微積分学ノート

目 次

1　正項級数の収束判定法

命題 1.1 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が与えられていて, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であり, 数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であるとする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も収束する.　　*(2)* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が発散すれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も発散する.

証明 仮定から, 正の実数 K で, すべての自然数 n に対して $\frac{b_n}{a_n} \leqq K$ となるものがある.

(1) 任意の自然数 n に対して $b_n \leqq Ka_n$ であり, 仮定から $\sum_{n=1}^{\infty} Ka_n$ は収束するため, 教科書の定理 1.7 の (1) により $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も収束する.

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n \geqq \frac{b_n}{K}$ であり, 仮定から $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{K}$ は発散するため, 教科書の定理 1.7 の (2) により $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ も発散する. □

命題 1.2 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が与えられていて, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であり, 正の実数 K と自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $\frac{b_n}{a_n} \geqq K$」を満たすものがあるとする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する.　　*(2)* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散すれば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する.

証明 (1) $n \geqq N$ ならば $a_n \leqq \frac{b_n}{K}$ であり仮定から $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{b_n}{K}$ は収束するため, 教科書の定理 1.7 の (1) により $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ も収束する. よって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する.

(2) $n \geqq N$ ならば $b_n \geqq Ka_n$ であり仮定から $\sum_{n=N}^{\infty} Ka_n$ は発散するため, 教科書の定理 1.7 の (2) により $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ も発散する. よって $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する. □

注意 1.3 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するとき, $K < \alpha < L$ を満たす任意の実数 K, L に対し, 自然数 N で条件「$n \geqq N$ ならば $K < a_n < L$」を満たすものがある. 従って, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束すれば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であり, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が正の値に収束すれば, 正の実数 K と自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $a_n > K$」を満たすものがある.

定理 1.4 *(ダランベールの判定法)*　すべての項が正である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられているとする.

(1) 実数 $K < 1$ と自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq K$」を満たすものがあれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) 実数 $K > 1$ と自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq K$」を満たすものがあれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明 (1) $n > N$ ならば $a_n \leqq Ka_{n-1} \leqq K^2a_{n-2} \leqq \cdots \leqq K^{i-1}a_{n-i+1} \leqq K^ia_{n-i} \leqq \cdots \leqq K^{n-N}a_N$ だから, $\frac{a_n}{K^n} \leqq \frac{a_N}{K^N}$ が N 以上の自然数 n に対して成り立つため, 数列 $\left\{\frac{a_n}{K^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. また, $0 < K < 1$ だから, 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} K^n$ は収束するため, 命題 1.1 の (1) によって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する.

(2) $n > N$ ならば $a_n \geqq Ka_{n-1} \geqq K^2a_{n-2} \geqq \cdots \geqq K^{i-1}a_{n-i+1} \geqq K^ia_{n-i} \geqq \cdots \geqq K^{n-N}a_N$ だから, $\frac{K^n}{a_n} \leqq \frac{K^N}{a_N}$ が N 以上の自然数 n に対して成り立つため, 数列 $\left\{\frac{K^n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. また, $K > 1$ だから, 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} K^n$ は発散するため, 命題 1.1 の (2) から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も発散する. □

注意 1.5 上の定理において, 数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する場合, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ とおくと, 注意 *1.3* から, $r<1$ ならば上の定理の *(1)* の条件が満たされるため, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束し, $r>1$ ならば上の定理の *(2)* の条件が満たされるため, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する.

定理 1.6 *(コーシーの判定法)* すべての項が負でない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられているとする.

(1) 実数 $K<1$ と自然数 N で, 条件「$n\geqq N$ ならば $\sqrt[n]{a_n}\leqq K$」を満たすものがあれば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.

(2) 実数 $K>1$ と自然数 N で, 条件「$n\geqq N$ ならば $\sqrt[n]{a_n}\geqq K$」を満たすものがあれば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する.

証明 (1) $n\geqq N$ ならば $a_n\leqq K^n$ だから, $\dfrac{a_n}{K^n}\leqq 1$ が N 以上の自然数 n に対して成り立つため, 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{K^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. $0<K<1$ だから, 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}K^n$ は収束するため, 命題 1.1 の (1) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束する.

(2) $n\geqq N$ ならば $a_n\geqq K^n$ だから, $\dfrac{K^n}{a_n}\leqq 1$ が N 以上の自然数 n に対して成り立つため, 数列 $\left\{\dfrac{K^n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. また, $K>1$ だから, 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}K^n$ は発散するため, 命題 1.2 の (2) から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も発散する. □

注意 1.7 上の定理において, 数列 $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する場合, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$ とおくと, 注意 *1.3* から, $r<1$ ならば上の定理の *(1)* の条件が満たされるため, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束し, $r>1$ ならば上の定理の *(2)* の条件が満たされるため, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する.

すべての項が正である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が定理 1.4 の (1) の条件を満たせば, 定理 1.6 の (1) の条件を満たすことが以下のようにして確かめられる.

定理 1.4 の (1) の証明から, $n\geqq N$ ならば $a_n\leqq K^{n-N}a_N$ が成り立つため, $\sqrt[n]{a_n}\leqq K\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}}$ である. $0<K<1$ だから $1<L<\dfrac{1}{K}$, を満たす実数 L が選べる. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}}=1$ だから, N 以上の自然数 M で, 条件「$n\geqq M$ ならば $\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}}\leqq L$」を満たすものがある. 従って $n\geqq M$ ならば $\sqrt[n]{a_n}\leqq K\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}}\leqq KL<1$ となって, 定理 1.4 の (1) の条件が満たされる.

すべての項が正である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が定理 1.4 の (2) の条件を満たせば, 定理 1.6 の (2) の条件を満たすことも以下のようにして確かめられる.

定理 1.4 の (2) の証明から, $n\geqq N$ ならば $a_n\geqq K^{n-N}a_N$ が成り立つため, $\sqrt[n]{a_n}\geqq K\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}}$ である. $K>1$ だから $\dfrac{1}{K}<L<1$, を満たす実数 L が選べる. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}}=1$ だから, N 以上の自然数 M で, 条件「$n\geqq M$ ならば $\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}}\geqq L$」を満たすものがある. 従って $n\geqq M$ ならば $\sqrt[n]{a_n}\geqq K\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}}\geqq KL>1$ となって, 定理 1.4 の (2) の条件が満たされる.

上の考察から, コーシーの判定法の方がダランベールの判定法よりも一般的な判定法であると言える.

定理 1.8 *(ラーベの判定法)* 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ において $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=r$ *(*$r=\pm\infty$ *も許す)* とする. $-\infty\leqq r<-1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束し, $-1<r\leqq+\infty$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する.

証明 $-\infty\leqq r<-1$ の場合, $r<-c<-1$ となる c をとる. このとき $c>1$ であり, 仮定から, 自然数 N で,「$k\geqq N$ ならば $k\left(\dfrac{a_{k+1}}{a_k}-1\right)<-c$」を満たすものがある. すなわち,「$k\geqq N$ ならば $-ka_{k+1}+(k-1)a_k>(c-1)a_k$」が成り立つ. $n\geqq N$ のとき $k=N,N+1,\cdots,n$ として上の不等式を辺々を足し合わせれば, $(N-1)a_N-na_{n+1}=$

$\sum_{k=N}^{n}(-ka_{k+1}+(k-1)a_k) > \sum_{k=N}^{n}(c-1)a_k$ を得る．故に $n \geqq N$ ならば $\sum_{k=N}^{n} a_k < \dfrac{-na_{n+1}+(N-1)a_N}{c-1} < \dfrac{(N-1)a_N}{c-1}$ となる．これは正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の部分和が有界であることを示しているから，この正項級数は収束する．

$-1 < r \leqq +\infty$ の場合，仮定から，自然数 N で，「$m \geqq N$ ならば $m\left(\dfrac{a_{m+1}}{a_m}-1\right) > -1$」を満たすものがある．すなわち，「$m \geqq N$ ならば $\dfrac{a_{m+1}}{a_m} > \dfrac{m-1}{m}$」が成り立つ．$n > N$ のとき $m = N, N+1, \cdots, n-1$ として上の不等式を用いれば，

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} > \frac{N-1}{N}, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > \frac{N}{N+1}, \quad \cdots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{n-2}{n-1}$$

であるから，辺々を掛け合わせて $\dfrac{a_n}{a_N} > \dfrac{N-1}{n-1}$ となり，$n > N$ ならば $a_n > \dfrac{N-1}{n-1}$ である．教科書の例題 1.6 により，$\sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{n-1}$ は発散するため，教科書の定理 1.17 から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する． □

注意 1.9 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ のとき，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

さらに $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ が成り立つ．

命題 1.10 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が与えられていて，すべての自然数 n に対して $a_n, b_n > 0$ であり，自然数 N で，条件「$n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geqq \dfrac{b_n}{b_{n+1}}$」を満たすものがあるとする．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *が収束すれば* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *も収束する．* *(2)* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *が発散すれば* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *も発散する．*

証明 (1) $n \geqq N$ ならば $a_{n+1} \leqq a_n \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ だから，$k \geqq N+1$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$a_k \leqq a_{k-1}\frac{b_k}{b_{k-1}} \leqq a_{k-2}\frac{b_{k-1}}{b_{k-2}}\frac{b_k}{b_{k-1}} \leqq \cdots \leqq a_N\frac{b_{N+1}}{b_N}\frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}\cdots\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{a_N}{b_N}b_k$$

従って $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k \leqq \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n}\dfrac{a_N}{b_N}b_k < \sum_{k=1}^{N} a_k + \dfrac{a_N}{b_N}\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が成り立ち，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するため，部分和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ は上に有界である．故に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

(2) $n \geqq N$ ならば $b_{n+1} \geqq b_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ だから，$k \geqq N+1$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$b_k \geqq b_{k-1}\frac{a_k}{a_{k-1}} \geqq b_{k-2}\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\frac{a_k}{a_{k-1}} \geqq \cdots \geqq b_N\frac{a_{N+1}}{a_N}\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{b_N}{a_N}a_k$$

従って $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{N} b_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_k \geqq \sum_{k=1}^{N} b_k + \sum_{k=N+1}^{n}\dfrac{b_N}{a_N}a_k = \sum_{k=1}^{N}\left(b_k - \dfrac{b_N}{a_N}a_k\right) + \dfrac{b_N}{a_N}\sum_{k=1}^{n} a_k$ であり，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するため，部分和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ は上に有界ではない．故に部分和 $\sum_{k=1}^{n} b_k$ も上に有界ではないため，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する． □

定理 1.11 *(ガウスの判定法)* *すべての自然数* n *に対して* $a_n > 0$ *である数列* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *に対し，実数* c *と* $s > 1$ *で，次の条件* $(*)$ *を満たすものがあるとする．*

$(*)$ $p_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \dfrac{c}{n}$ *によって数列* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *を定めれば，数列* $\{n^s p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *は有界である．*

このとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $c>1$ ならば収束し, $c \leqq 1$ ならば発散する.

