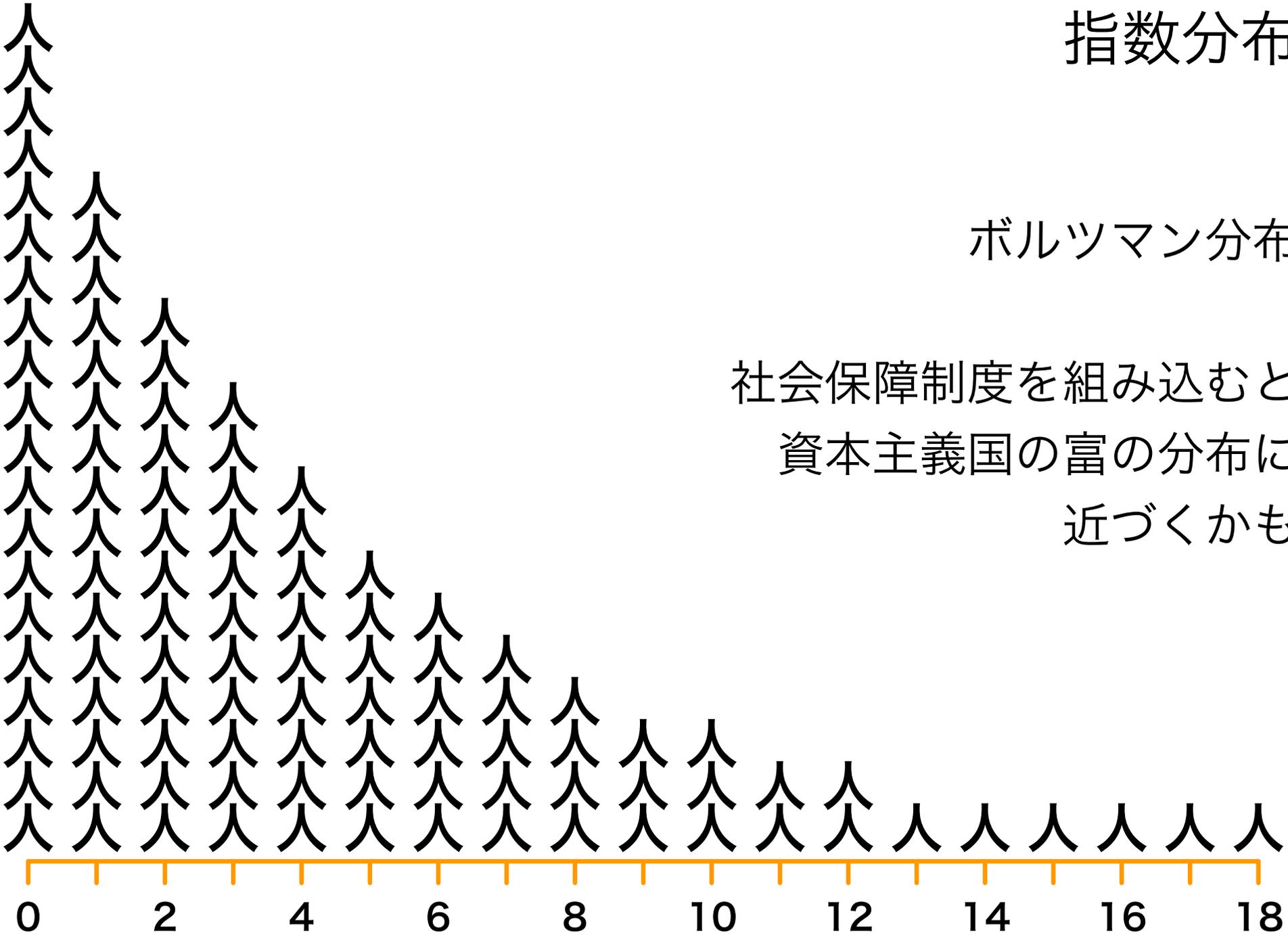
貧富の差は拡大？ 縮小？

※金貨を持たない人は負けても払う必要はありません。

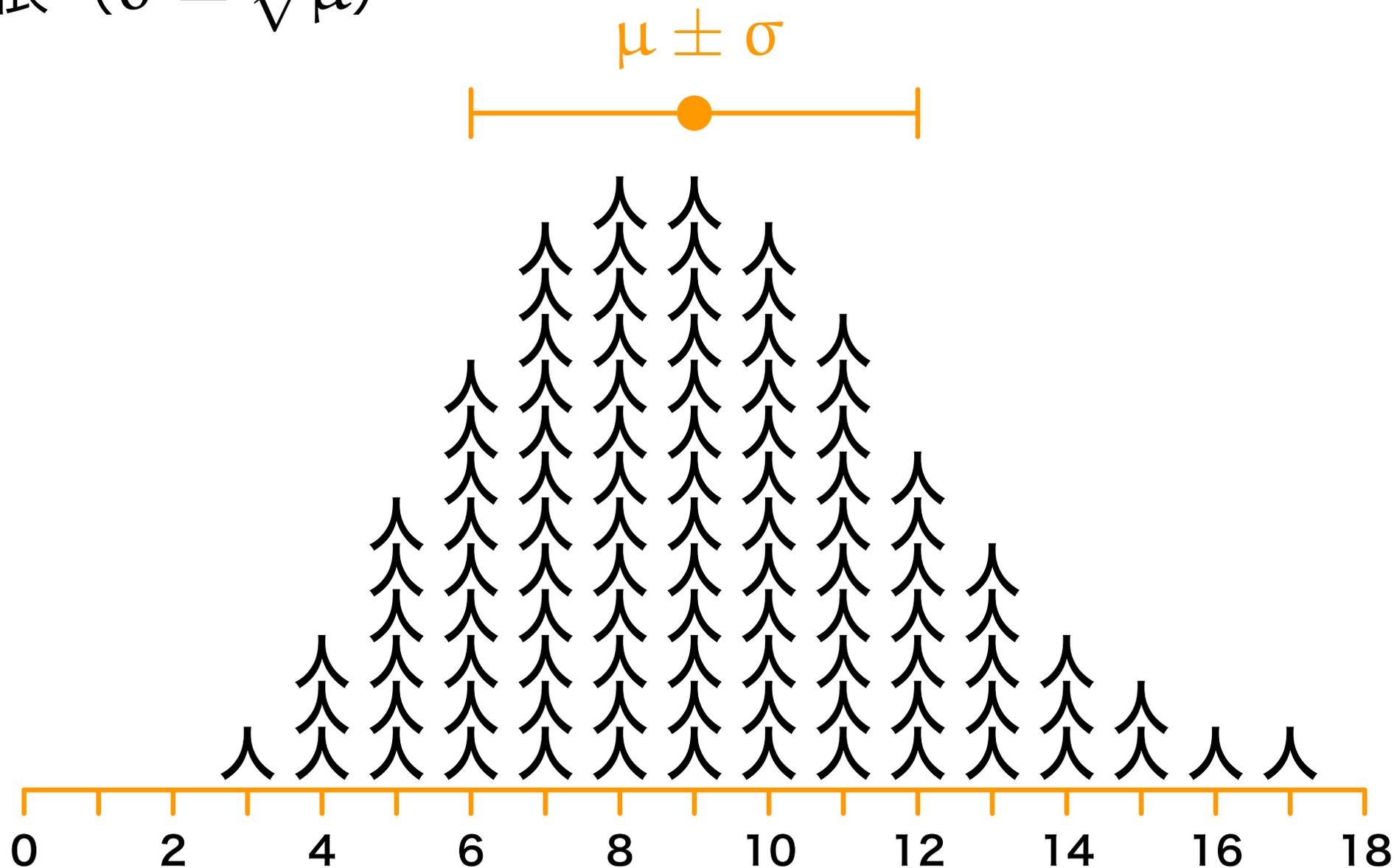
指数分布

ボルツマン分布

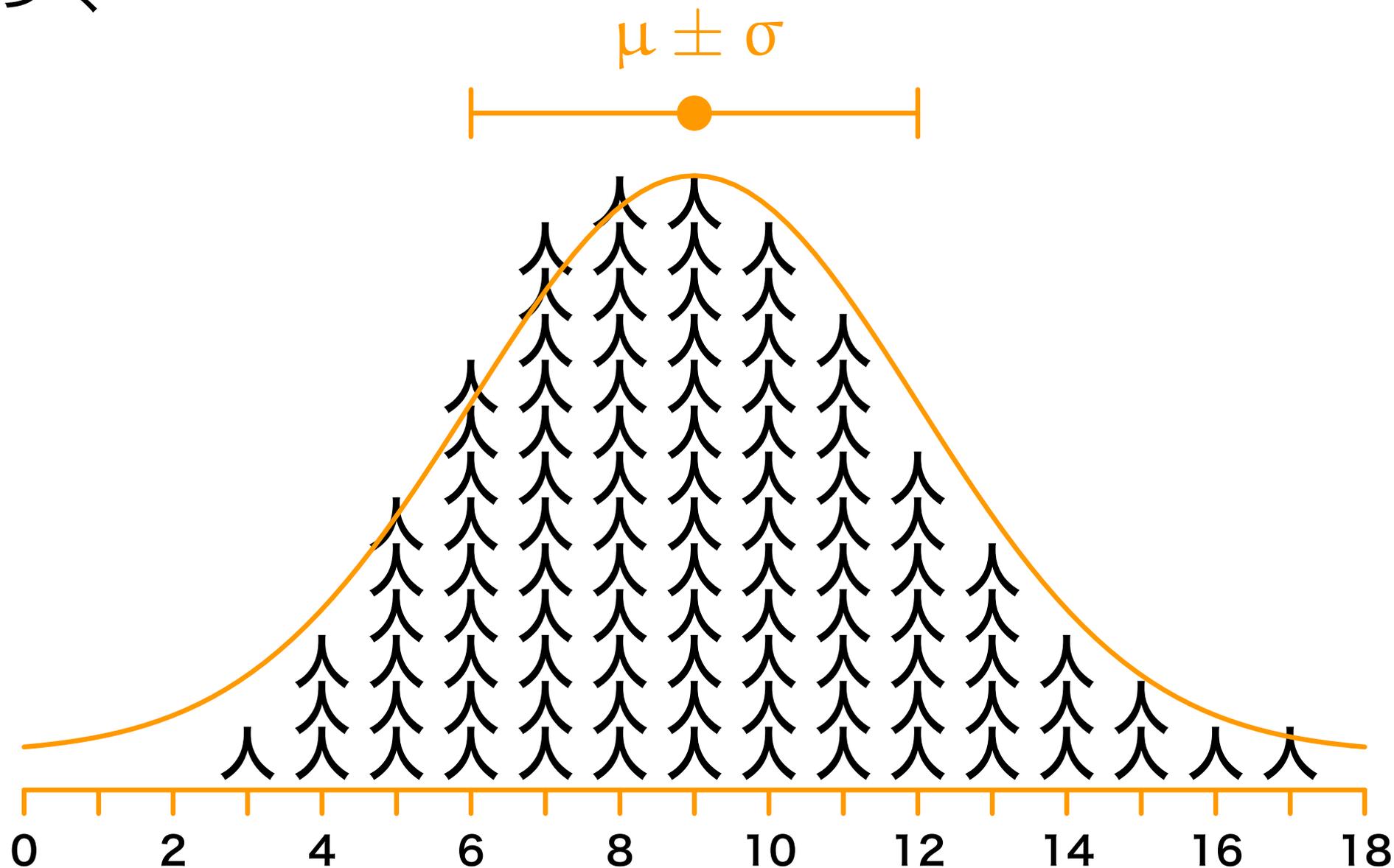
社会保障制度を組み込むと
資本主義国の富の分布に
近づくかも



ポアソン分布の標準偏差 σ は必ず平均 μ の平方根 ($\sigma = \sqrt{\mu}$)



平均 μ が大きいポアソン分布は正規分布に近づく



いよいよ測定の話

sotto voce

Ped. Ped. Ped. Ped.

sempre con Ped.

cresc.

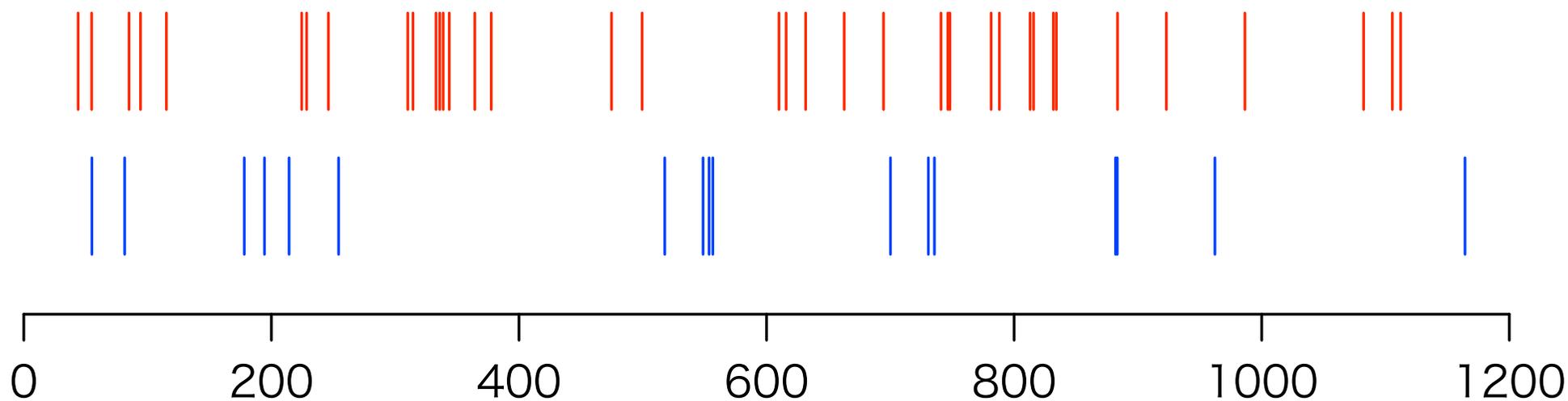
This system of a musical score features two staves. The upper staff is in treble clef with a key signature of three sharps (F#, C#, G#) and contains a series of eighth-note chords. Above the staff, the numbers 4, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3 are written, indicating a fingering pattern. The lower staff is in bass clef with the same key signature and contains eighth-note chords with fingerings 2, 5, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 2, 1, 3. The word *sotto voce* is written between the staves. Below the bass staff, the word *Ped.* is repeated four times, followed by *sempre con Ped.* and *cresc.* at the end of the system.

p cresc. - - -

This system continues the musical score with two staves. The upper staff is in treble clef with a key signature of three sharps and contains eighth-note chords. The lower staff is in bass clef with the same key signature and contains eighth-note chords with fingerings 1, 2, 3, 5, 4, 1, 5, 4, 1, 3, 4, 1, 2. The word *p* is written below the bass staff, followed by *cresc. - - -* indicating a crescendo.