証明 仮定より, 実数 K で, すべての自然数 n に対して $|n^s p_n| < K$ となるものが存在する. $s>1$ より $\lim_{n\to\infty} \frac{K}{n^{s-1}} = 0$ であり, $|np_n| < \frac{K}{n^{s-1}}$ だから $\lim_{n\to\infty} np_n = 0$ である.

$c>1$ とし, $1<t<c$ を満たす実数 t をとる. $|x|<1$ ならば

$$(1+x)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} x^k = 1 + tx + x^2 \left(\sum_{k=2}^{\infty} \binom{t}{k} x^{k-2} \right)$$

だから, 関数 $\rho : (-1,1) \to \boldsymbol{R}$ を $\rho(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \binom{t}{k} x^{k-2}$ によって定義すれば, $n \geqq 2$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^t = 1 + \frac{t}{n} + \frac{1}{n^2}\rho\left(\frac{1}{n}\right)$$

従って $b_n = \frac{1}{n^t}$ とおくと, $\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{c}{n} + p_n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^t = \frac{c-t}{n} + p_n - \frac{1}{n^2}\rho\left(\frac{1}{n}\right)$ である. $\lim_{x\to 0}\rho(x) = \rho(0) = \frac{t(t-1)}{2}$ だから $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\rho\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ である. 故に

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(c - t + np_n - \frac{1}{n}\rho\left(\frac{1}{n}\right)\right) = c - t > 0$$

が成り立つため, 自然数 N で条件「$n \geqq N$ ならば $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}}\right) > \frac{c-t}{2} > 0$」を満たすものが存在する. 従って $n \geqq N$ ならば $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}}$ が成り立ち, $t>1$ より $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$ は収束するため, 命題 1.10 の (1) によって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

$c<1$ とする. $b_n = \frac{1}{n}$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}(c-1+np_n) = c-1<0$ だから, 自然数 N で条件「$n \geqq N$ ならば $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}}\right) < \frac{c-1}{2} < 0$」を満たすものが存在する. 従って $n \geqq N$ ならば $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}}$ が成り立ち, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するため, 命題 1.10 の (2) によって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

$c=1$ の場合, $b_1 = 1$, $b_n = \frac{1}{n\log n}$ $(n \geqq 2)$ とおく. $x\log x$ に関する平均値の定理から $(n+1)\log(n+1) - n\log n = \log t + 1$ を満たす $n<t<n+1$ が存在するため, $(n+1)\log(n+1) - n\log n = \log t + 1 > \log n + 1$ が成り立つ. 故に $n \geqq 2$ ならば $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log n} = 1 + \frac{(n+1)\log(n+1) - n\log n}{n\log n} > 1 + \frac{\log n + 1}{n\log n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\log n}$ が成り立ち, さらに $p_n \leqq \frac{K}{n^s}$ だから $\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}} < p_n - \frac{1}{n\log n} \leqq \frac{K}{n\log n}\left(\frac{\log n}{n^{s-1}} - \frac{1}{K}\right)$ が得られる. $s>1$ だから $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{s-1}} = 0$ となるため, 2 以上の自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $\frac{\log n}{n^{s-1}} < \frac{1}{K}$」を満たすものが存在する. 従って上の不等式から $n \geqq N$ ならば $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}}$ が成り立ち, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ は発散するため, 命題 1.10 の (2) によって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する. □

定理 1.12 *(ディリクレの判定法)* 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は条件「$C \geqq 0$ で, すべての自然数 n に対して $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqq C$ を満たすものが存在する.」を満たし, 数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ は各項が負でない単調減少数列であるとする. このとき, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ または $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すれば, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n$ は収束し, その和の絶対値は Cp_0 以下である.

証明 整数 $0 \leqq n \leqq m$ に対し, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $s_{-1} = 0$, $S(n,m) = \sum_{k=n}^{m} p_k a_k$ とおくと次の等式が成り立つ.

$$S(n,m) = \sum_{k=n}^{m} p_k(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m-1} s_k(p_k - p_{k+1}) - s_{n-1}p_n + s_m p_m$$

仮定から $|s_k| \leqq C$, $p_k - p_{k+1} \geqq 0$ だから, 以下の不等式が得られる.

$$|S(n,m)| \leqq \sum_{k=n}^{m-1} |s_k|(p_k - p_{k+1}) + |s_{n-1}|p_n + |s_m|p_m \leqq C\left(\sum_{k=n}^{m-1}(p_k - p_{k+1}) + p_n + p_m\right) = 2Cp_n \quad (n > 0)$$
$$|S(0,m)| \leqq \sum_{k=0}^{m-1} |s_k|(p_k - p_{k+1}) + |s_m|p_m \leqq C\left(\sum_{k=0}^{m-1}(p_k - p_{k+1}) + p_m\right) = Cp_0$$

$\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $0 \leqq p_n < \dfrac{\varepsilon}{2C}$」を満たすものが存在するため, 最初の不等式から $m \geqq n \geqq N$ ならば $|S(m,n)| < \varepsilon$ となり, $\left\{\sum_{k=0}^{n} p_k a_k\right\}_{n=0}^{\infty}$ はコーシー列である. 故に $\sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n$ は収束する. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定する. $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列だから収束するため, $\lim_{n\to\infty} p_n = \alpha$ とおくと, $\{p_n - \alpha\}_{n=0}^{\infty}$ は各項が負でない単調減少数列である. 従って, 上で示したことから $\sum_{n=0}^{\infty}(p_n - \alpha)a_n$ は収束し, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(p_n - \alpha)a_n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する. □

2 指数関数

補題 2.1 x を正の実数とするとき $n \geqq m > 2x$ ならば $\dfrac{x^n}{n!} < \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}\dfrac{1}{2^{n-m+1}}$ である. 従って $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$, $\sum_{k=m}^{n} \dfrac{x^k}{k!} < \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}$ が成り立つ.

証明 $\dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{x}{1}\dfrac{x}{2}\cdots\dfrac{x}{(m-1)}\dfrac{x}{m}\cdots\dfrac{x}{n} < \dfrac{x}{1}\dfrac{x}{2}\cdots\dfrac{x}{(m-1)}\dfrac{x}{(2x)}\cdots\dfrac{x}{(2x)} = \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}\dfrac{1}{2^{n-m+1}}$ だから, 1 つめの主張が示された. 従って, はさみうちの原理から 2 つめの主張が示される. 1 つめの主張と, 等比数列の和の公式を用いれば,

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=m}^{n} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{2^{k-m+1}} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\left(1 - \frac{1}{2^{n-m+1}}\right) < \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

より, 3 つめの主張が示される. □

実数 x に対して数列 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ をそれぞれ $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$, $a_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ で定める.

命題 2.2 $x > 0$ ならば, $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列である. さらに, 任意の実数 x に対して級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ は絶対収束する.

証明 $s_{n+1}(x) - s_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} > 0$ だから $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列である. $m > 2x$ を満たす m を 1 つ選ぶと, 上の補題から $n \geqq m$ ならば

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

となり, この右辺は n に無関係な定数であるため, $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. 従って連続性の公理から $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. 任意の実数 x に対して $s_n(|x|) = \sum_{k=0}^{n} \left|\dfrac{x^k}{k!}\right|$ だから, 前半の主張から $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ は絶対収束する. □

上の命題から, 実数全体で定義された関数 exp を $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ で定義する.

命題 2.3 x が正ならばすべての n に対して, $a_n(x) \leqq s_n(x)$ が成り立ち, $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列である.

証明 二項定理から

$$a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{n}\right)^k = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

より $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1$ に注意すれば, $a_n(x) \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = s_n(x)$ である. 補題 2.2 により $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界だから, $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ も上に有界である.

$i = 1, 2, \cdots, k-1 < n$ に対して $1 - \frac{i}{n+1} > 1 - \frac{i}{n} > 0$ だから次の式から $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列である.

$$\begin{aligned}
a_{n+1}(x) - a_n(x) &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) - \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&\quad + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) > 0.
\end{aligned}$$

□

定理 2.4 任意の実数 x に対して $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \exp x$ である.

証明 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 補題 2.1 から $K > 2|x|$ を満たす 3 以上の整数 K で, 条件「$n \geqq K$ ならば $\frac{|x|^{K-1}}{(K-1)!} < \frac{\varepsilon}{4}$」を満たすものがあるため, そのような K を 1 つ選んでおく. ここで, $n > (K-2)\left(1 - \left|1 - \frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}}\right|^{\frac{1}{K-2}}\right)^{-1}$ ならば $1 - \left(1-\frac{K-2}{n}\right)^{K-2} < \frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}}$ であり, $2 \leqq k \leqq K-1$ ならば $\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{k-1} \geqq \left(1-\frac{K-2}{n}\right)^{K-2}$ である. そこで, K と $(K-2)\left(1 - \left|1 - \frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}}\right|^{\frac{1}{K-2}}\right)^{-1}$ の両方より大きい自然数 N_1 を 1 つ選んで $n > N_1$ とする. このとき, 補題 2.1 から $\sum_{k=K}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leqq \frac{|x|^{K-1}}{(K-1)!}$ と $\sum_{k=2}^{K-1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{K-1} \frac{1}{k!} < 1$ が成り立つことに注意すれば,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - a_n(x)\right| &= \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\right| \\
&\leqq \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&\quad + \sum_{k=K}^{n} \frac{|x|^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&\leqq \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{k-1}\right) + \sum_{k=K}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \\
&\leqq \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{K-2}{n}\right)^{K-2}\right) + \frac{|x|^{K-1}}{(K-1)!} < \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=2}^{K-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^k + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=2}^{K-1} \frac{1}{k!} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して N_1 以上の自然数 N で, $n > N$ ならば

$$\left| a_n(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{かつ} \quad \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \exp\, x \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものがあるから, 三角不等式を用いると, $n > N$ ならば

$$|a_n(x) - \exp\, x| \leqq \left| a_n(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| + \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \exp\, x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

である. 故に $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \exp\, x$ であることが示された. □

定理 2.5 任意の実数 $x,\, y$ に対して $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$ が成り立つ. 従って $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$ である.

証明 自然数 $n,\, k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して, 命題 2.3 から次の不等式が成り立つ.

$$\left(1 + \frac{|x+y|}{n}\right)^{n-1-k} = \left(1 + \frac{|x+y|}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{|x+y|}{n}\right)^{-1-k} \leqq a_n(|x+y|) \leqq s_n(|x+y|) \leqq \exp(|x+y|)$$

上式と等式 $X^n - Y^n = (X-Y)\sum_{k=0}^{n-1} X^k Y^{n-k-1}$ から, $n > \max\{|x|, |y|\}$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}
|a_n(x)a_n(y) - a_n(x+y)| &= \left| \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n - \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \right| = \left| \frac{xy}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{xy}{n^2}\right)^k \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^{n-1-k} \right| \\
&\leqq \frac{|xy|}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|xy|}{n^2}\right)^k \left(1 + \frac{|x+y|}{n}\right)^{n-1-k} \leqq \frac{|xy| \exp(|x+y|)}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|xy|}{n^2}\right)^k \\
&= \frac{|xy| \exp(|x+y|)}{n^2} \frac{1 - \left(\frac{|xy|}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{|xy|}{n^2}} \leqq \frac{|xy| \exp(|x+y|)}{n^2 - |xy|}
\end{aligned}$$

が成り立つ. $n \to \infty$ のとき, $\dfrac{|xy| \exp(|x+y|)}{n^2 - |xy|}$ は 0 に近づくため, 上の不等式から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n(x)a_n(y) - a_n(x+y)) = 0$ である. 定理 2.4 から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n(x)a_n(y) = (\exp x)(\exp y)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n(x+y) = \exp(x+y)$ だから, 結果が得られる. □

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} a_n(1)$ を e で表すことにすると, 定理 2.4 から $e = \exp 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ である.

定理 2.6 x が有理数ならば $e^x = \exp x$ である.

証明 まず自然数 n に対して $e^n = \exp n$ が成り立つことを, n による数学的帰納法で示す. $n = 1$ のときは, e の定義と定理 2.4 から主張は正しい. $e^k = \exp k$ が成り立つと仮定すれば, 定理 2.5 から $e^{k+1} = e^k e = (\exp k)(\exp 1) = \exp(k+1)$ となるため, $n = k+1$ のときも主張が成り立つ.

明らかに $\exp 0 = 1 = e^0$ は成立する. n を負の整数とすれば, $-n$ は自然数だから, 上の結果より $e^{-n} = \exp(-n)$ である. 一方, 定理 2.4 より $(\exp n)(\exp(-n)) = \exp(n + (-n)) = \exp 0 = 1$ だから $\exp n = \dfrac{1}{\exp(-n)} = \dfrac{1}{e^{-n}} = e^n$ である. 以上から, 任意の整数 n に対して $e^n = \exp n$ が成り立つ.

x を任意の有理数とすると, 自然数 m と整数 n を用いて $x = \dfrac{n}{m}$ と表せる. $mx = n$ だから $(e^x)^m = e^{mx} = e^n = \exp n = \exp(mx)$ であり, 定理 2.4 から $\exp(mx) = (\exp x)^m$ が成り立つため $(e^x)^m = (\exp x)^m$ である. ここで, $\exp x = \exp\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \left(\exp \dfrac{x}{2}\right)^2 \geqq 0$ より $(e^x)^m = (\exp x)^m$ の両辺の m 乗根を考えて $e^x = \exp x$ を得る. □

補題 2.7 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$ が成り立つ.

証明 命題 2.3 の証明の 2 行目の等式と補題 2.1 より, 2 以上の自然数 n に対して, $0 < |x| < 1$ ならば

$$\left|\frac{a_n(x)-1}{x}-1\right| = \left|\frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1 - x\right)\right| = \left|\frac{1}{x}\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right|$$
$$\leqq |x|\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^{k-2}}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqq |x|\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \leqq |x|$$

が成り立つ. よって $\left|\dfrac{a_n(x)-1}{x}-1\right| \leqq |x|$ の左辺で $n \to \infty$ とすれば, 定理 2.4 から $\left|\dfrac{\exp x - 1}{x}-1\right| \leqq |x|$ が $0 < |x| < 1$ を満たす x に対して成り立つことがわかる. この不等式の右辺は $x \to 0$ のとき 0 に近づくため, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp x - 1}{x} = 1$ であることがわかる. □

定理 2.8 exp は各点で微分可能であり, exp の導関数は exp である. とくに exp は連続関数である.

証明 定理 2.5 と補題 2.7 より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp x}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{(\exp x)(\exp h)-\exp x}{h} = \exp x \lim_{x\to 0}\frac{\exp h - 1}{h} = \exp x$ が任意の実数 x に対して成り立つため, 主張が示された. □

命題 2.9 exp は狭義単調増加関数で $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\exp x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\exp x = \infty$ が成り立つ. 従って exp は実数全体の集合から正の実数全体の集合への全単射を与える.

証明 もし $\exp x_0 = 0$ を満たす x_0 が存在すれば, 定理 2.5 から $1 = \exp 0 = \exp(x_0+(-x_0)) = (\exp x_0)(\exp(-x_0)) = 0$ となって矛盾が生じるため, すべての実数 x に対して $\exp x \neq 0$ である. また, 定理 2.6 の証明で示したように, 任意の実数 x に対して $\exp x \geqq 0$ だから exp は常に正の値をとる. $\exp x$ の定義から $x > 0$ ならば $\exp x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} > 1$ である. 従って $x < y$ ならば $y - x > 0$ だから, 定理 2.5 から $\dfrac{\exp y}{\exp x} = \exp(y-x) > 1$ であり, $\exp x > 0$ だから $\exp x < \exp y$ が得られるため, exp は狭義単調増加関数である.

$e > 1$ だから, 定理 2.6 より, 任意の正の数 ε に対して自然数 N で, $\exp(-N) = e^{-N} < \varepsilon$ を満たすものがある. exp は正の値をとる単調増加関数だから, $x \leqq -N$ を満たす任意の実数 x に対して $0 < \exp x \leqq \exp(-N) < \varepsilon$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\exp x = 0$ である. 同様に, 任意の正の数 λ に対して自然数 M で, $\exp M = e^M > \lambda$ を満たすものがある. exp は単調増加関数だから, $x \leqq M$ を満たす任意の実数 x に対して $\exp x \geqq \exp M > \lambda$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\exp x = \infty$ である. □

定義 2.10 関数 $\exp : \boldsymbol{R} \to (0,\infty)$ を指数関数といい, 任意の実数 x に対して $\exp x$ を e^x で表す. exp の逆関数を $\log : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ で表し, log を対数関数と呼ぶ.

注意 2.11 exp と log は互いに逆関数だから, 任意の実数 x に対して $\log(e^x) = x$ が成り立ち, 任意の正の実数 x に対して $e^{\log x} = x$ が成り立つ. とくに, $\log 1 = 0$, $\log e = 1$ である. また, exp は狭義単調増加関数だから log も狭義単調増加関数であり, $0 < x < 1$ ならば $\log x < 0$, $x > 1$ ならば $\log x > 0$ が成り立つ. さらに, 任意の実数 K に対し,「$0 < x < e^K$ ならば $\log x < \log(e^K) = K$」および「$x > K$ ならば $\log x > \log(e^K) = K$」が成り立つため, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x = \infty$ である.

命題 2.12 正の実数 x, y に対して, $\log(xy) = \log x + \log y$ が成り立つ.

証明 $z = \log x$, $w = \log y$ とおけば $x = e^z$, $y = e^w$ だから, 定理 2.5 により $xy = e^z e^w = e^{z+w}$ である. 従って $\log(xy) = z + w = \log x + \log y$ が得られる. □

定理 2.13 log は各点で微分可能であり, log の x における微分係数は $\dfrac{1}{x}$ である.