雨だれも災害も放射線も
ショパンのように等間隔で来ない
ポアソン過程

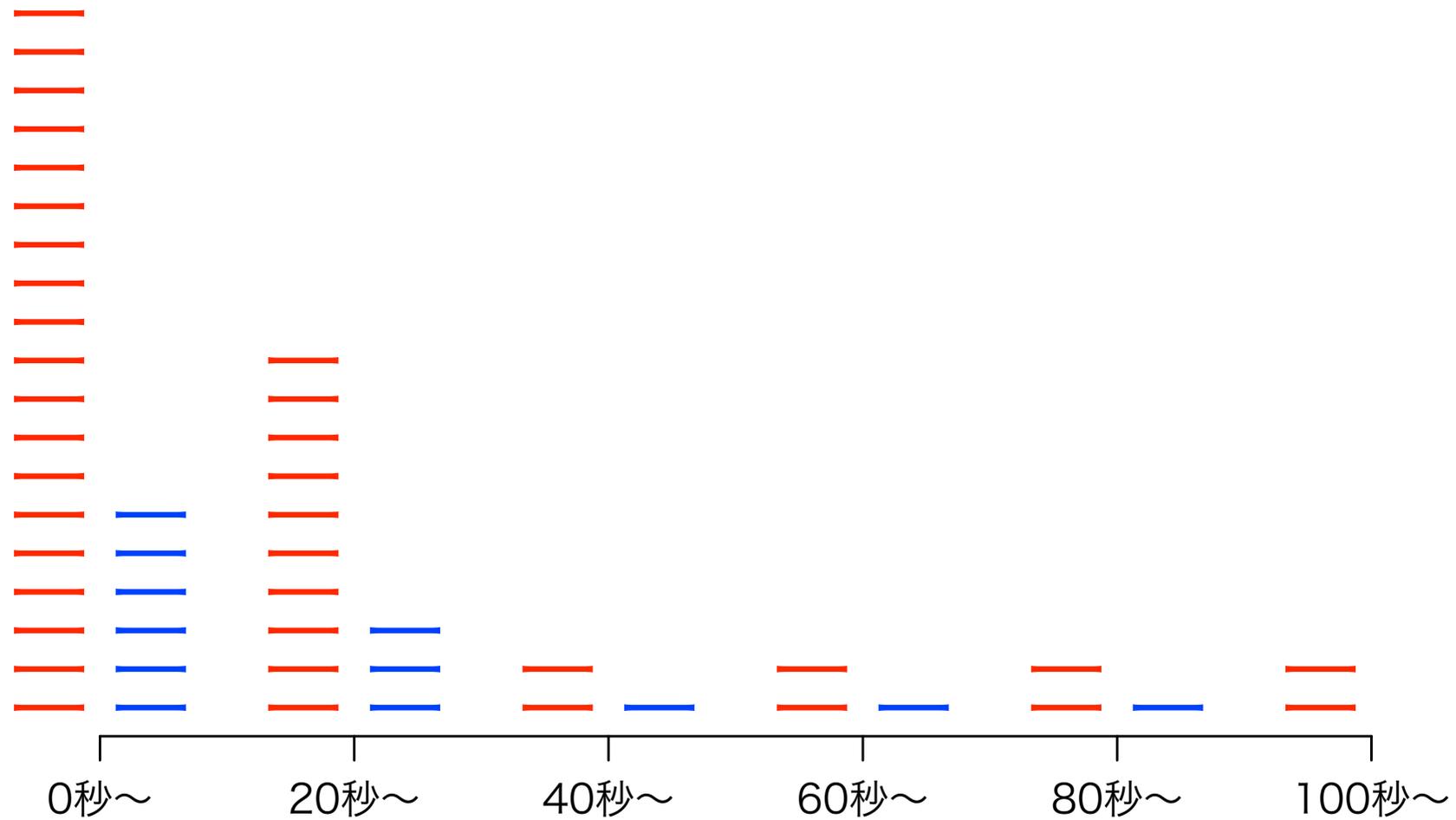
ポケットガイガー（初代）で「やさしお」計測



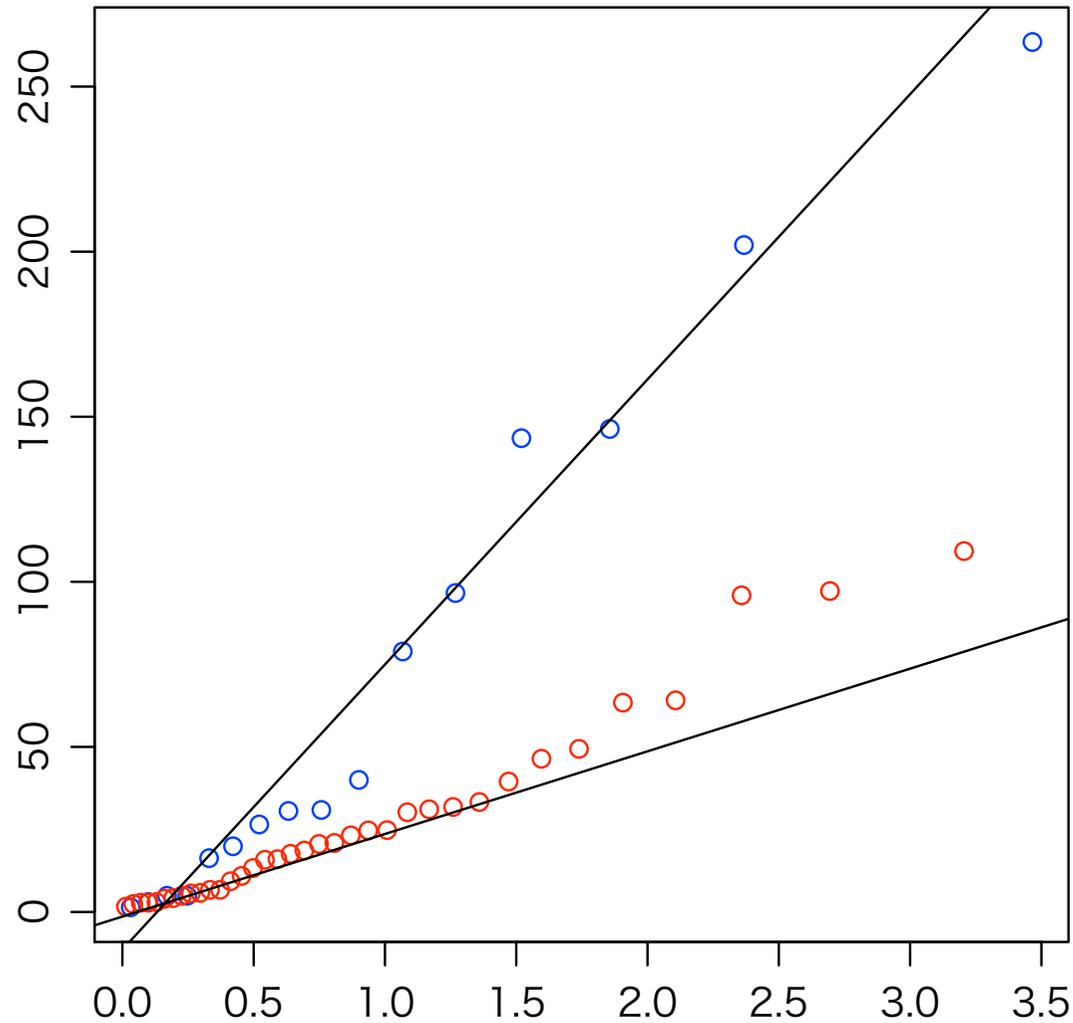
赤：やさしお有（38カウント/1200秒）

青：やさしお無（17カウント/1200秒）

カウント間の時間間隔 (指数分布)



Q-Q (Quantile-Quantile) Plot



縦軸：隣同士の時間間隔を小さい順に

横軸：指数分布 e^{-x} の度数分布全体を $n-1$ 等分した各重心の x 座標

デッドタイムがあると $(0, 0)$ を通らない

平均

$$\mu \approx \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

標準偏差 (真の平均 μ がわかっているとき)

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{(X_1 - \mu)^2 + \cdots + (X_n - \mu)^2}{n}}$$

標準偏差 (データの平均 \bar{X} を使うとき)

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

問 1分ごとの測定値が平均 $1.0 \mu\text{Sv/h}$, 標準偏差 $0.2 \mu\text{Sv/h}$ のとき, センサ感度を求めよ。

答

$$\frac{\text{標準偏差}}{\text{平均}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{0.2}{1.0}$$

よって $n = 25$ が $1.0 \mu\text{Sv/h}$ に当たる。つまり感度は $25 \text{ cpm}/(\mu\text{Sv/h})$

Horiba PA-1000 Radi: 1000 cpm/(μ Sv/h) 以上

環境放射線モニタ PA-1000 Radi (ラディ)