証明 まず $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$ を示す．$y=\log(1+x)$ とおけば, $x=\exp y-1$ であり, 補題 2.7 より $y\to 0$ のとき, $x\to 0$ だから教科書の定理 2.7 により, $x\to 0$ のとき $y=\log(1+x)\to 0$ である．そこで関数 f, g を $f(x)=\log(1+x)$, $g(y)=\begin{cases}\frac{y}{\exp y-1} & y\neq 0\\ 1 & y=0\end{cases}$ によって定めれば, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ であり, 補題 2.7 より $\lim_{y\to 0}g(y)=\lim_{y\to 0}\dfrac{y}{\exp y-1}=\lim_{y\to 0}\dfrac{1}{\frac{\exp y-1}{y}}=1=g(0)$ だから, 教科書の定理 2.3 より $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}g(f(x))=g(0)=1$ である．

この結果を用いれば $\lim_{h\to 0}\dfrac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}$ である． □

定義 2.14 a を正の実数する．実数 x に対して正の実数 $e^{x\log a}=\exp(x\log a)$ を対応させる関数を, *(a を底とする) 指数関数*といい, $e^{x\log a}$ を a^x で表す．

命題 2.15 *(1)* $0<a<1$ ならば a を底とする指数関数は狭義単調減少関数であり, 実数全体の集合から正の実数全体の集合への全単射である．$a>1$ ならば a を底とする指数関数は狭義単調増加関数であり, 実数全体の集合から正の実数全体の集合への全単射である．

(2) 正の実数 a, b と, 任意の実数 x, y に対して等式 $(ab)^x=a^xb^x$, $a^{x+y}=a^xa^y$, $(a^x)^y=a^{xy}$ が成り立つ．

証明 (1) 注意 2.11 でみたように, $0<a<1$ ならば $\log a<0$ だから, $x<y$ ならば $x\log a>y\log a$ である．exp は単調増加関数だから $a^x=\exp(x\log a)>\exp(y\log a)=a^y$ となり, a を底とする指数関数は狭義単調減少関数であり, とくに単射であることがわかる．$a>1$ の場合は $\log a>0$ だから, 同様にして a を底とする指数関数は狭義単調増加関数であることがわかる．また, 任意の正の実数 z に対して $a^{\frac{\log z}{\log a}}=\exp(\log z)=z$ となるため, a を底とする指数関数は全射でもある．

(2) 命題 2.12, 2.5 から $(ab)^x=e^{x\log ab}=e^{x(\log a+\log b)}=e^{x\log a+x\log b}=e^{x\log a}e^{x\log b}=a^xb^x$, $a^{x+y}=e^{(x+y)\log a}=e^{x\log a+y\log a}=e^{x\log a}e^{y\log a}=a^xa^y$ であり, また, 任意の正の実数 z に対して $e^{\log z}=z$ が成り立つため, $(a^x)^y=e^{y\log a^x}=e^{y\log e^{x\log a}}=e^{xy\log a}=a^{xy}$ が得られる． □

定義 2.16 1 でない正の実数 a に対し, a を底とする指数関数の逆関数を *a を底とする対数関数*と呼び, $\log_a$ で表す．

命題 2.17 *a, b を 1 でない正の実数, x, y を正の実数とする．*

(1) 等式 $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ が成り立つ．とくに $b=e$ の場合, $\log_a x=\dfrac{\log x}{\log a}$ である

(2) 等式 $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$, $\log_a(x^y)=y\log_a x$ が成り立つ．

証明 (1) e^x と $\log x$, a^x と $\log_a x$ はそれぞれ互いに逆関数だから $e^{\log x}=x$ と $a^{\log_a x}=x$ が成り立ち, $a^x=e^{x\log a}$ より, $a^{\frac{\log x}{\log a}}=e^{\log x}=x=a^{\log_a x}$ である．a を底とする指数関数は単射だから $a^{\frac{\log x}{\log a}}=a^{\log_a x}$ より, $\dfrac{\log x}{\log a}=\log_a x$ を得る．この等式から一般の場合は, $\dfrac{\log_b x}{\log_b a}=\dfrac{\frac{\log x}{\log_b}}{\frac{\log a}{\log_b}}=\dfrac{\log x}{\log a}=\log_a x$ として示される．

(2) (1) の結果と命題 2.12 から $\log_a(xy)=\dfrac{\log(xy)}{\log a}=\dfrac{\log x+\log y}{\log a}=\dfrac{\log x}{\log a}+\dfrac{\log y}{\log a}=\log_a x+\log_a y$ を得る．また, $\log(e^z)=z$ に注意すれば $\log_a(x^y)=\dfrac{\log(x^y)}{\log a}=\dfrac{\log(e^{y\log x})}{\log a}=\dfrac{y\log x}{\log a}=y\log_a x$ である． □

定理 2.18 *関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は, 任意の $x,y\in\boldsymbol{R}$ に対し $f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たすとする．f がある $a\in\boldsymbol{R}$ において連続ならば, すべての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $f(x)=f(1)x$ である．*

証明 任意の $x,h\in\boldsymbol{R}$ に対し, $f(x+h)-f(x)=f(x)+f(h)-f(x)=f(h)=f(a)+f(h)-f(a)=f(a+h)-f(a)$ であり, a における f の連続性から $h\to 0$ のとき, $f(x+h)-f(x)\to 0$ となるため f は x において連続である．まず仮定から, 任意の自然数 n と実数 x に対して $f(nx)=nf(x)$ が成り立つ．とくに $x=1$ として $f(n)=nf(1)=f(1)n$

である．また $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ より $f(0) = 0$. さらに $f(n)+f(-n) = f(n+(-n)) = f(0) = 0$ だから $f(-n) = -f(n) = -f(1)n = f(1)(-n)$. 従って, 任意の整数 n に対して $f(n) = f(1)n$ である．x を任意の有理数として $x = \dfrac{p}{q}$ (p は整数, q は自然数) とおく．$g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = f(1)x$ で定義すれば, $qf(x) = f(qx) = f(p) = f(1)p$ だから $f(x) = f(1)x = g(x)$ である．任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = x$ となる有理数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ があるため f, g の連続性から, $f(x) = f\left(\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = g(x)$ である． □

定理 2.19 関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は, 任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすとする．f がある $a \in \boldsymbol{R}$ において連続で, $f(b) \neq 0$ となる $b \in \boldsymbol{R}$ が存在すれば, すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) = \exp(x \log f(1))$ である．

証明 もし $f(c) = 0$ となる $c \in \boldsymbol{R}$ が存在すれば, 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) = f(x-c+c) = f(x-c)f(c) = 0$ となるため, $f(b) \neq 0$ となる $b \in \boldsymbol{R}$ の存在と矛盾する．従って, すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) \neq 0$ である．さらに $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \geqq 0$ だから, すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) > 0$ である．そこで, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = \log f(x)$ で定めれば, 教科書の定理 2.6 により g は $a \in \boldsymbol{R}$ において連続であり, 仮定と命題 2.12 により, g は定理 2.18 における仮定を満たす．従ってすべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $\log f(x) = g(x) = g(1)x = x \log f(1)$ だから $f(x) = \exp(x \log f(1))$ である． □

定理 2.20 関数 $f : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ は, 任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し $f(xy) = f(x) + f(y)$ を満たすとする．f がある $a \in \boldsymbol{R}$ において連続ならば, すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) = f(\exp 1) \log x$ である．

証明 $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = f(\exp\, x)$ で定めれば, 教科書の定理 2.6 により g は $a \in \boldsymbol{R}$ において連続であり, 仮定と定理 2.5 により, g は定理 2.18 における仮定を満たす．従ってすべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(\exp\, x) = g(x) = g(1)x = f(\exp 1)x$ だから $f(x) = \exp(x \log f(1))$ である． □

3 関数の微分

開区間 (a, b) で定義された関数 f が p において微分可能であるとは, 極限値

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

が存在することであり, この極限値を f の p における微分 (係数) と呼んで, $f'(p)$ で表すことは高校でも学んだ．

以下で,「1 次関数による近似」という観点から, この微分という概念を見直してみる．

xy-平面上の点 $(p, f(p))$ における f のグラフの「接線」を与える 1 次関数 $f(p) + f'(p)(x-p)$ を考えて, $f(x)$ を x の 1 次関数 $f(p) + f'(p)(x-p)$ で近似したときの誤差

$$f(x) - (f(p) + f'(p)(x-p))$$

を $\varphi(x)$ とおく．これを x の関数とみなせば,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p} \frac{\varphi(x)}{x-p} &= \lim_{x\to p} \frac{f(x) - (f(p) + f'(p)(x-p))}{x-p} = \lim_{x\to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x-p} - f'(p)\right) \\ &= \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} - \lim_{x\to p} f'(p) = f'(p) - f'(p) = 0\end{aligned}$$

が成り立ち, x を p に近づければ, $\varphi(x)$ と $x - p$ との比が 0 に近づくことがわかる．すなわち $x \to p$ のとき $\varphi(x)$ は $x - p$ より「高位の無限小」である．このことを感覚的に表現すれば, 次のようになる．

x を p に近づけたとき, 誤差 $\varphi(x)$ は $x - p$ とは比べものにならないくらい速く 0 に近づくため, 1 次関数 $f(p) + f'(p)(x-p)$ は関数 f の p の近くでの「よい近似」である．

逆に, 開区間 (a,b) で定義された関数 f に対し, $f(p)+A(x-p)$ (A は定数) という形の, $x=p$ における値が $f(p)$ である 1 次関数で, 上で「よい近似」と表現した条件

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}=0\ \cdots(*)$$

を満たすものが存在すると仮定すれば,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}&=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))+A(x-p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}+A\right)\\&=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}+\lim_{x\to p}A=0+A=A\end{aligned}$$

となるため, f は p で微分可能で, f の p における微分は A である. 従って, 条件 $(*)$ を満たす定数 A が存在すれば, f の p における微分として 1 とおりに定まる.

以上の考察の結果をまとめると次のようになる.

命題 3.1 開区間 (a,b) で定義された関数 f が p において微分可能であるためには,

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}=0\ \cdots(*)$$

を満たす定数 A が存在することが必要十分である. $(*)$ を満たす定数 A が存在するとき, A は f の p における微分 $f'(p)$ にほかならない.

このように, 一般の関数を最も基本的 (定数値関数の次に簡単) な関数である 1 次関数で近似するという考え方が, 微分という概念の本質である.

4 合成関数・逆関数の微分法

前節の命題 3.1 は次のように言い換えることができる.

命題 4.1 開区間 (a,b) で定義された関数 f, 実数 A, $p\in(a,b)$ に対して, 関数 $\varepsilon=\varepsilon_{f,A,p}:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ を

$$\varepsilon_{f,A,p}(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p} & x\neq p\\ 0 & x=p\end{cases}$$

で定義する. このとき, 任意の $x\in(a,b)$ に対して, 等式

$$f(x)=f(p)+A(x-p)+(x-p)\varepsilon_{f,A,p}(x)$$

が成り立ち, f が p で微分可能であるためには, $\varepsilon_{f,A,p}$ が p において連続 (すなわち $\lim\limits_{x\to p}\varepsilon_{f,A,p}(x)=0$) となるような, 実数 A が存在することが必要十分である. さらに, $\lim\limits_{x\to p}\varepsilon_{f,A,p}(x)=0$ を満たす定数 A が存在するとき, A は f の p における微分 $f'(p)$ にほかならない.

上の結果から, f が p で微分可能ならば, $\lim\limits_{x\to p}f(x)=\lim\limits_{x\to p}(f(p)+A(x-p)+(x-p)\varepsilon_{f,A,p}(x))=f(p)$ となるため, f は p で連続である.

定理 4.2 f, g をそれぞれ開区間 (a,b), (c,d) で定義された関数とし, $x\in(a,b)$ ならば $f(x)\in(c,d)$ であるとする. f が p で微分可能であり, g が $f(p)$ で微分可能ならば, 合成関数 $g\circ f$ は p で微分可能であり, $(g\circ f)'(p)=g'(f(p))f'(p)$ が成り立つ.

証明 関数 $\varepsilon_{g,g'(f(p)),f(p)}$ を ε で表すことにすれば, g は $f(p)$ で微分可能だから, 命題 4.1 から

$$g(y) = g(f(p)) + g'(f(p))(y - f(p)) + (y - f(p))\varepsilon(y)$$

が成り立つ. この等式の y に $f(x)$ を代入すれば

$$g(f(x)) = g(f(p)) + g'(f(p))(f(x) - f(p)) + (f(x) - f(p))\varepsilon(f(x))$$

が得られる. $x \neq p$ として, 上の等式の両辺を $x - p$ で割って移項すれば次の等式が得られる. .

$$\frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(p)}{x - p} = g'(f(p))\frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \frac{f(x) - f(p)}{x - p}\varepsilon(f(x)) \cdots (1)$$

ここで, $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ であり, ε は $f(p)$ で連続だから, 教科書の定理 2.3 より $\lim_{x\to p} \varepsilon(f(x)) = \varepsilon(f(p)) = 0$ である. さらに仮定から $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p)$ だから (1) によって

$$\lim_{x\to p} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(p)}{x - p} = \lim_{x\to p} \left(g'(f(p))\frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \frac{f(x) - f(p)}{x - p}\varepsilon(f(x)) \right) = g'(f(p))f'(p)$$

が得られて, $g\circ f$ は p で微分可能で, $(g\circ f)'(p) = g'(f(p))f'(p)$ であることがわかる. □

逆関数の微分についての定理を証明するために, 以下で少し準備をする. 次の「中間値の定理」は連続関数について最も基本的な定理の一つである.

定理 4.3 *(中間値の定理) $f : X \to \boldsymbol{R}$ を実数値連続関数とする. $[a, b] \subset X$ であり, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 d に対し, $f(c) = d$ となる $c \in (a, b)$ が存在する.*

この中間値の定理を用いれば, 次の結果が示される.

定理 4.4 *閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ が単射ならば f は狭義単調増加関数であるか, または狭義減少増加関数である. さらに, 前者の場合は f は $[f(a), f(b)]$ への全射であり, 後者の場合は $[f(b), f(a)]$ への全射である.*

証明 $a \neq b$ で f は単射だから $f(a) \neq f(b)$ である. $f(a) < f(b)$ の場合は f が狭義単調増加関数であることを示す. まず, 任意の $x \in (a, b)$ に対して $f(a) < f(x) < f(b)$ である. 実際, もし $f(x) < f(a)$ ならば $f(x) < p < f(a)$ となる p に対し, 区間 $[a, x]$ において中間値の定理から $f(c) = p$ となる $c \in (a, x)$ があり, $f(x) < p < f(a) < f(b)$ でもあるから, 区間 $[x, b]$ において中間値の定理により $f(d) = p$ となる $d \in (x, b)$ がある. $f(c) = f(d) = p$ であるが, $c < x < d$ であるため, これは f が単射であることに矛盾する. $f(x) > f(b)$ としても, 同様に矛盾が生じるため, $x \in (a, b)$ ならば $f(a) < f(x) < f(b)$ である.

$a \leqq x < y \leqq b$ のとき, 上の結果から $f(a) < f(y)$ だから, 区間 $[a, y]$ に対して上の結果を用いると $f(x) < f(y)$ が得られ f は狭義単調増加関数である.

$f(a) < f(b)$ の場合は f の代りに $-f$ を考えれば上の場合に帰着して, $-f$ は狭義単調増加関数になるため, f は狭義減少増加関数である. 後半の主張は中間値の定理から明らかである. □

系 4.5 *I を区間 (すなわち I は (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $\boldsymbol{R}$ のいずれか) とするとき, 連続関数 $f : I \to \boldsymbol{R}$ が単射ならば f は狭義単調増加関数であるか, または狭義減少増加関数である.*

証明 $c, d \in I$, $c < d$ とすると定理 4.4 により, f は閉区間 $[c, d]$ において狭義単調増加関数か狭義減少増加関数のいずれかである. 後者の場合は, $-f$ を考えることにより, 前者の場合に帰着できる. 前者の場合, $x, y \in I$, $x < y$ に対し, c と x の小さい方を p, d と y の大きい方を q とすれば, f の閉区間 $[p, q]$ への制限は狭義単調増加関数か狭義減少増加関数のいずれかであり, $[c, d] \subset [p, q]$ だから f は閉区間 $[p, q]$ において, 狭義単調増加関数となる. このとき $x, y \in [p, q]$ だから $f(x) < f(y)$ となり, f は狭義単調増加関数である. □

定理 4.6 区間 I で定義された連続関数 $f: I \to J$ が全単射ならば逆関数 $f^{-1}: J \to I$ も連続関数である.

証明 系 4.5 により f は狭義単調増加関数か狭義減少増加関数のいずれかである. 後者の場合は, $-f$ を考えることにより, 前者の場合に帰着できるので, 前者の場合について考える. 任意の $p \in J$ をとり, $q = f^{-1}(p)$ とおく. $[q-r, q] \subset I$ となる $r > 0$ があるとき, f は単調増加関数だから, 区間 $[q-r, q]$ を $[f(q-r), p]$ の上に 1 対 1 に写す. 従って, 任意の $0 < \varepsilon < r$ に対し, f^{-1} は $(f(q-\varepsilon), p]$ を $(q-\varepsilon, q]$ の上に 1 対 1 に写すため, $\delta = p - f(q-\varepsilon)$ とおけば「$p - \delta < x \leqq p$ ならば $q - \varepsilon < f^{-1}(x) \leqq q$」が成り立つ. 同様にして $[q, q+r] \subset I$ となる $r > 0$ があるとき, $\delta = f(q+\varepsilon) - p$ とおけば「$p \leqq x < p + \delta$ ならば $q \leqq f^{-1}(x) < q + \varepsilon$」が成り立つ. 故に, f^{-1} は p において連続である. □

定理 4.7 $f: (a,b) \to (c,d)$ は連続な全単射で, p において微分可能であるとする. $f'(p) \neq 0$ ならば f の逆関数 $f^{-1}: (c,d) \to (a,b)$ は $f(p)$ で微分可能であり, $(f^{-1})'(f(p)) = \dfrac{1}{f'(p)}$ が成り立つ.

証明 (a,b) で定義された関数 F を $F(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(p)}{t-p} & t \neq p \\ f'(p) & t = p \end{cases}$ によって定める. f^{-1} は単射だから, $x \neq f(p)$ ならば $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(f(p)) = p$ であるため $F(f^{-1}(x)) = \dfrac{f(f^{-1}(x)) - f(p)}{f^{-1}(x) - p} = \dfrac{x - f(p)}{f^{-1}(x) - f^{-1}(f(p))}$ が成り立つ. 従って $x \neq f(p)$ ならば次の等式が得られる.

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(f(p))}{x - f(p)} = \frac{1}{F(f^{-1}(x))} \cdots (1)$$

定理 4.6 より f^{-1} は $f(p)$ で連続だから $\displaystyle\lim_{x \to f(p)} f^{-1}(x) = f^{-1}(f(p)) = p$ が成り立つ. 一方 f は p で微分可能だから $\displaystyle\lim_{t \to p} F(t) = \lim_{t \to p} \frac{f(t) - f(p)}{t - p} = f'(p) = F(p)$ となるため, 教科書の定理 2.3 によって

$$\lim_{x \to f(p)} F(f^{-1}(x)) = F(p) = f'(p) \cdots (2)$$

が成り立つ. (1), (2) と仮定から $F(p) = f'(p) \neq 0$ だから, 教科書の定理 2.2 の (3) を用いれば,

$$\lim_{x \to f(p)} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(f(p))}{x - f(p)} = \lim_{x \to f(p)} \frac{1}{F(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(p)}$$

であるため, 主張が示された. □

系 4.8 関数 $f: (a,b) \to (c,d)$, $g: (a,b) \to \boldsymbol{R}$ はともに p において微分可能であるとする. さらに f は連続な全単射で, $f'(p) \neq 0$ が成り立つとき, f の逆関数 $f^{-1}: (c,d) \to (a,b)$ と $g: (a,b) \to \boldsymbol{R}$ の合成関数は $g \circ f^{-1}$ は $f(p)$ で微分可能であり, $f(p)$ における微分係数は $\dfrac{g'(p)}{f'(p)}$ である.

証明 定理 4.2, 4.7 から $(g \circ f^{-1})'(f(p)) = g'(f^{-1}(f(p)))(f^{-1})'(f(p)) = g'(p)\dfrac{1}{f'(p)} = \dfrac{g'(p)}{f'(p)}$ である. □

5 テイラーの定理

与えられた関数の 1 次関数を用いた近似より精密な n 次関数による近似を考えることが, 次に述べるテイラーの定理である. 以後, f は開区間 (a,b) で定義された n 回微分可能な関数で, p を開区間 (a,b) の点とする. このとき, テイラーの定理は次のように述べられる.

定理 5.1 開区間 (a,b) の任意の点 x に対し, x と p の間の点 c で次の等式を満たすものがある.

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

定理の式の右辺の最後の項 $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$ を剰余項という. この定理の証明は後ほど行うとして, まずテイラーの定理を用いて次の結果を示す.

定理 5.2 f の n 次導関数 $f^{(n)}$ が p において連続ならば, 次の等式が成り立つ.