概要

仕様

ご使用にあたり

仕様

検出方式 シンチレーション式

測定線種 γ 線

感度 1μ Sv/hに対して毎分1000カウント(1000cpm)以上

ポケットガイガー

Type 1	11.2918 cpm/(μ Sv/h)
2	16.9939
3	17.8080
4	53.0320

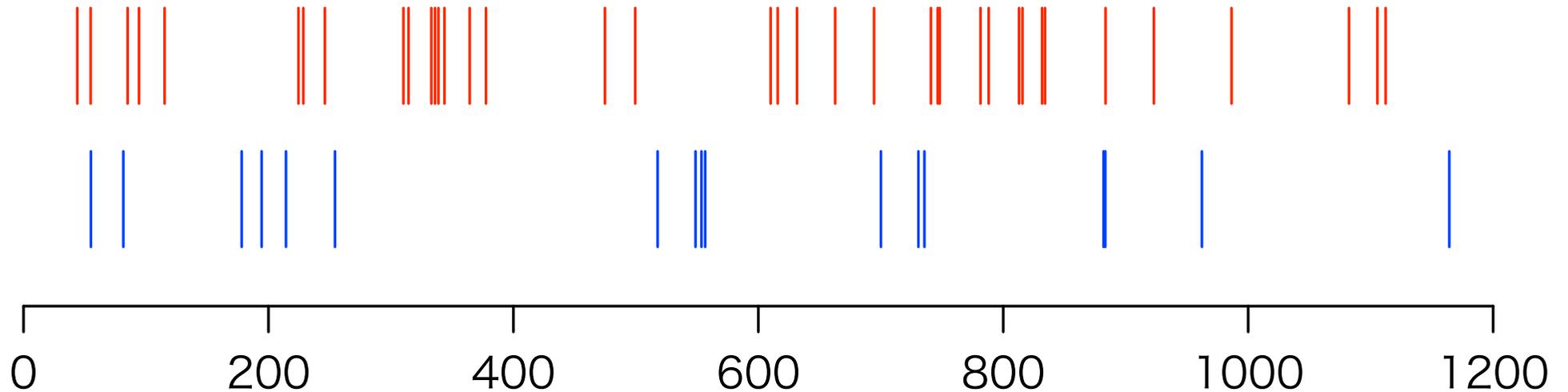
エアカウンターS

38 cpm/(μ Sv/h) 程度

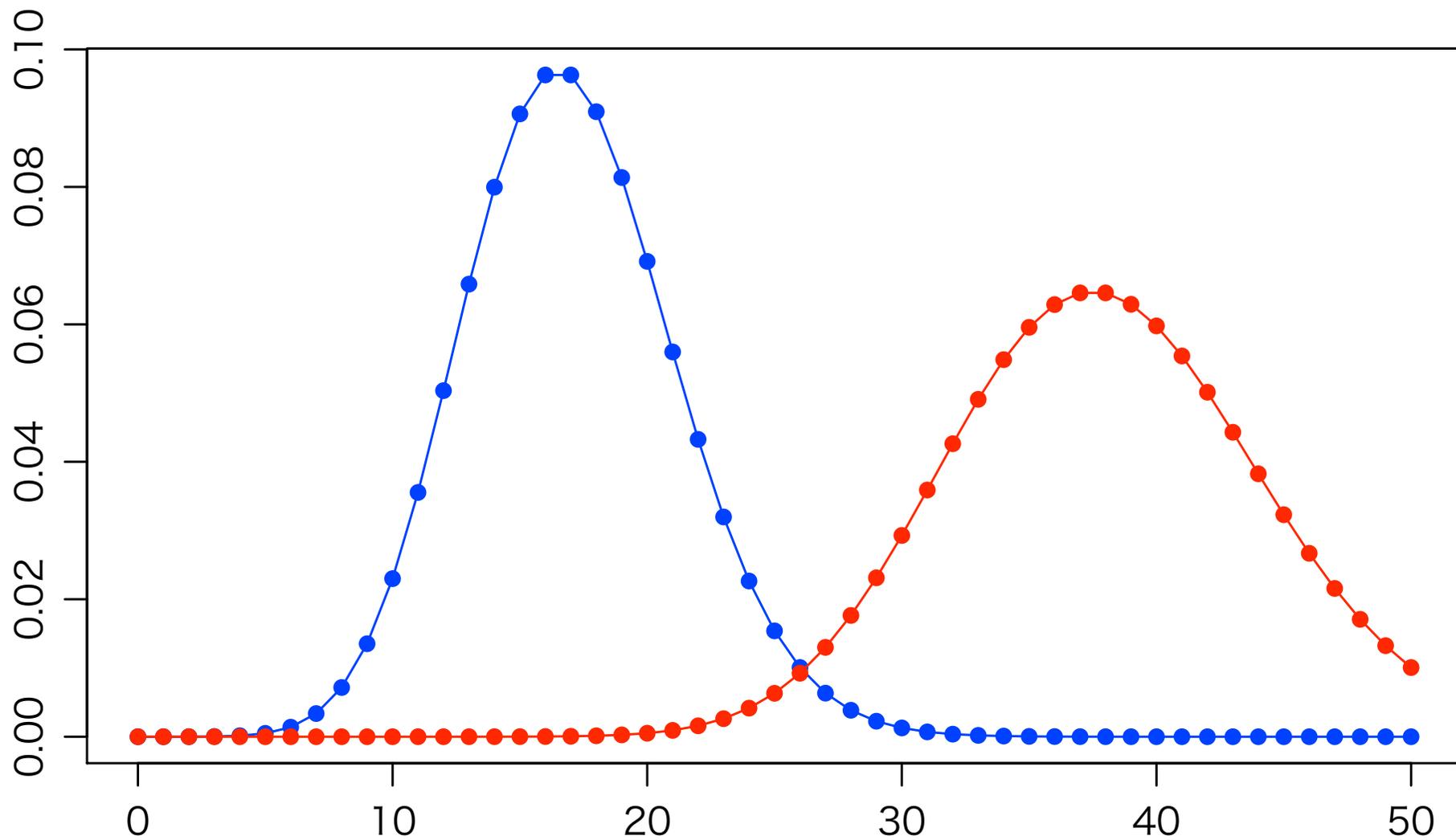
11.3 cpm/(μ Sv/h) とすると

38 カウント/20分 = 1.9 cpm = 0.168 μ Sv/h

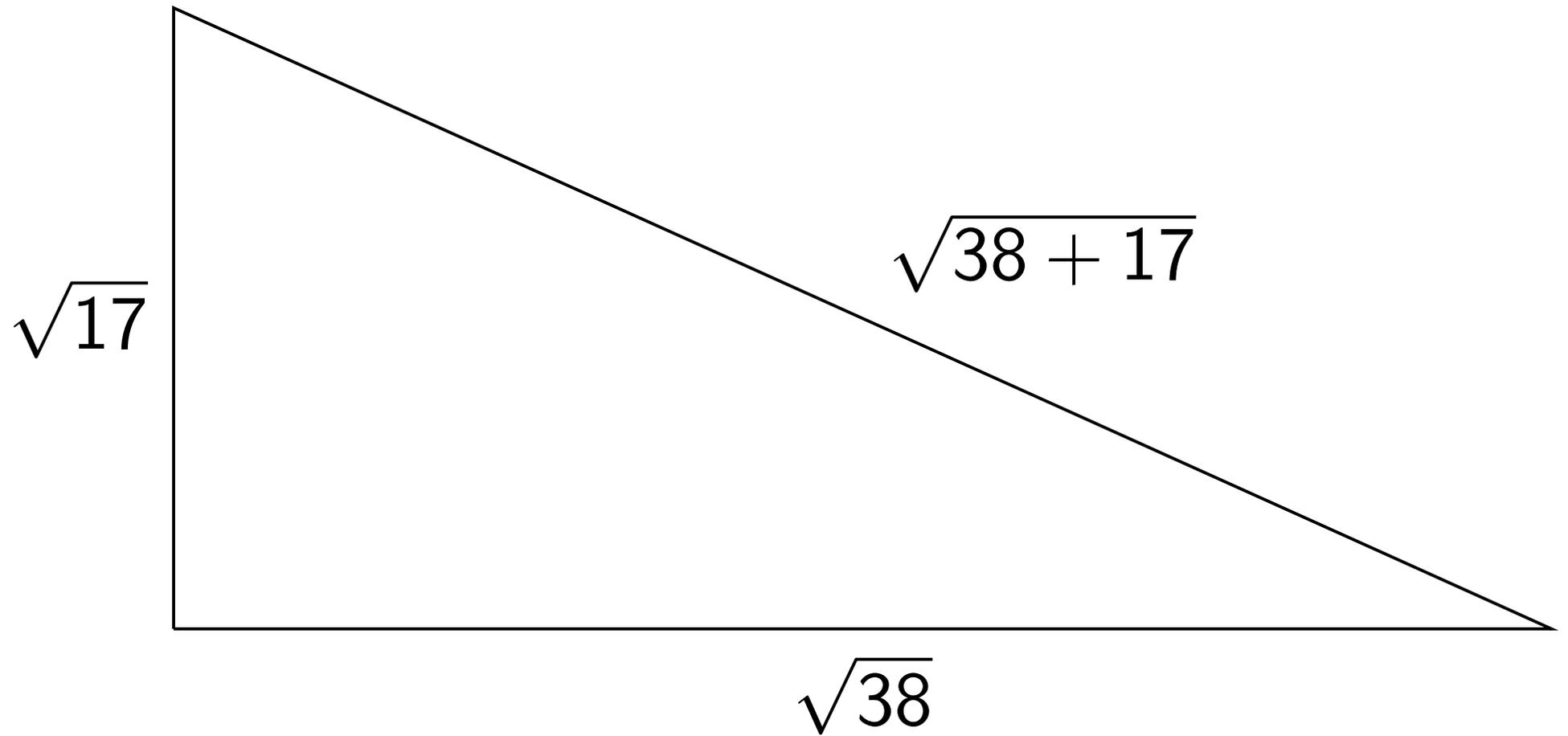
17 カウント/20分 = 0.85 cpm = 0.075 μ Sv/h



38 と 17 の違い：ポアソン分布で考える



誤差の合成は三平方の定理



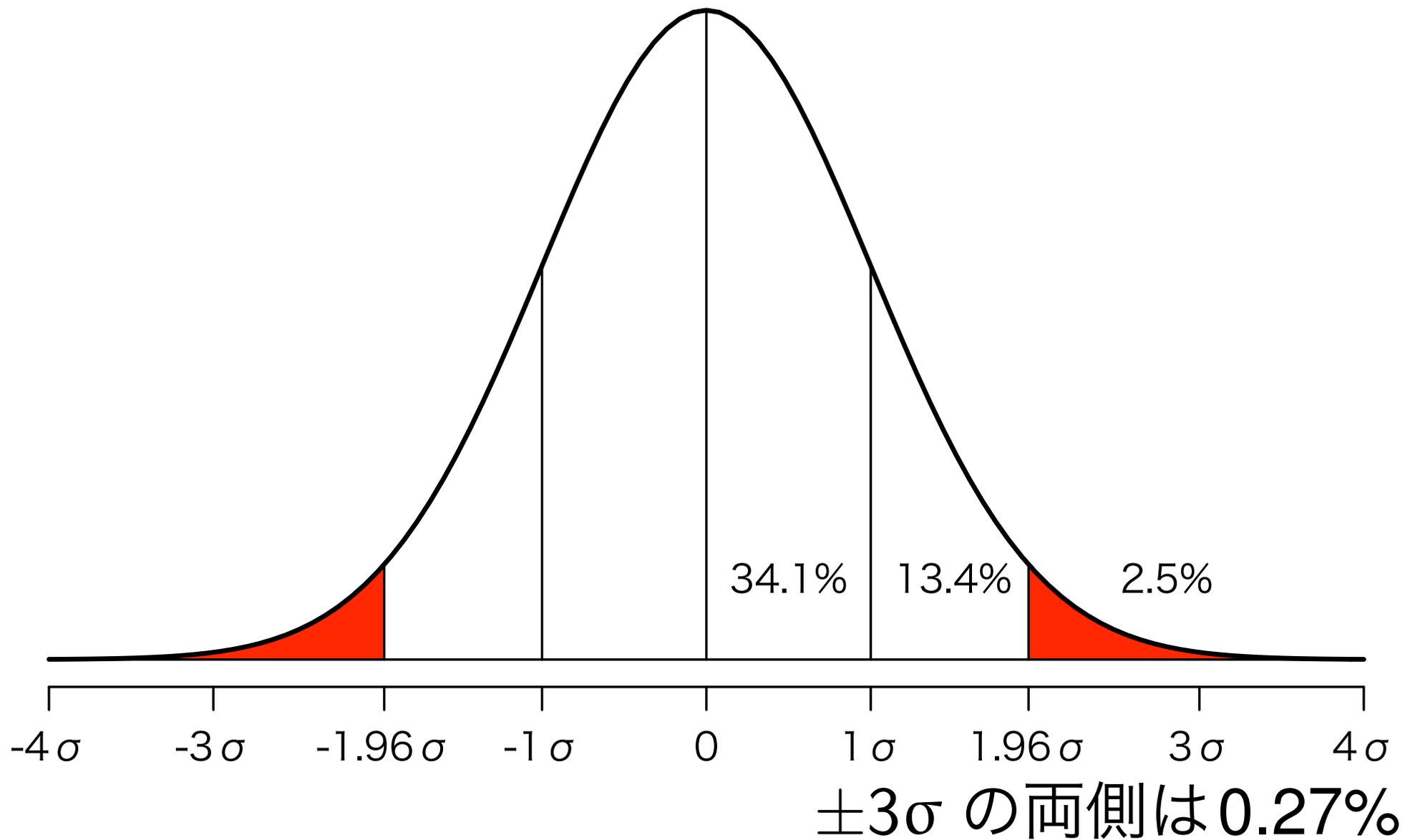
38 と 17 の差は 2.83σ

$$\frac{38 - 17}{\sqrt{38 + 17}} = 2.83$$

2σ より大きいので統計的に有意 (5%水準)

3σ より小さいのでND (Not Detected)

正規分布



正規分布を仮定しない厳密な話

38と17の違いは統計的に「有意」か？

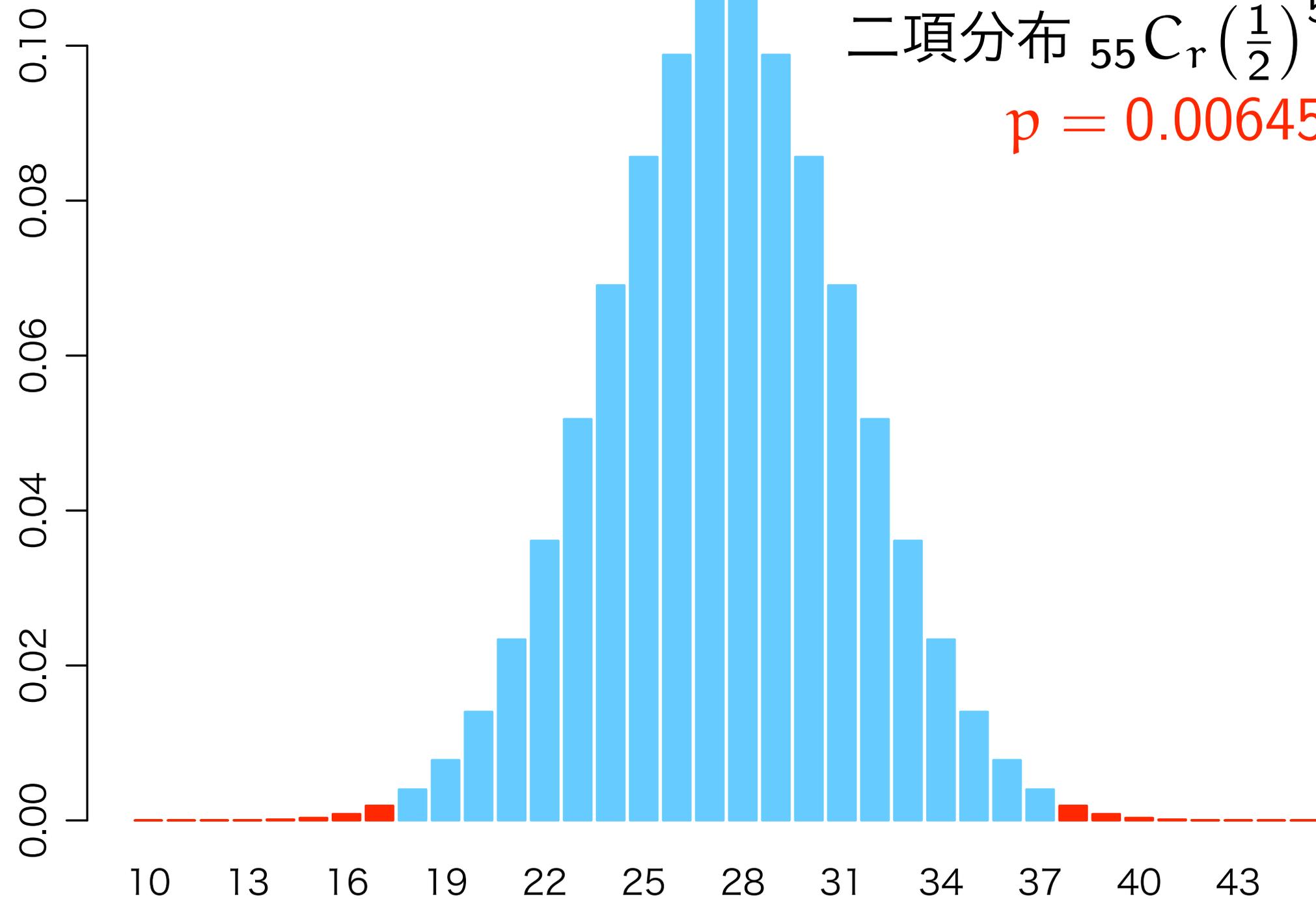
55枚の硬貨を投げて表38, 裏17は怪しいか？

偏りのない硬貨を55枚投げて表が17枚以下または38枚以上出る確率（二項分布）：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{55} \left({}_{55}C_0 + {}_{55}C_1 + \cdots + {}_{55}C_{17} \right. \\ \left. + {}_{55}C_{38} + {}_{55}C_{39} + \cdots + {}_{55}C_{55} \right) = 0.006456$$

二項分布 ${}_{55}C_r \left(\frac{1}{2}\right)^{55}$

$p = 0.006456$



p 値（ピーチ）とは

違いがないと仮定する（帰無仮説）

このとき、この結果が起こる確率 + それ以下の確率の合計を p 値という。

Rでp値を計算

```
> binom.test(38, 55)
```

```
Exact binomial test
```

```
data: 38 and 55
```

```
number of successes = 38, number of trials = 55, p-value = 0.006456
```

```
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
0.5518703 0.8085536
```

```
sample estimates:
```

```
probability of success
```

```
0.6909091
```

$p = 0.006456 < 0.05$ で「有意」 ($\pm 1.96\sigma$)

$p = 0.006456 > 0.0027$ で「ND」 ($\pm 3\sigma$)