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\left(f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right)}{(x-p)^n}=0$$

証明 テイラーの定理から, 各 x に対して x と p の間の点 c_x で次の等式を満たすものがある.

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-p)^n$$

この右辺を示すべき等式の左辺の $f(x)$ に代入すれば

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\left(f(p)+\cdots+\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right)}{(x-p)^n}=\lim_{x\to p}\frac{f^{(n)}(c_x)-f^{(n)}(p)}{n!}.$$

ここで, c_x はつねに x と p の間にあるため x が p に近づけば, c_x も p に近づく. 従って, $f^{(n)}$ の p における連続性から, $\lim\limits_{x\to p}f^{(n)}(c_x)=f^{(n)}(p)$ となるため, 上式の右辺は 0 になることがわかる. □

$m<n$ ならば $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{(x-p)^n}{(x-p)^m}=0$ だから, x を p に近づけたとき $(x-p)^n$ は $(x-p)^m$ よりも「速く」0 に近づく関数である. その意味では, n が大きければ大きいほど, 多項式

$$f(p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

は x が p の近くでの $f(x)$ のより精密な近似であるといえる.

定理 5.3 f の n 次導関数 $f^{(n)}$ が p において連続であり, 実数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ が

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\left(a_0+a_1(x-p)+\cdots+a_k(x-p)^k+\cdots+a_n(x-p)^n\right)}{(x-p)^n}=0$$

を満たすならば, $k=0,1,2,\dots,n$ に対して $a_k=\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}$ である.

証明 仮定から, $0\leqq i\leqq n$ ならば

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-p)^k}{(x-p)^i}=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-p)^k}{(x-p)^n}(x-p)^{n-i}=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-p)^k}{(x-p)^n}\lim_{x\to p}(x-p)^{n-i}=0$$

が成り立つ. 一方

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-p)^k}{(x-p)^i}&=\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{i-1}a_k(x-p)^k}{(x-p)^i}-a_i+\sum_{k=i+1}^{n}a_k(x-p)^{k-i}\right)\\&=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{i-1}a_k(x-p)^k}{(x-p)^i}-a_i\end{aligned}$$

となるため, 上式から

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k (x-p)^k}{(x-p)^i} = a_i \quad \cdots (*)$$

が $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つことがわかる. $(*)$ において, とくに $n = 0$ とすれば, f の p における連続性から $f(p) = a_0$ が得られる. 帰納的に $k = 0, 1, 2, \ldots, i-1$ $(i \leqq n)$ に対して $a_k = \dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}$ が成り立つと仮定する. テイラーの定理から $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \frac{f^{(i)}(c_x)}{i!}(x-p)^i$ を満たす c_x が x と p の間にあるため, $(*)$ と帰納法の仮定から $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f^{(i)}(c_x)}{i!} = a_i$ が成り立つ. c_x は x と p の間にあるため, x が p に近づくとき, c_x は p に近づくことに注意すれば, $f^{(i)}$ の p における連続性から $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f^{(i)}(c_x)}{i!} = \frac{f^{(i)}(p)}{i!}$ である. 故に $k = i$ のときも, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}$ が成り立つため, 帰納法が進む. □

定理 5.2, 5.3 により, $f^{(n)}$ が p において連続であるという仮定のもとでは, 実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - \bigl(a_0 + a_1(x-p) + \cdots + a_k(x-p)^k + \cdots + a_n(x-p)^n\bigr)}{(x-p)^n} = 0$$

を満たすことと, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_k = \dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}$ が成り立つことは同値である.

系 5.4 定理 *5.2* の仮定のもとで, f が $x \to p$ のときに n 位の無限小であるためには, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $f^{(k)}(p) = 0$ かつ $f^{(n)}(p) \neq 0$ が成り立つことが必要十分である.

証明 f が $x \to p$ のときに n 位の無限小であるとき, $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{(x-p)^n} = L$ とおくと, $L \neq 0$ であり,

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - \bigl(0 + 0(x-p) + \cdots + 0(x-p)^{n-1} + L(x-p)^n\bigr)}{(x-p)^n} = \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x)}{(x-p)^n} - L \right) = 0$$

だから, 定理 5.3 によって, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!} = 0$ であり, $\dfrac{f^{(n)}(p)}{n!} = L$ が成り立つ. 故に $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $f^{(k)}(p) = 0$ かつ $f^{(n)}(p) = Ln! \neq 0$ である.

逆に $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $f^{(k)}(p) = 0$ かつ $f^{(n)}(p) \neq 0$ が成り立つならば, 定理 5.2 から

$$\lim_{x \to p} \left(\frac{f(x)}{(x-p)^n} - \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \right) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n}{(x-p)^n} = 0$$

だから $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{(x-p)^n} = \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \neq 0$ となって, f が $x \to p$ のときに n 位の無限小であることがわかる. □

6 平均値の定理

テイラーの定理を証明するために「コーシーの平均値の定理」と呼ばれる定理を用いるが, この定理を示すために以下で準備を行う.

定義 6.1 $X, Y \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to Y$ を関数, $p \in X$ とする. 正の実数 r で, 「$x \in (p-r, p+r) \cap X$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」を満たすものがあるとき, f は p において極大であるといい, $f(p)$ を f の極大値という. また, 正の実数 r で, 「$x \in (p-r, p+r) \cap X$ ならば $f(x) \geqq f(p)$」を満たすものがあるとき, f は p において極小であるといい, $f(p)$ を f の極小値という.

f の最大値は f の極大値であり, f の最小値は f の極小値である. 次の結果は高校でも学んだ.

命題 6.2 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ が $p\in(a,b)$ において微分可能で, しかも極大または極小であるとき, $f'(p)=0$ である.

証明 f が p において極大ならば正の実数 r で, $r<p-a,b-p$ かつ「$x\in(p-r,p+r)$ ならば $f(x)\leqq f(p)$」を満たすものがある. また, f は p で微分可能だから

$$f'(p)=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=\lim_{x\to p-0}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=\lim_{x\to p+0}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\ \cdots\ (1)$$

が成り立つ. 一方, $x\in(p-r,p)$ ならば $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\geqq 0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to p-0}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\geqq 0\ \cdots\ (2)$ であり, $x\in(p,p+r)$ ならば $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\leqq 0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to p+0}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\leqq 0\ \cdots\ (3)$ である. 従って (1) と (2) から $f'(p)\geqq 0$ であり, (1) と (3) から $f'(p)\leqq 0$ だから $f'(p)=0$ である. f が p において極小の場合も同様にして $f'(p)=0$ が示される.□

「中間値の定理」と並んで次の定理は連続関数についての基本的な定理であり, この定理は「上に有界な単調増加数列は収束する.」という「実数の連続性」を用いて示される.

定理 6.3 *(最大値・最小値の定理)* 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ は最大値と最小値を持つ.

まず, 平均値の定理の特別な場合である「ロルの定理」と呼ばれる次の定理を示す.

定理 6.4 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f が (a,b) の各点で微分可能なとき, $f(a)=f(b)$ ならば $f'(c)=0$ となる $c\in(a,b)$ がある.

証明 最大値・最小値の定理により f は最大値と最小値をとる. f の最大値, 最小値をそれぞれ $f(p)$, $f(q)$ $(p,q\in[a,b])$ とすれば, $f(q)\leqq f(a)=f(b)\leqq f(p)$ だから, 以下の場合が考えられる.

(1) $f(p)>f(a)=f(b)$ の場合, $p\neq a,b$ だから f は p において微分可能である. 従って命題 6.2 により $f'(p)=0$ となるため, $c=p$ とすればよい.

(2) $f(q)<f(a)=f(b)$ の場合, $q\neq a,b$ だから f は q において微分可能である. 従って命題 6.2 により $f'(q)=0$ となるため, $c=q$ とすればよい.

(3) $f(q)=f(a)=f(b)=f(p)$ の場合, f は定数値関数にだから, 任意の $c\in(a,b)$ に対して $f'(c)=0$ である. □

この定理は「コーシーの平均値の定理」と呼ばれる次の定理に一般化される.

定理 6.5 $f,\ g$ を閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数で, 開区間 (a,b) の各点で微分可能であるとする. さらに $g(b)\neq g(a)$ であり, (a,b) のすべての点 x に対して $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがないならば, 次の等式を満たす $c\in(a,b)$ がある.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

証明 関数 $F:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を $F(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$ で定めれば, F は定理 6.4 の条件を満たすため, $F'(c)=0$ となる $c\in(a,b)$ がある. 一方 $F'(x)=(f(b)-f(a))g'(x)-(g(b)-(a))f'(x)$ だから, $F'(c)=0$ より次の等式を得る.

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)\ \cdots(*)$$

もし, $g'(c)=0$ ならば, $g(b)-g(a)\neq 0$ だから $(*)$ より $f'(c)=0$ となって仮定に反する. 従って, $g'(c)\neq 0$ となり, $(*)$ の両辺を $(g(b)-g(a))g'(c)$ で割れば, 示すべき等式が得られる. □

上の定理において, とくに g が $g(x)=x$ で与えられる関数の場合を考えると, 次の「平均値の定理」が得られる.

系 6.6 *(平均値の定理)* $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ が連続関数で, (a,b) の各点で微分可能なとき, $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ となる $c\in(a,b)$ がある.

以上の準備のもとで, テイラーの定理の証明を行う.

f を開区間 (a,b) で定義された n 回微分可能な関数, p を開区間 (a,b) の点とする. 関数 F を

$$F(x)=f(x)-\left(f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1}\right)\ \cdots(*)$$

により定義する. このとき, F の m 次導関数 $(m=0,1,\ldots,n-1)$ は

$$F^{(m)}(x)=f^{(m)}(x)-\left(f^{(m)}(p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{(k-m)!}(x-p)^{k-m}+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-m-1)!}(x-p)^{n-m-1}\right)$$

となり, F の n 次導関数は $F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$ である. とくに

$$F(p)=F'(p)=\cdots=F^{(m)}(p)=\cdots=F^{(n-1)}(p)=0$$

が成り立つことに注意する.

F と $(x-p)^n$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると x と p の間の実数 c_1 で次の等式 (1) を満たすものがある.

$$\frac{F(x)}{(x-p)^n}=\frac{F(x)-F(p)}{(x-p)^n-(p-p)^n}=\frac{F'(c_1)}{n(c_1-p)^{n-1}}\ \cdots(1)$$

同様に, F' と $(x-p)^{n-1}$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると c_1 と p の間の実数 c_2 (よって c_2 は x と p の間にある) で次の等式 (2) を満たすものがある.

$$\frac{F'(c_1)}{(c_1-p)^{n-1}}=\frac{F'(c_1)-F'(p)}{(c_1-p)^{n-1}-(p-p)^{n-1}}=\frac{F''(c_2)}{(n-1)(c_2-p)^{n-2}}\ \cdots(2)$$

これを繰り返して, 帰納的に x と p の間にある実数 $c_1,c_2,\ldots,c_m$ $(m=1,2,\ldots,n-1)$ で, $k=1,2,\ldots,m$ に対して次の等式 (k) を満たすものが得られたとする. (ただし $c_0=x$ とする)

$$\frac{F^{(k-1)}(c_{k-1})}{(c_{k-1}-p)^{n-k+1}}=\frac{F^{(k)}(c_k)}{(n-k+1)(c_k-p)^{n-k}}\ \cdots(k)$$

$F^{(m)}$ と $(x-p)^{n-m}$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると c_m と p の間の実数 c_{m+1} (よって c_{m+1} は x と p の間にある) で次の等式 $(m+1)$ を満たすものがある.

$$\frac{F^{(m)}(c_m)}{(c_m-p)^{n-m}}=\frac{F^{(m)}(c_m)-F^{(m)}(p)}{(c_m-p)^{n-m}-(p-p)^{n-m}}=\frac{F^{(m+1)}(c_{m+1})}{(n-m)(c_{m+1}-p)^{n-m-1}}\ \cdots(m+1)$$

従って, m による帰納法で, x と p の間にある実数 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ で, $k=1,2,\ldots,n$ に対して上の等式 (k) を満たすものがある. これらの等式から

$$\frac{F(x)}{(x-p)^n}=\frac{F'(c_1)}{n(c_1-p)^{n-1}}=\cdots=\frac{F^{(k)}(c_k)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(c_k-p)^{n-k}}=\cdots=\frac{F^{(n)}(c_n)}{n!}$$

となるため, $c=c_n$ とおくと,

$$F(x)=\frac{F^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

を満たす c が x と p の間にある. この等式の左辺に, $F(x)$ を定義した式 $(*)$ を代入すれば,

$$f(x)-\left(f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1}\right)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

となり, 左辺の括弧でくくられた部分を右辺に移項すれば, テイラーの定理の等式が得られる.

7　テイラーの定理の応用例

まず, 基本的な関数 $(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$, e^x, $\sin x$, $\cos x$ の n 次導関数が次で与えられることを思い出しておく.

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \qquad ((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$(\log(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$$

従って, これらの $x=0$ における値は

$$(e^x)^{(n)}(0) = 1, \quad ((1+x)^\alpha)^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \quad (\log(1+x))^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$(\sin x)^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & n \text{ は偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ は奇数} \end{cases}, \quad (\cos x)^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases}$$

で与えられる. これらの関数に対し, $p=0$ として定理 5.1 を用いると, 0 と x の間に以下の等式を満たす c がそれぞれ存在する. ただし, 2 つめの等式では, $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ を $\dbinom{\alpha}{k}$ で表し, 4 つめの等式では $n=2m+1$ の場合, 5 つめの等式では $n=2m$ の場合を考えた. また, 加法定理を用いれば

$$\sin\left(c+\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(c+\frac{(2m)\pi}{2}\right) = (-1)^m\cos c$$

が成り立つことに注意する.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c x^n}{n!} \tag{7.1}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots + \binom{\alpha}{n-1}x^{n-1} + \binom{\alpha}{n}(1+c)^{\alpha-n}x^n \tag{7.2}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+c)^n} \tag{7.3}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m\frac{(\cos c)x^{2m+1}}{(2m+1)!} \tag{7.4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + (-1)^m\frac{(\cos c)x^{2m}}{(2m)!} \tag{7.5}$$

関数 f を多項式で近似したときの誤差の評価について考える. n 回微分可能な関数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ が与えられたとき, $x, p \in (a,b)$ に対して $f(x)$ を n 次多項式

$$f(p) + f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

で近似したときの誤差は, テイラーの定理によって x と p の間の数 c を用いて

$$\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

と表される. 実数 M で, x と p の間のすべての実数 t に対して $\left|f^{(n)}(t)-f^{(n)}(p)\right| \leqq M$ を満たすものがあるとき,

$$\left|\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right| \leqq \frac{M|x-p|^n}{n!}$$

となるため, 上記の誤差は $\dfrac{M|x-p|^n}{n!}$ 以下であることがわかる. この結果を, $p=0$ で f が e^x, $(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$ の場合に用いる.

(1) $f(x)=e^x$, $p=0$ の場合, $M=|e^x-1|$ ととれるため, (3.1) から e^x を $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^k}{k!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ で近似したときの誤差は $\dfrac{|e^x-1||x|^n}{n!}$ 以下である.

(2) $f(x)=(1+x)^\alpha$ $(x>-1)$, $p=0$ の場合, $M=|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)||(1+x)^{\alpha-n}-1|$ ととれるため, (3.2) から $(1+x)^\alpha$ を $1+\binom{\alpha}{1}x+\cdots+\binom{\alpha}{k}x^k+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n$ で近似したときの誤差は $\left|\binom{\alpha}{n}\right||(1+x)^{\alpha-n}-1||x|^n$ 以下である.

(3) $f(x)=\log(1+x)$ $(x>-1)$, $p=0$ の場合, $M=(n-1)!|(1+x)^{-n}-1|$ ととれるため, (3.3) から $\log(1+x)$ を $x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ で近似したときの誤差は $\dfrac{|(1+x)^{-n}-1||x|^n}{n}$ 以下である.

(4) $f(x)=\sin x$, $p=0$ の場合, $M=2$ ととれるため, (3.4) から $\sin x$ を $x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$ で近似したときの誤差は $\dfrac{2|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$ 以下である.

(5) $f(x)=\cos x$, $p=0$ の場合, $M=2$ ととれるため, (3.5) から $\cos x$ を $1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$ で近似したときの誤差は $\dfrac{2|x|^{2m}}{(2m)!}$ 以下である.

補題 2.1 から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ だから, 上の (1), (4), (5) の誤差は, 近似する x の多項式の次数を大きくすれば, 0 に近づいてゆくことがわかる. また, $\dfrac{|(1+x)^{-n}-1||x|^n}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\left(\left(\dfrac{|x|}{1+x}\right)^n+|x|^n\right)$ であり, $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ ならば $0\leqq\dfrac{|x|}{1+x}\leqq 1$ だから, $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき (3) の誤差は n を大きくすれば 0 に近づいてゆく. (実は, $|x|\leqq 1$ ならば (3) のように近似を行った誤差は 0 に近づくことが示される.) 上の (2) の場合, n を大きくしたときの誤差の様子を以下で調べてみる.

補題 7.1 実数 α に対し $|x|<1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=0$ である.

証明 $x=0$ の場合は主張は明らかだから, $x\neq 0$ と仮定する. また, α が 0 以上の整数ならば, $n>\alpha$ のとき $\binom{\alpha}{n}=0$ となるため, この場合も主張が成り立つ. そこで α は 0 以上の整数ではない場合を考える. このとき, 任意の自然数 n に対して $\binom{\alpha}{n}\neq 0$ である. そこで $a_n=\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right|$ とおけば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正の実数からなる数列であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha-n||x|}{n+1}=|x|<1$ となるため, ダランベールの判定法より, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する. 故に教科書の定理 1.5 の (1) から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right|=\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である. 従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=0$ である. □

$-\dfrac{1}{2}<x<1$ ならば $0\leqq\dfrac{|x|}{1+x}<1$ であり, $\left|\binom{\alpha}{n}\right||(1+x)^{\alpha-n}-1||x|^n\leqq(1+x)^\alpha\left|\binom{\alpha}{n}\right|\left(\dfrac{|x|}{1+x}\right)^n+\left|\binom{\alpha}{n}\right||x|^n$ であることに注意すれば, 補題 7.1 から $-\dfrac{1}{2}<x<1$ のとき (2) の誤差は n を大きくすれば 0 に近づいてゆく. (実は, $|x|<1$ ならば (2) のように近似を行った誤差は 0 に近づくことが示される.) この結果を用いて, 与えられた正の実数 A の m 乗根の近似値とその誤差を見積もってみる.

$\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を近似する多項式は $-\dfrac{1}{2}<x<1$ の場合以外は, 上で見たように n を大きくしても (2) で見積もった誤差の範囲は狭まっていかないので, $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を近似する多項式の x に $A-1$ を代入しても $\sqrt[m]{A}$ のよい近似値が得られる保証はない.

そこで, まず $\sqrt[m]{A}=B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ となる x が $-\dfrac{1}{2}$ と 1 の間に存在するように B を定める. $\sqrt[m]{A}=B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を x について解けば $x=\dfrac{A}{B^m}-1$ となり, これを $-\dfrac{1}{2}<x<1$ に代入すれば $\dfrac{1}{2}A<B^m<2A$ が得られる. 従って

$\frac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たすような B を選び, x を $x = \frac{A}{B^m} - 1$ で定めればよい. ($|x|$ が小さいほど誤差を見積もった値は小さくなるため, $\frac{A}{B^m}$ が 1 に近くなる. すなわち B^m が A に近くなるように選べれば, よい近似値が得られる.)