$p < 0.05$ ($\pm 1.96\sigma$) : 治験, 心理学, ……

$p < 0.0027$ ($\pm 3\sigma$) : 「 3σ 」 「千三つ」

$p < 0.001$ ($\pm 3.29\sigma$) : Currie の MDA/MDC

$p < 5.7 \times 10^{-7}$ ($\pm 5\sigma$) : 素粒子の「発見」

$$\begin{aligned} \text{測定値} - \text{真の値} &= \text{誤差} \\ &= \text{系統誤差} + \text{統計誤差} \end{aligned}$$

誤差の程度（たとえば標準偏差）を
不確かさ（uncertainty）という。

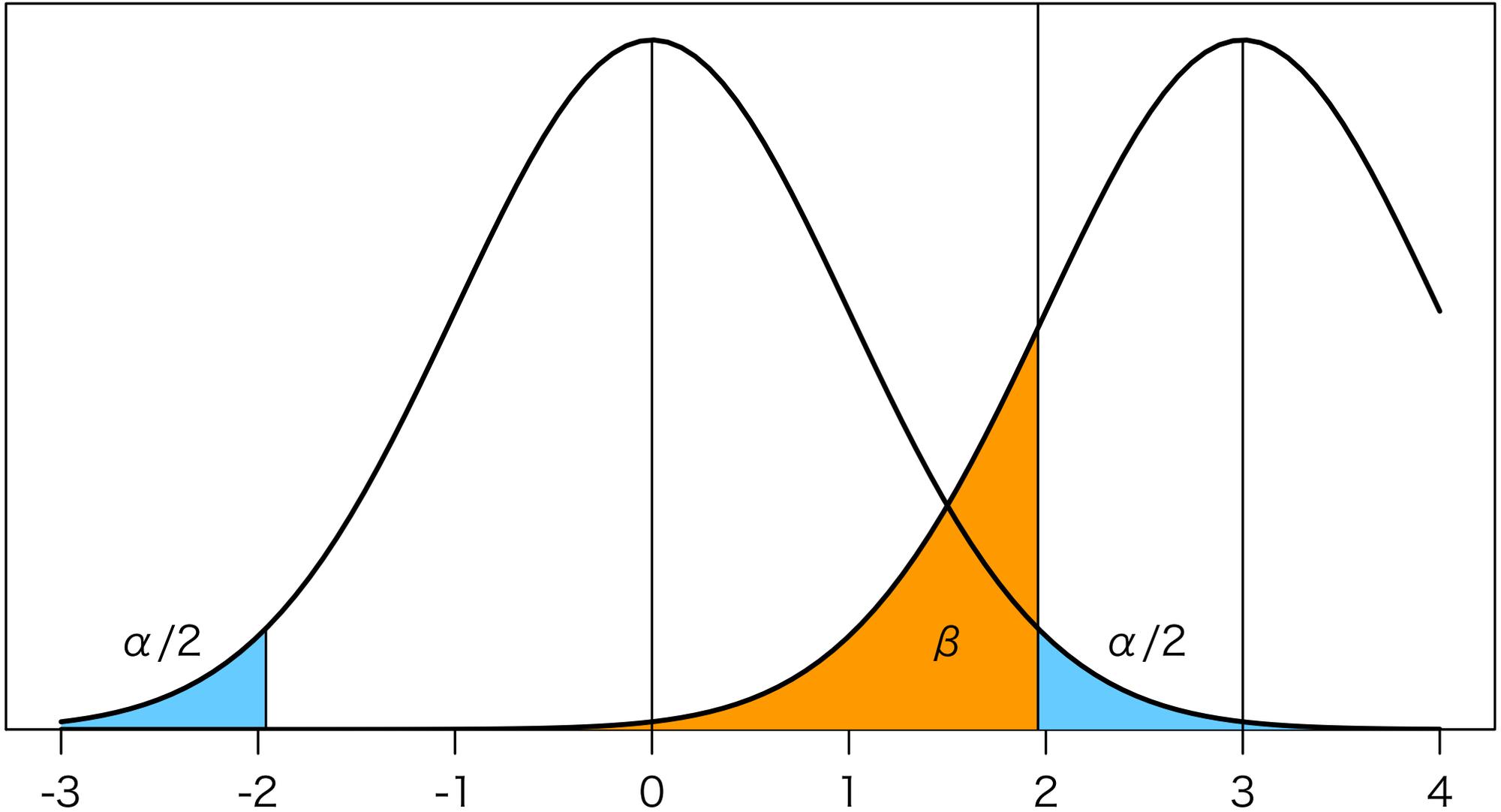
GUM: Guide to the expression of uncertainty in
measurement (ISO)

よくわからない用語の氾濫

- 検出限界 (3σ ?)
- 定量下限 (10σ ?)
- 次のものは 3.29σ ?
 - MDA (Minimum Detectable Activity/Amount)
 - MDC (Minimum Detectable Concentration)

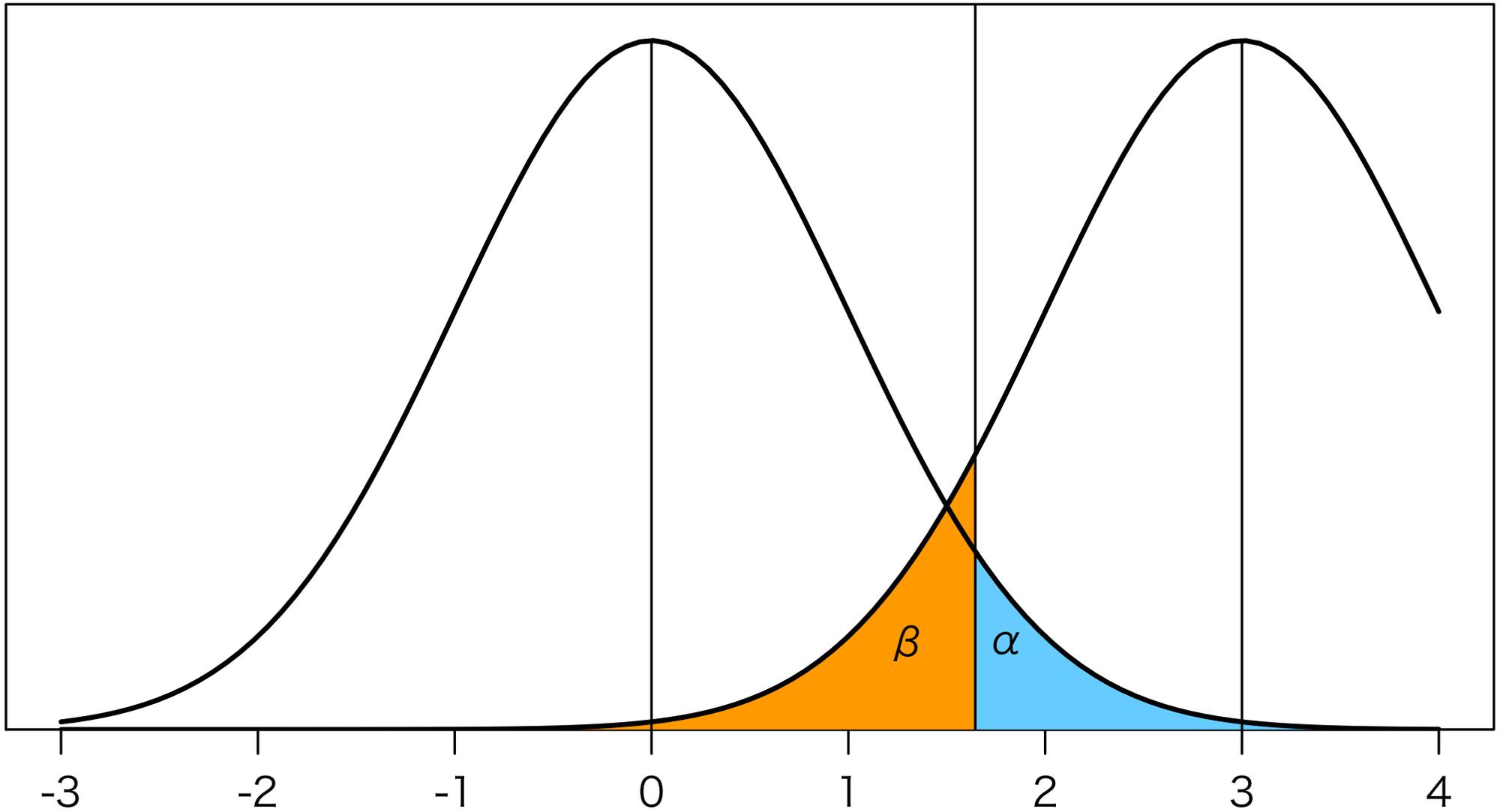
$\alpha = 0.05$

1.96



$\alpha = 0.05$

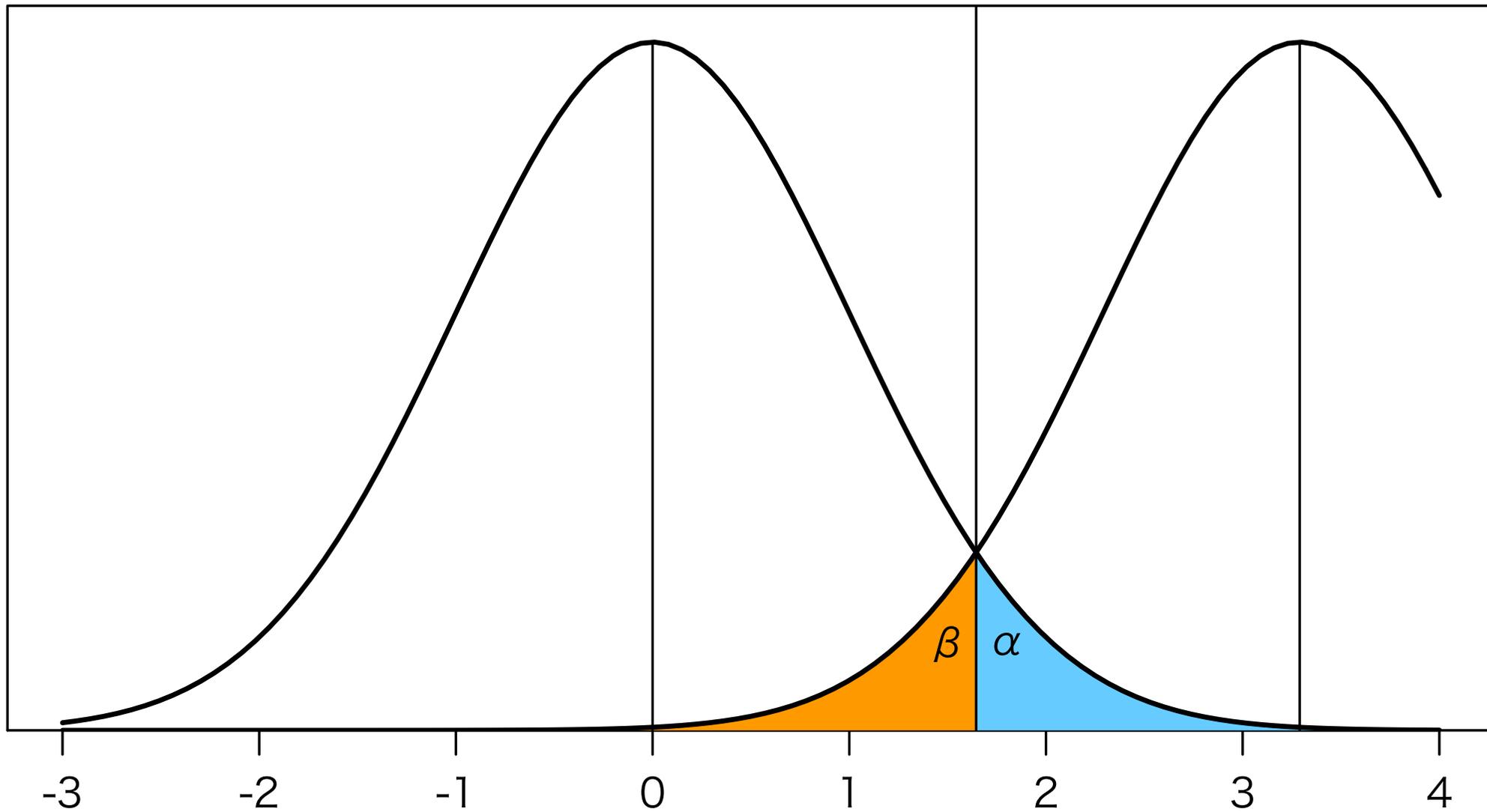
1.645



$\alpha = 0.05, \beta = 0.05$

1.645

3.29 (MDA)

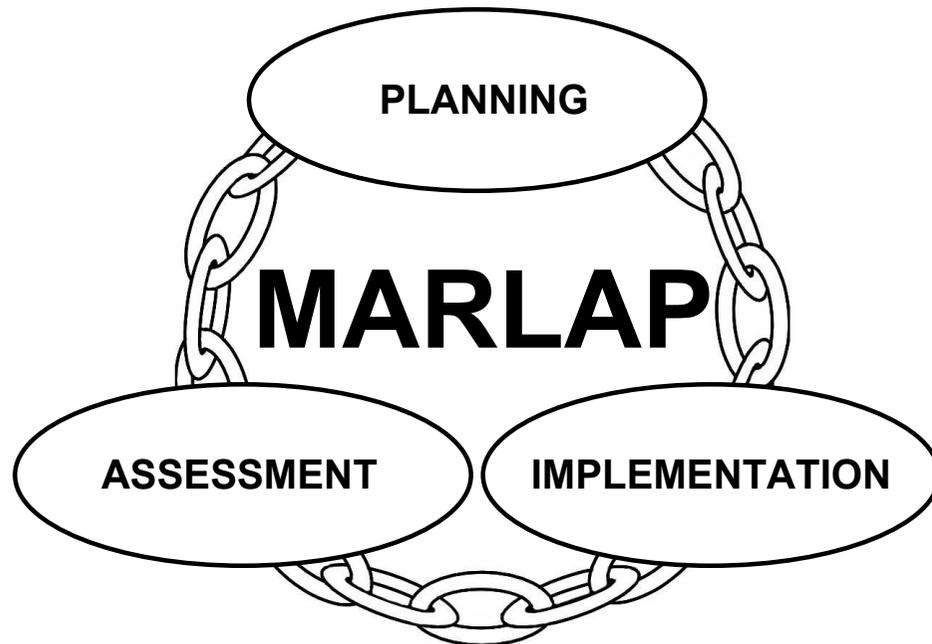


NUREG-1576
EPA 402-B-04-001A
NTIS PB2004-105421



Multi-Agency Radiological Laboratory Analytical Protocols Manual

Volume I: Chapters 1 – 9 and Appendices A – E



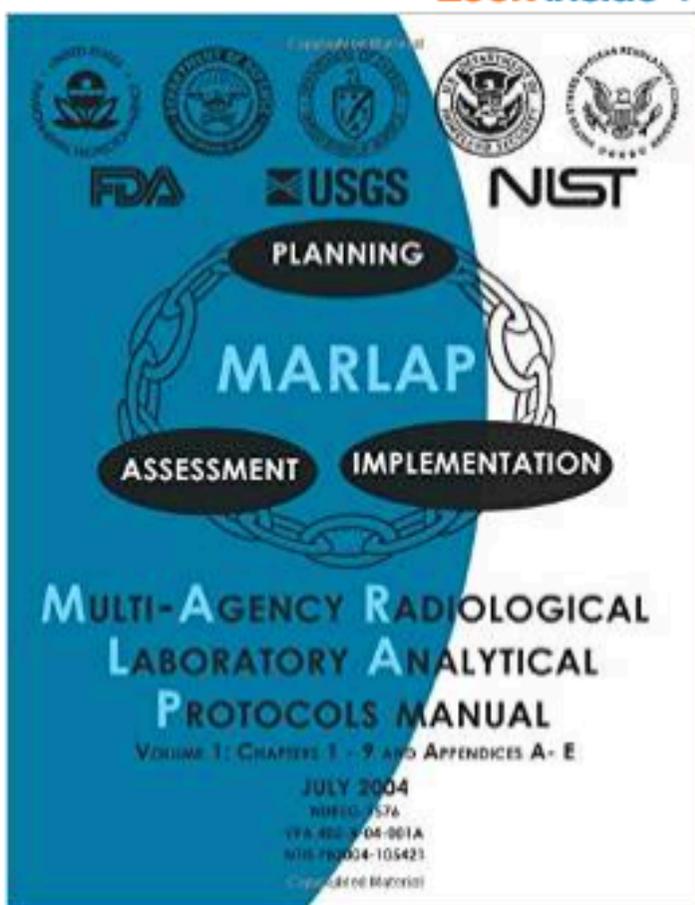
July 2004

MARLAP

[http://www.epa.gov/
radiation/marlap/](http://www.epa.gov/radiation/marlap/)

- EPA (環境保護庁)
- DOE (エネルギー省)
- DOD (国防総省)
- NRC (原子力規制委員会)
-

Look inside ↓



Multi-Agency Radiological Laboratory Analytical Protocols Manual: Volume 1

Paperback – June 6, 2014

by U.S. Environmental Protection Agency (Author)

Be the first to review this item

▶ See all formats and editions

Paperback

\$20.06

3 Used from \$22.46

8 New from \$20.06

Each year, hundreds of millions of dollars are spend on project and programs that rely, to varying degrees, on radio analytical data decision making. These decisions have had a significant impact on the environment.

↺ Flip to back



See all 2 images



Radiation Protection

Contact Us Search: All EPA This Area

You are here: [EPA Home](#) » [Radiation Protection](#) » [Programs](#) » [EPA Cleanup and Multi-Agency Programs](#) » [About MARLAP](#)

[Students/Teachers](#) [Librarians](#) [Reporters](#) [General Public](#) [Technical Users](#)

[PROGRAMS](#) [TOPICS](#) [REFERENCES](#)

EPA and MultiAgency Cleanup Tools: [MARSSIM](#) [MARLAP](#) [Cleanup Technology & Tools](#)

About MARLAP

On this page:

- [Why is MARLAP necessary?](#)
- [What does it do?](#)
- [What is the history behind MARLAP?](#)
- [Current MARLAP participants](#)
- [Other multi-agency initiatives](#)

MARLAP

- [Main Page](#)
- [Public Meetings](#)
- [Training](#)
- [SAB Presentations](#)
- [About MARLAP](#)
- [Frequent Questions](#)
- [Manual & Related Links](#)

Why is MARLAP necessary?

The Multi-Agency Radiological Laboratory Analytical Protocols Manual addresses the need for a nationally consistent approach to producing radioanalytical laboratory data that meet a project's or program's data requirements.

MARLAP was developed by a workgroup that included representatives from the federal government, and the states:

- U.S. Environmental Protection Agency
- Department of Energy
- Department of Defense
- Nuclear Regulatory Commission
- National Institute of Standards and Technology
- U.S. Geological Survey
- U.S. Food and Drug Administration

State representatives were from the Commonwealth of Kentucky and the State of California. Contractors to EPA, DOE, and NRC, and members of the public, have been present during the open meetings of the MARLAP workgroup.

[↑Top of page](#)

What does it do?

MARLAP provides guidance for the planning, implementation, and assessment phases of those projects that require the laboratory analysis of radionuclides. The guidance provided by MARLAP is both scientifically rigorous and flexible enough to be applied to a diversity of projects and programs. This guidance is intended for project planners, managers, and laboratory personnel.

[↑Top of page](#)

[Radiation Home](#)

[Basic Information](#)

[Radiation Topics](#)

[Radiation Programs](#)

[Waste Management](#)

[Emergency Response](#)

[Air & Water](#)

[Source Reduction & Management](#)

[Naturally-Occurring Radiation](#)

[Cleanup & Multi-Agency](#)

[Risk Assessment & Federal Guidance](#)

[Environmental Monitoring & Data](#)

[References](#)

[Frequent Questions](#)

[Site Map](#)

[A-Z Subject Index](#)

MARLAP <http://www.epa.gov/radiation/marlap/manual.html>

The MDC is by definition an estimate of the *true* concentration of analyte required to give a specified high probability that the *measured* response will be greater than the critical value. Thus, the common practice of comparing a measured concentration to the MDC to make a detection decision is incorrect. (pp. 20-6–7)

MDCは $\beta = 0.05$ を与える真値。
測定値と比較すべきは $\alpha = 0.05$ の値。
MDCと測定値を比較するのは間違い。

MARLAP <http://www.epa.gov/radiation/marlap/manual.html>

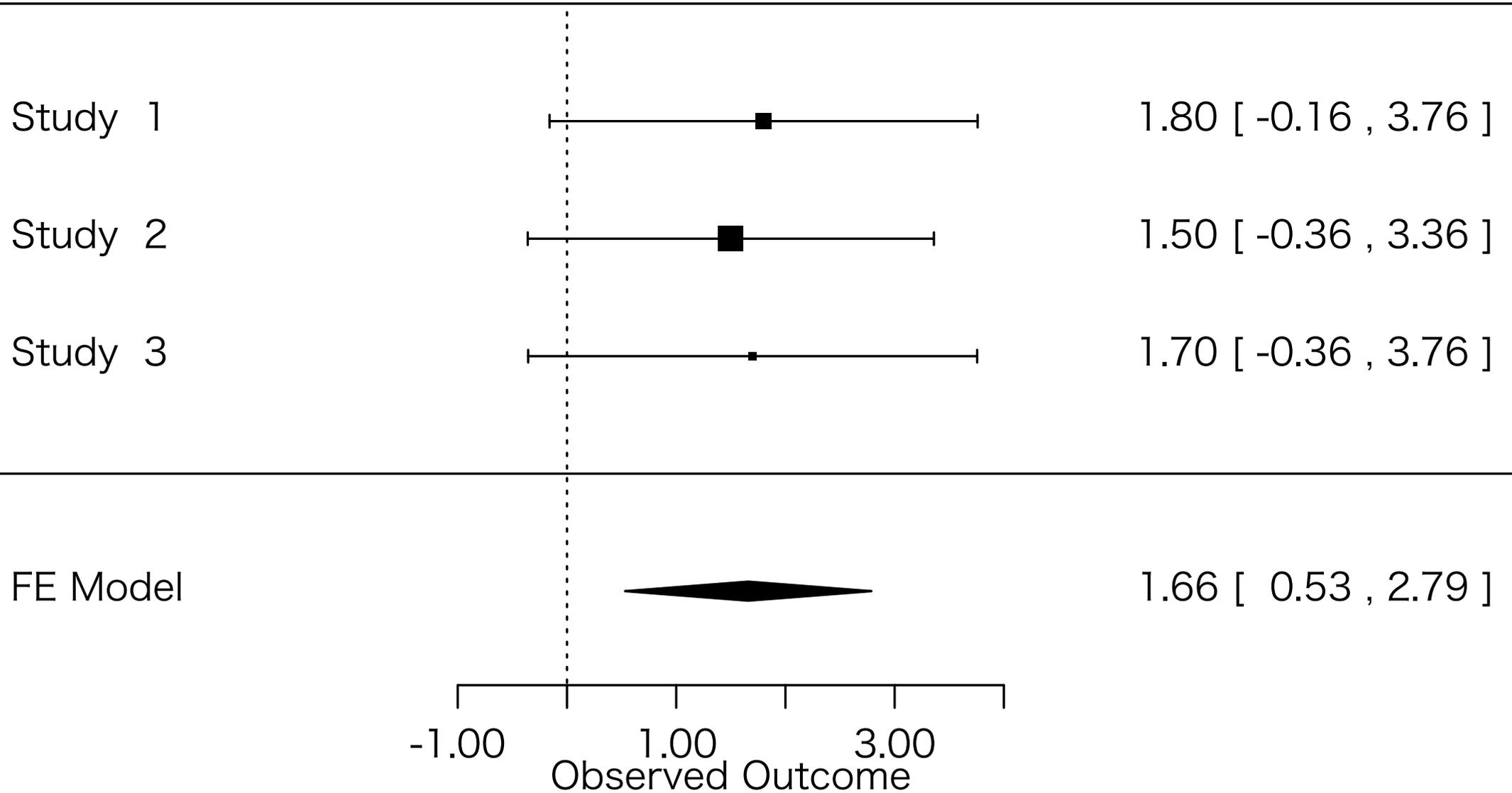
Recommendations

- The laboratory should report each measurement result and its uncertainty as obtained . . . even if the result is less than zero. The laboratory should never report a result as “less than MDC.” (p. 20-12)

(たとえ負の値になっても)
測定値とその不確かさを公開すべし。
「ND」 (< 何々) はダメ。

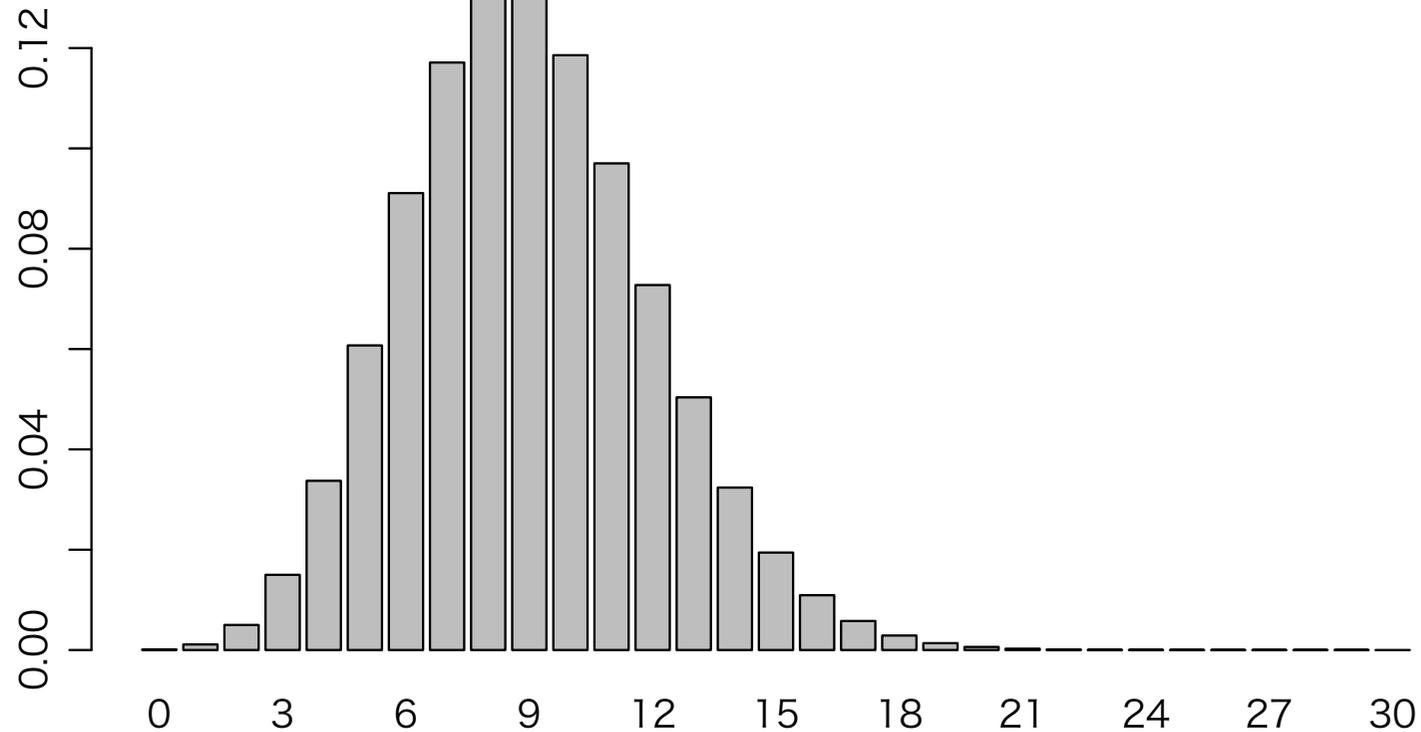
統計的に有意でないものも集まれば有意になる。

Forest plot



信頼区間の意味

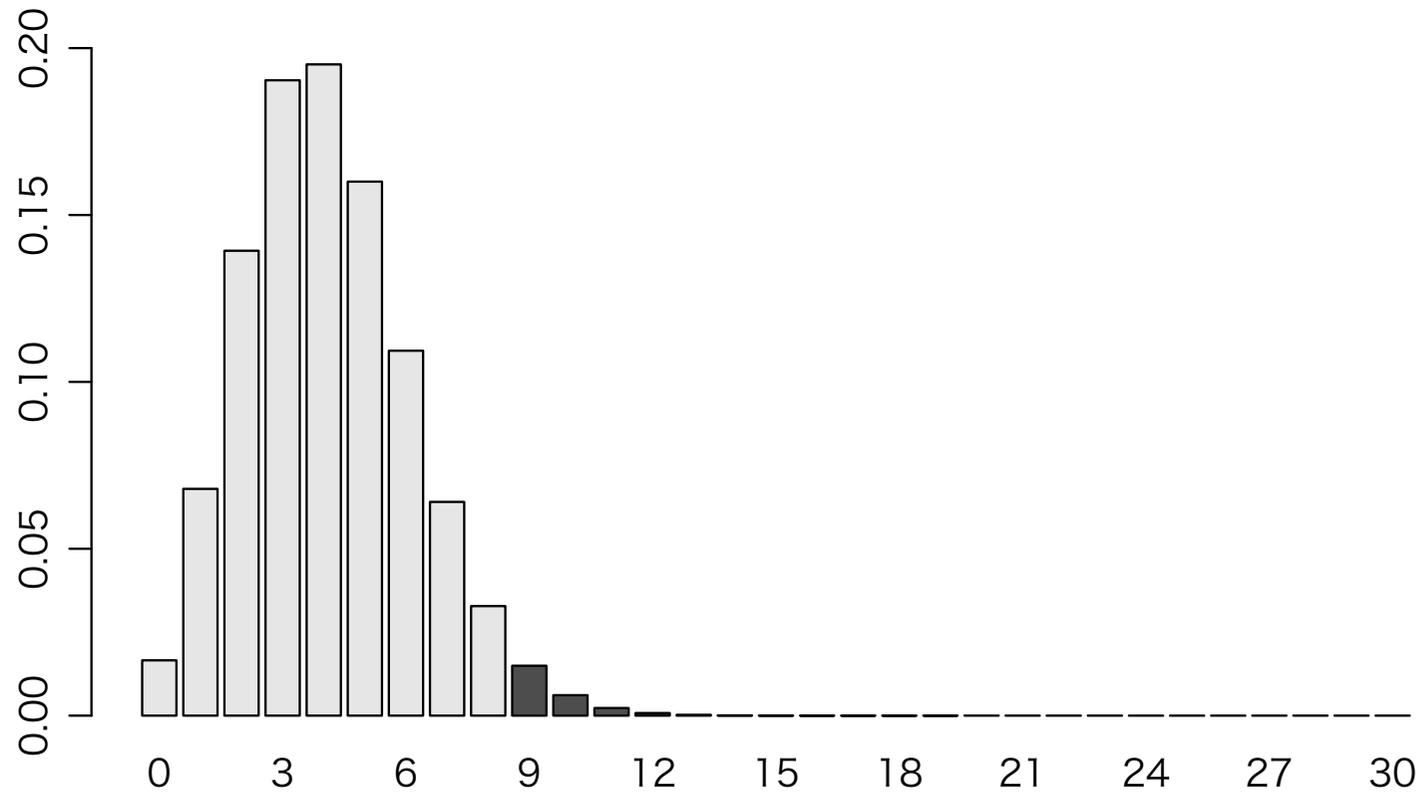
平均 $\mu = 9$ のポアソン分布



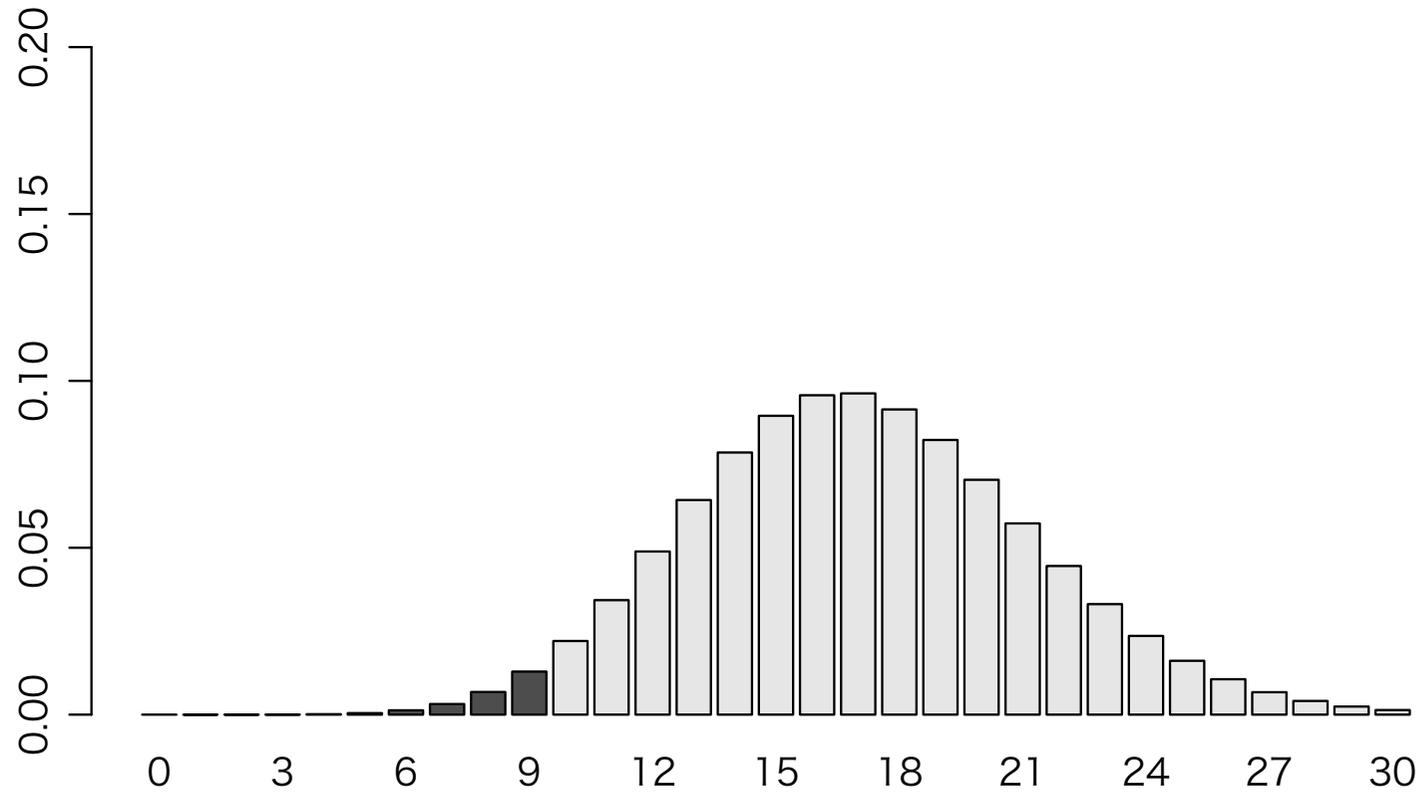
個数9を測定したときの「真の値の分布」ではない。
「真の値の標準偏差は $\sigma = \sqrt{9} = 3$ 」ではない。

(もしそうなら個数0は誤差0)

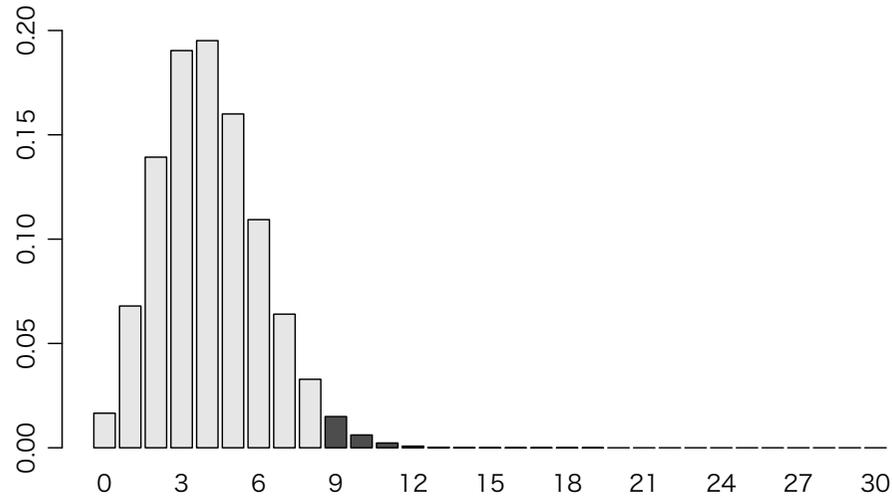
$\mu = 4.1$ のポアソン分布：9以上の確率 2.5%



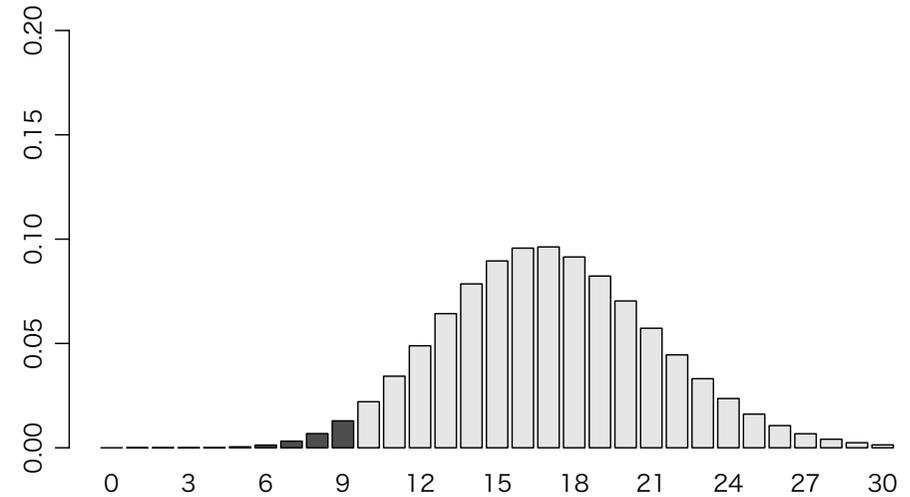
$\mu = 17.1$ のポアソン分布：9以下の確率 2.5%



$\mu = 4.1$



$\mu = 17.1$

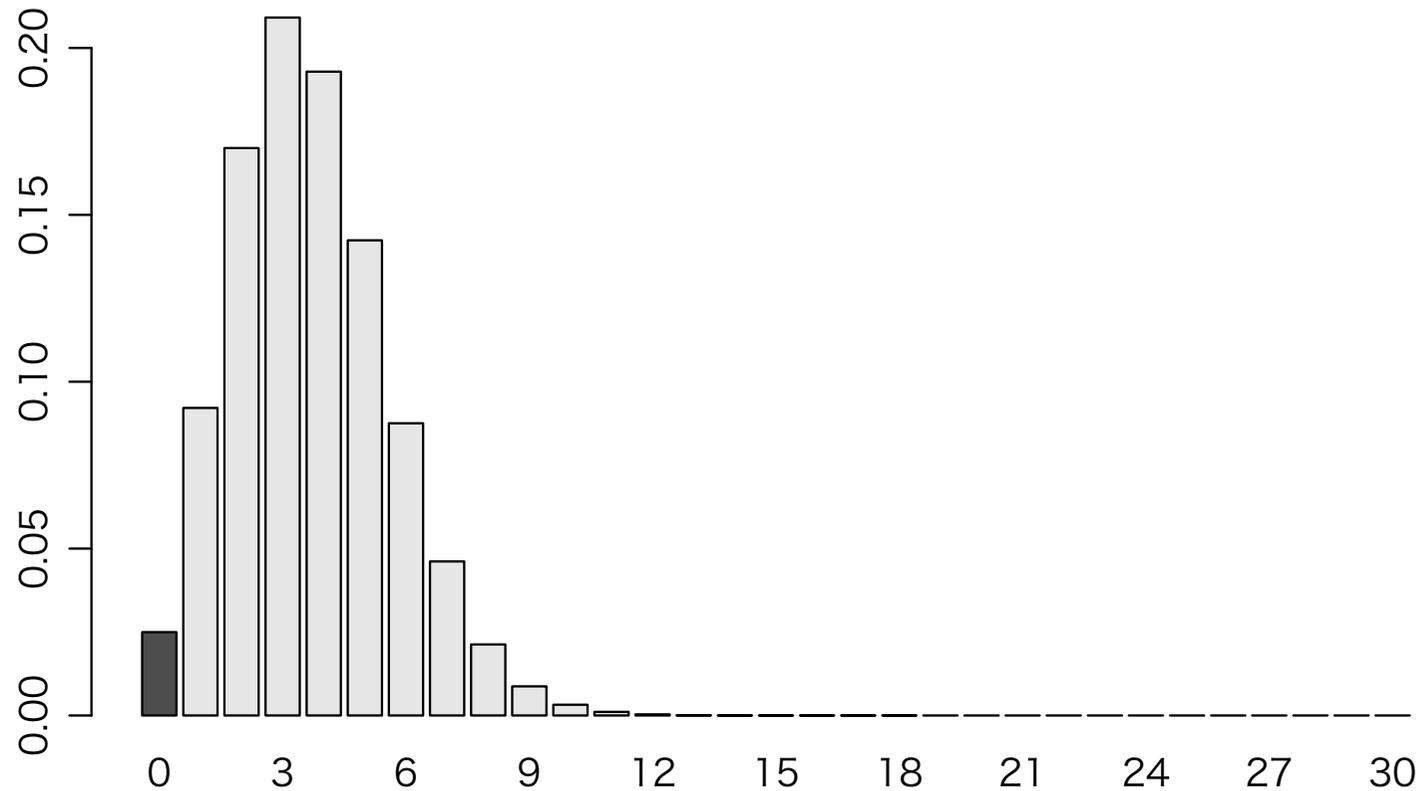


個数9を観測したら,

真の平均の 95% 信頼区間 $4.1 \leq \mu \leq 17.1$

(9, with 95% CI [4.1, 17.1])

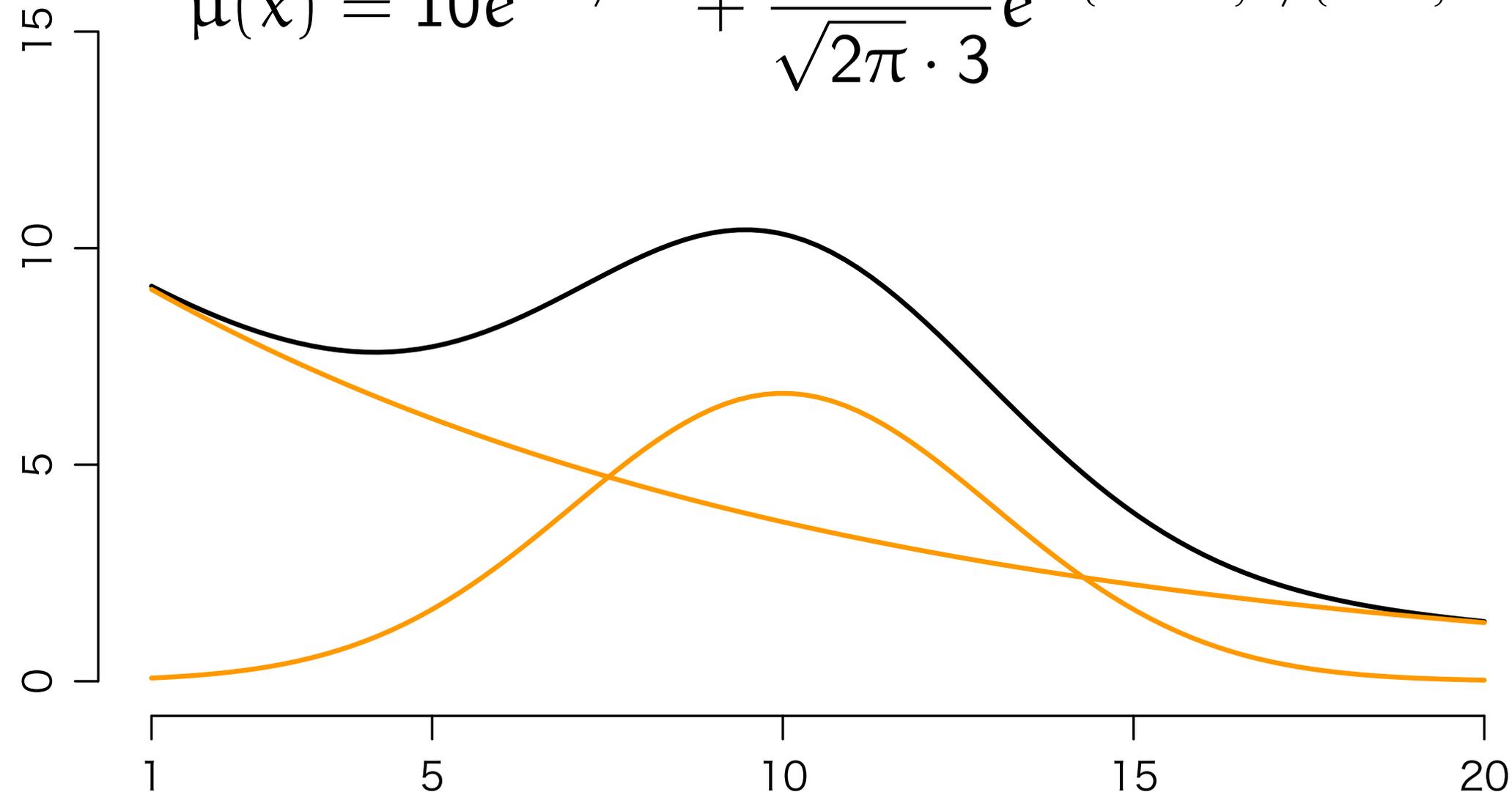
$\mu = 3.69$ のポアソン分布：0の確率 2.5%



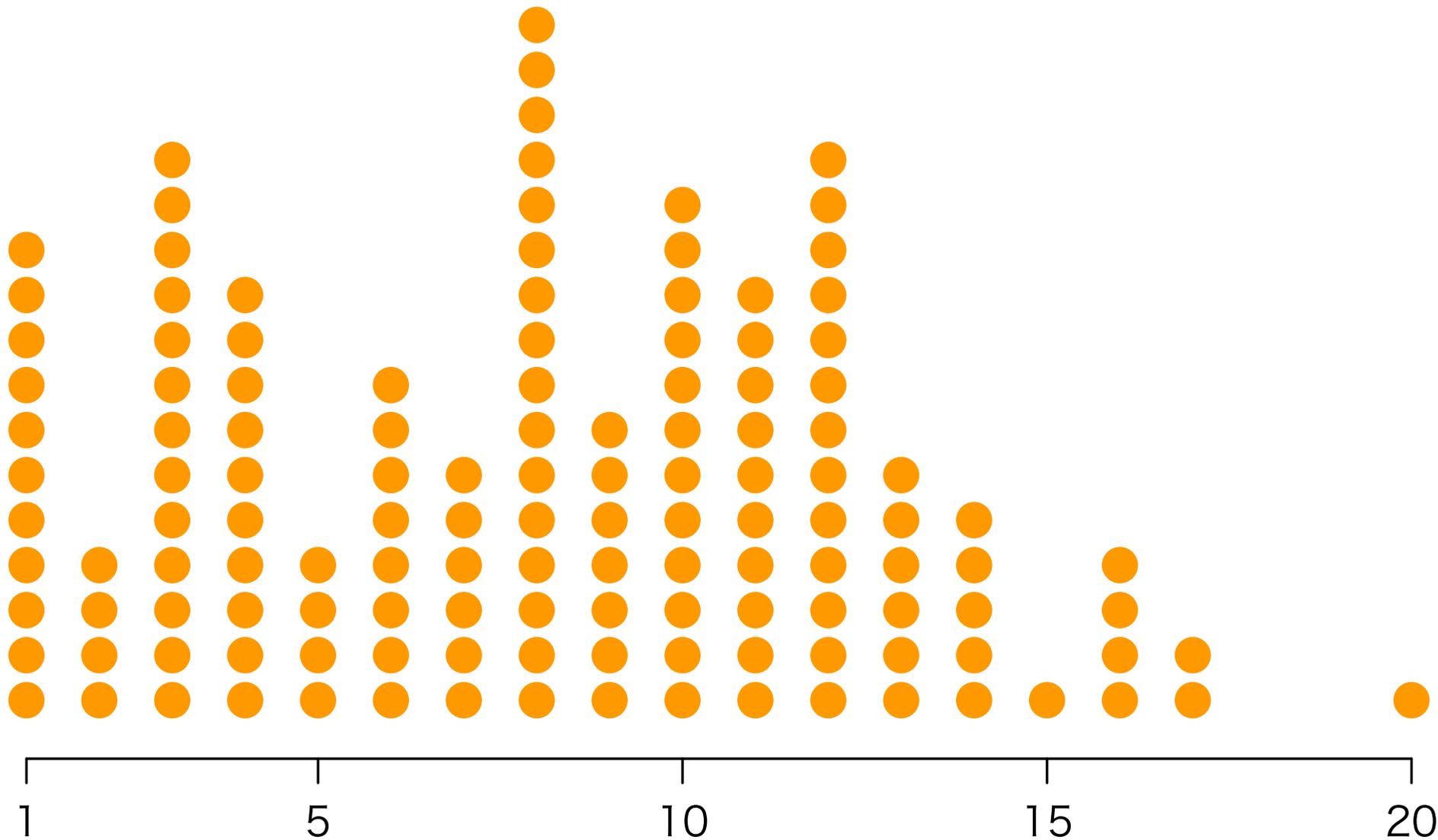
個数0を測定したら、
真の平均の 95% 信頼区間は $[0, 3.69]$

フィッティング

$$\mu(x) = 10e^{-x/10} + \frac{50}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} e^{-(x-10)^2 / (2 \cdot 3^2)}$$

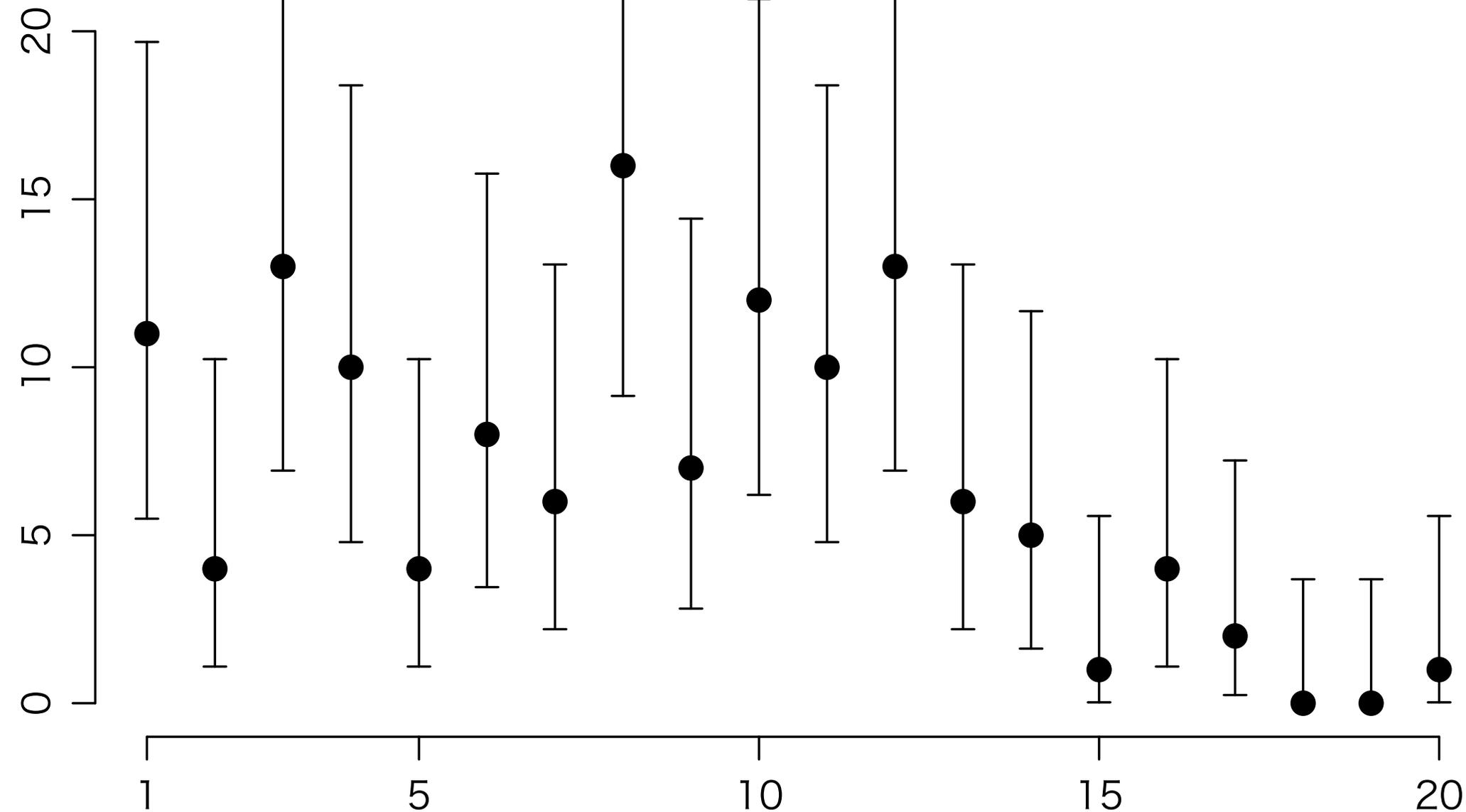


確率分布 $p_k = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$ で乱数を発生

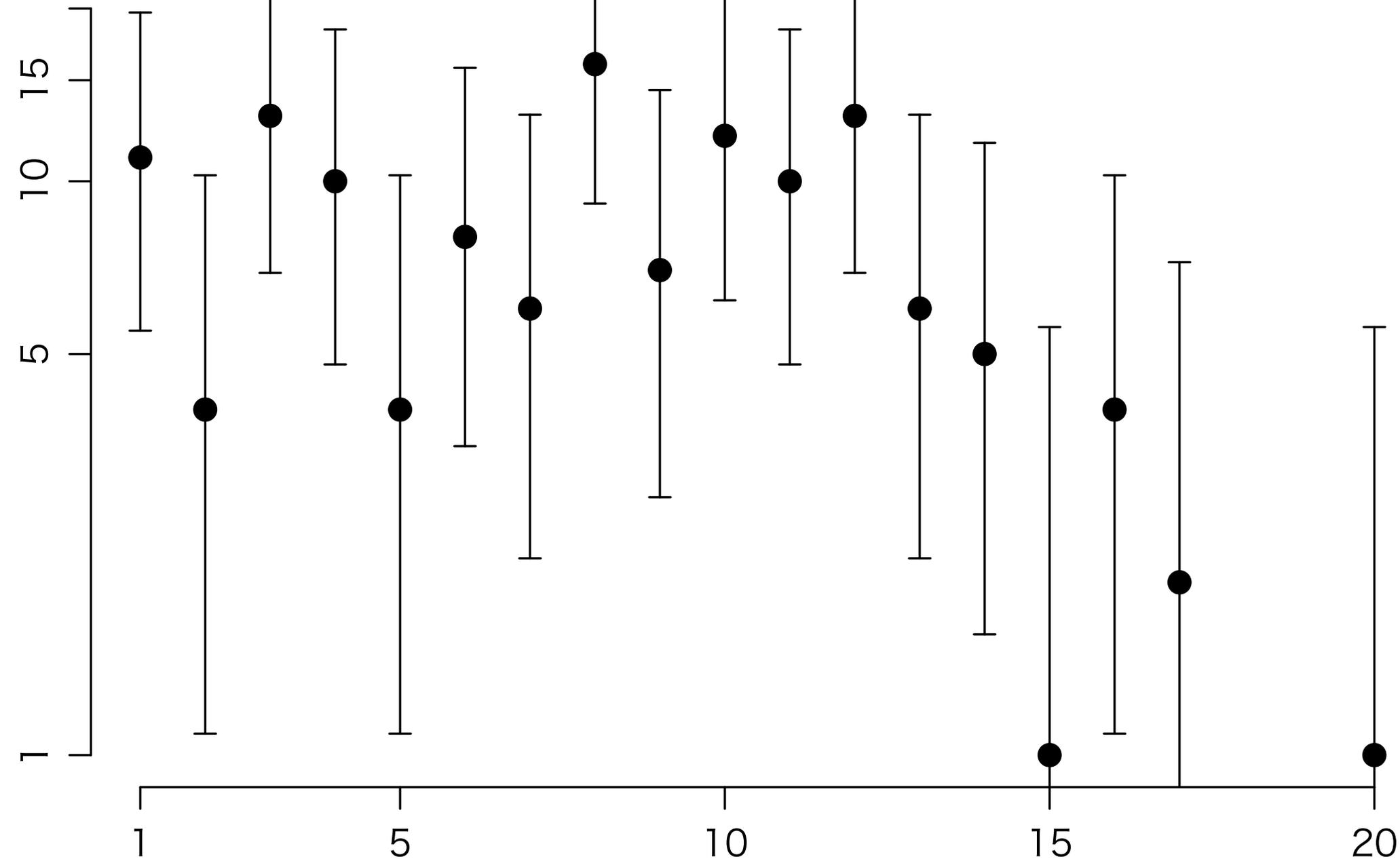


リニアプロット

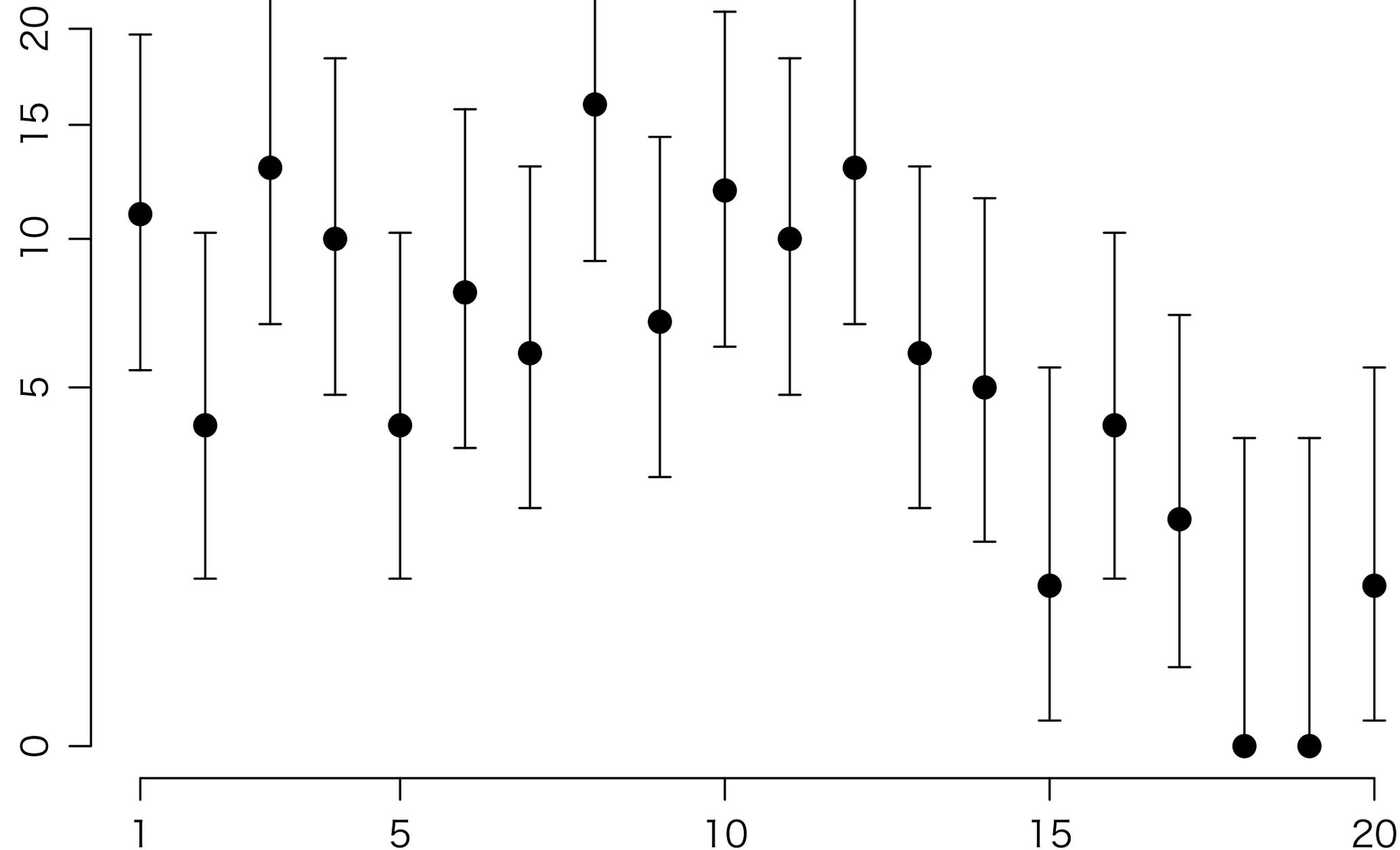
(95% 信頼区間)



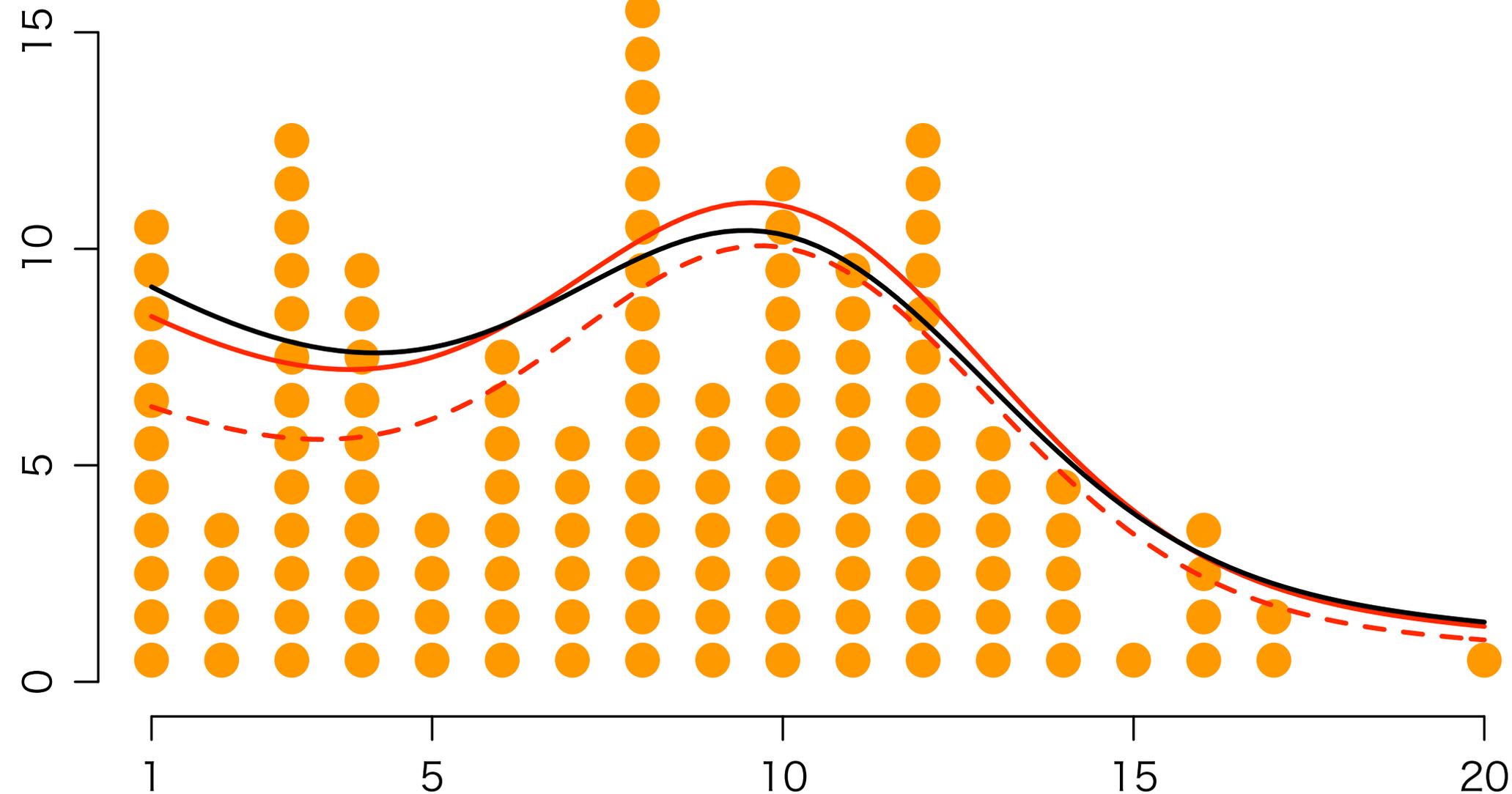
片対数プロット



Rootogram (ルートグラム)



どうやってフィットする？



最小2乗法：

$$\mu_i = ae^{-x_i/10} + \frac{b}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} e^{-(x_i-10)^2/(2 \cdot 3^2)}$$

と実測値 y_i の差の2乗和

$$\sum_{i=1}^{20} (y_i - \mu_i)^2$$

を最小にする a , b を求める。

重み付き最小2乗法：

$$\mu_i = ae^{-x_i/10} + \frac{b}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} e^{-(x_i-10)^2/(2 \cdot 3^2)}$$

と実測値 y_i の差の重み付き2乗和

$$\sum_{i=1}^{20} \frac{(y_i - \mu_i)^2}{y_i}$$

を最小にする a , b を求める。

$y_i = 0$ があると使えない（ビンを束ねて0をなくしたり分母を $y_i + 1$ にしたりして逃げる）。

さいゆう

最尤法（ポアソン分布）：

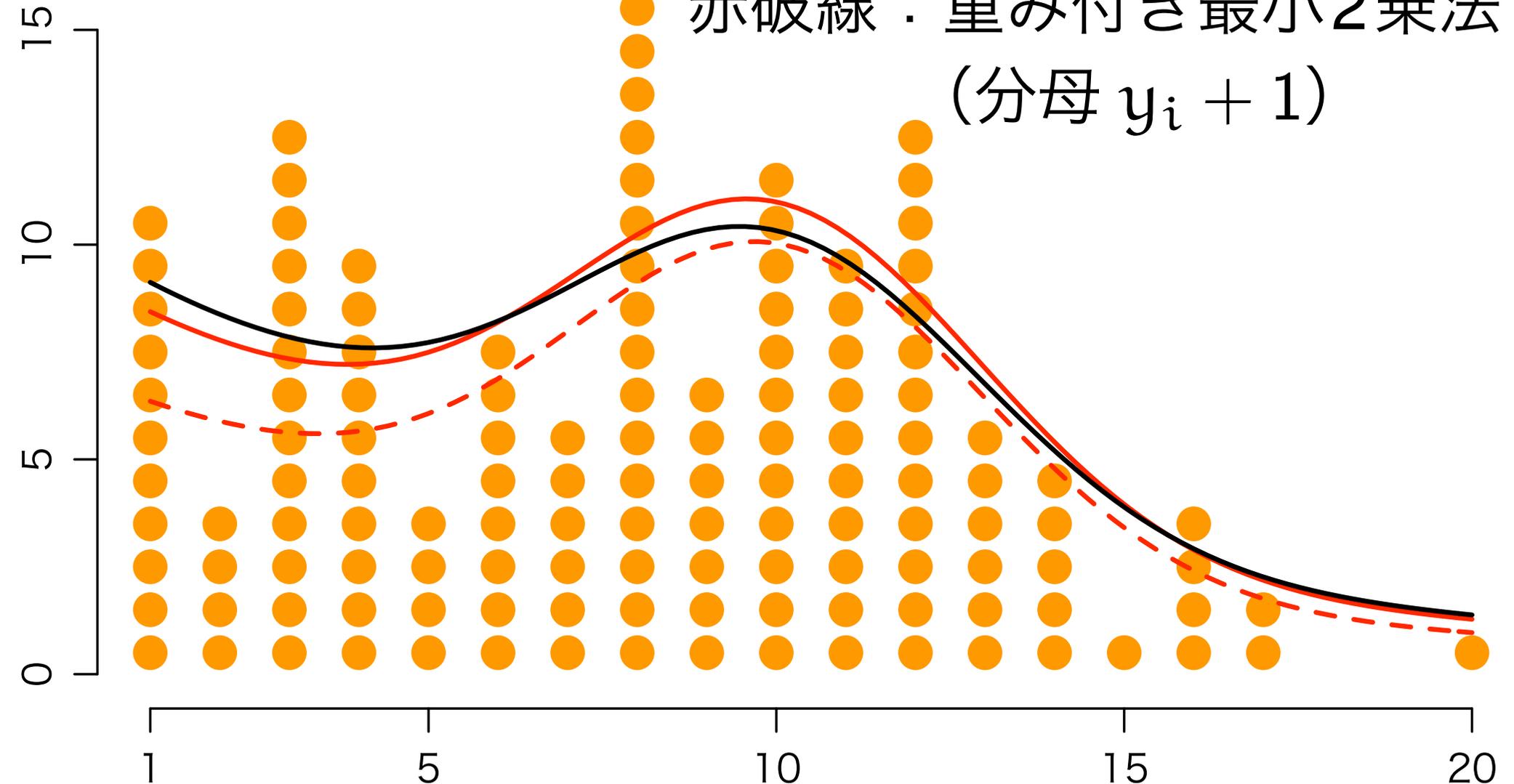
$$\mu_i = ae^{-x_i/10} + \frac{b}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} e^{-(x_i-10)^2/(2 \cdot 3^2)}$$

から実測値 y_i が得られる確率の積

$$\prod_{i=1}^{20} \frac{\mu_i^{y_i} e^{-\mu_i}}{y_i!}$$

を最大にする a , b を求める（実際は両辺の対数をとって足し算にして計算）。

黒実線：真の値
赤実線：最尤法（ポアソン）
赤破線：重み付き最小2乗法
（分母 $y_i + 1$ ）



Rでの最尤法の計算

```
> x = 1:20
> y = c(11,4,13,10,4,8,6,16,7,12,10,13,6,5,1,4,2,0,0,1)
> r = glm(y ~ exp(-x/10) + dnorm(x,10,3) - 1, family=poisson(link="identity"))
> summary(r)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)	
exp(-x/10)	9.234	1.566	5.897	3.70e-09	***
dnorm(x, 10, 3)	57.139	12.131	4.710	2.48e-06	***

```
> vcov(r)
```

	exp(-x/10)	dnorm(x, 10, 3)
exp(-x/10)	2.451703	-10.93347
dnorm(x, 10, 3)	-10.933472	147.16953

$$\mu_i = 9.234e^{-x_i/10} + \frac{57.139}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} e^{-(x_i - 10)^2 / (2 \cdot 3^2)}$$