ここで, $\sqrt[m]{A} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を $B\left(1 + \binom{\frac{1}{m}}{1}x + \cdots + \binom{\frac{1}{m}}{k}x^k + \cdots + \binom{\frac{1}{m}}{n}x^n\right)$ で近似したときの誤差は (2) により $B\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\right||x|^n$ 以下である. $\frac{1}{2}A < B^m < A$ ならば $0 < x < 1$ となるため, $(1+x)^{-n} < (1+x)^{\frac{1}{m}-n} < 1$ だから $\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\right| < 1 - \frac{1}{(1+x)^n}$ である. また, $A < B^m < 2A$ ならば $-\frac{1}{2} < x < 0$ となるため, $1 < (1+x)^{\frac{1}{m}-n} < (1+x)^{-n}$ だから, $\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\right| < \frac{1}{(1+x)^n} - 1$ である. 従って, いずれの場合でも $B\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\right||x|^n < B\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|\frac{1}{(1+x)^n} - 1\right||x|^n$ となって, 次のことがわかる.

命題 7.2 正の実数 A に対し, $\frac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たす B を選んで, $x = \frac{A}{B^m} - 1$ とおくとき, $\sqrt[m]{A}$ を $B\left(1 + \binom{\frac{1}{m}}{1}x + \cdots + \binom{\frac{1}{m}}{k}x^k + \cdots + \binom{\frac{1}{m}}{n}x^n\right)$ で近似すれば, 誤差は $B\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|\frac{1}{(1+x)^n} - 1\right||x|^n$ 以下である.

例題 7.3 上の方法で $B = 1.4$ としたとき, $\sqrt{2}$ を小数第 5 位まで求めるのに必要な x の多項式の次数を求めよ.

解答 $x = \frac{A}{B^2} - 1 = \frac{1}{49}$ より, 上の結果から $\sqrt{2}$ を $B\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k\right)$ で近似すれば, 誤差は $\frac{7}{5}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|\left(\frac{1}{49^n} - \frac{1}{50^n}\right)$ 以下である. $n = 2$ ならば, この値は $\frac{495}{336140000} = 0.0000014\cdots$ となる. 一方 $x = \frac{1}{49}$ ならば $\frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)$ の値は $1.4142128\cdots$ となり, $\sqrt{2}$ はこの値のプラスマイナス 0.0000015 の範囲 $1.4142113 < \sqrt{2} < 1.4142143$ にある. よって, $\sqrt{2}$ の小数第 5 位までは 1.41421 と確定できるため, 必要な x の多項式の次数は 2 である. □

テイラーの定理のもう一つの応用として「ニュートン法」と呼ばれる, 漸化式を用いて方程式の近似解を求める方法を述べる.

補題 7.4 関数 $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ は *2* 回微分可能であるとし, $x, \alpha \in (a,b)$ は $f'(x) \neq 0$, $f(\alpha) = 0$ を満たし, さらに正の定数 M で, 任意の $0 < \theta < 1$ に対して $|f''(\alpha + \theta(x-\alpha))| \leqq M$ が成り立つようなものが存在するとする. このとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\left|x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha\right| \leqq \frac{M}{2|f'(x)|}|x-\alpha|^2$$

証明 テイラーの定理より $0 < \theta < 1$ で, $f(x) + f'(x)(\alpha - x) + \frac{f''(\alpha + \theta(x-\alpha))}{2}(\alpha - x)^2 = f(\alpha) = 0$ を満たすものがある. これより $\left|x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha\right| = \left|\frac{f''(\alpha + \theta(x-\alpha))}{2f'(x)}\right||\alpha - x|^2 \leqq \frac{M}{2|f'(x)|}|x-\alpha|^2$ を得る. □

命題 7.5 関数 $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ は *2* 回微分可能であるとし, $\alpha \in (a,b)$ は $f(\alpha) = 0$ を満たすとする. 漸化式 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ によって帰納的に定まる数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, 実数 p, q と正の定数 L, M で, 次の条件を満たすものがあるとする.

(1) $a \leqq p \leqq \alpha \leqq q \leqq b$, $p < q$ であり, 任意の $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $p \leqq x_n \leqq q$ かつ $a < x_n < b$.

(2) 任意の $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $|f'(x_n)| \geqq L$.

(3) $x \in (p,q)$ ならば $|f''(x)| \leqq M$.

このとき, 任意の $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $|x_n - \alpha| \leqq \frac{2L}{M}\left(\frac{M|x_0 - \alpha|}{2L}\right)^{2^n}$ が成り立つ. 従って $|x_0 - \alpha| < \frac{2L}{M}$ ならば $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は α に収束する.

証明　任意の n に対し, x_n と α の間の数は, 条件 (1) によって, 区間 (p,q) に含まれるため, 条件 (2), (3) と補題 7.4 から $|x_{n+1}-\alpha| = \left|x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \alpha\right| \leqq \dfrac{M}{2|f'(x_n)|}|x_n-\alpha|^2 \leqq \dfrac{M}{2L}|x_n-\alpha|^2$ が得られる. この不等式から, k による帰納法により $|x_n-\alpha| \leqq \left(\dfrac{M}{2L}\right)^{2^k-1}|x_{n-k}-\alpha|^{2^k}$ が示されるため, とくに $k=n$ とすれば $|x_n-\alpha| \leqq \left(\dfrac{M}{2L}\right)^{2^n-1}|x_0-\alpha|^{2^n} = \dfrac{2L}{M}\left(\dfrac{M|x_0-\alpha|}{2L}\right)^{2^n}$ が得られる. □

注意 7.6 上の命題において, x_{n+1} は xy-平面における点 $(x_n, f(x_n))$ における f のグラフの接線と x-軸の交点の x-座標である. また, $|x_0-\alpha| < b-a$ だから, 上の命題より $b-a < \dfrac{2L}{M}$ ならば $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は α に収束し, $|x_n-\alpha| < \dfrac{2L}{M}\left(\dfrac{M(b-a)}{2L}\right)^{2^n}$ が成り立つ.

とくに m を 2 以上の整数, $A>0$ として $f(x)=x^m-A$ の場合, $b^m > x_0^m > A > a^m$ を満たす正の実数 a, b, x_0 を選んで, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(1-\dfrac{1}{m}\right)x_n + \dfrac{A}{mx_n^{m-1}}$ によって定まる数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考えると, この数列は単調に減少して $\sqrt[m]{A}$ に収束するため, 任意の n に対して $a < x_n \leqq x_0$ であり, $x \in (a, x_0)$ ならば $f'(x) \geqq ma^{m-1}$, $|f''(x)| \leqq m(m-1)x_0^{m-2}$ より $L = ma^{m-1}$, $M = m(m-1)x_0^{m-2}$ ととることができる. $\left|x_0 - \sqrt[m]{A}\right| < x_0 - a$ であることに注意すると, 命題 7.5 から $\sqrt[m]{A}$ を x_n で近似した誤差は

$$\frac{2L}{M}\left(\frac{M(x_0-a)}{2L}\right)^{2^n} = \frac{2a^{m-1}}{(m-1)x_0^{m-2}}\left(\frac{m-1}{2}\left(\left(\frac{x_0}{a}\right)^{m-1} - \left(\frac{x_0}{a}\right)^{m-2}\right)\right)^{2^n}$$

以下となるため, $\left(\dfrac{x_0}{a}\right)^{m-1} - \left(\dfrac{x_0}{a}\right)^{m-2} < \dfrac{2}{m-1}$ となるように a, x_0 を選べば, この誤差は急速に 0 に近づく.

上の議論から, とくに $m=2$ の場合は $a^2 < A < x_0^2 < b^2$ かつ $x_0 < 3a$ となるように a, x_0 を選べばよい.

例題 7.7 上で $A=2$ の場合, $x_0 = 1.5$, $a = 1.4$ としたとき, x_n が小数第 5 位まで $\sqrt{2}$ に一致するためには, n はいくらであればよいか答えよ.

解答　命題 7.5 により, $\sqrt{2}$ を x_n で近似した誤差は $\dfrac{14}{5}\left(\dfrac{1}{28}\right)^{2^n}$ 以下であるため, $\dfrac{14}{5}\left(\dfrac{1}{28}\right)^{2^n} < 10^{-6}$ となるには, $2^n(-\log_{10}28) + \log_{10}14 - \log_{10}5 < -6$ より $2^n > 1 + \dfrac{5}{\log_{10}28} = 4.455\cdots$ だから $n=3$ でよい. ちなみに $n=3$ のとき誤差は $\dfrac{1}{10(28)^7} = 0.0000000000074113\ldots$ 以下であり, $x_1 = \dfrac{17}{12} = 1.41666\cdots$, $x_2 = \dfrac{577}{408} = 1.4142156\cdots$, $x_3 = \dfrac{665857}{470832} = 1.4142135623746899\cdots$, $\sqrt{2} = 1.414213562373095\cdots$ で, x_3 は小数第 11 位まで $\sqrt{2}$ に一致する.□

8　微分積分学の基本定理

命題 8.1 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が積分可能ならば有界である.

証明　仮定から $[a,b]$ の分割 Δ で, Δ の任意の代表点 Ξ に対して $\left|R_{\Delta,\Xi}(f) - \displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leqq 1$ となるものがあるため $|R_{\Delta,\Xi}(f)| \leqq \left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| + 1$ である. ここで $\Delta = \{x_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$, $\Xi = \{\xi_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ とおく. もし, ある区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で f が有界でないとすると ξ_i $(i \neq k)$ をすべて固定して, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ の選び方をかえれば $|f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1}) - \left|\displaystyle\sum_{i\neq k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leqq |R_{\Delta,\Xi}(f)| \leqq \left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| + 1$ より, この左辺はいくらでも大きくなるため矛盾が生じる. 従って f は各区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で有界だから $[a,b] = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}[x_{k-1}, x_k]$ において有界である. □

定義 8.2 関数 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ に対し, 微分可能な関数 $F:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ が $F'=f$ を満たすとき, F を f の原始関数という.

定理 8.3 $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ が積分可能ならば, $c\in[a,b]$ に対し $F:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ を $F(x)=\displaystyle\int_c^x f(t)dt$ で定義すれば F は連続関数である. さらに f が $p\in(a,b)$ において連続ならば F は p において微分可能であり, $F'(p)=f(p)$ が成り立つ. 従って, f が連続関数ならば, F は f の原始関数である.

証明 命題 8.1 により, 実数 M で, すべての $x\in[a,b]$ に対して $|f(x)|\leqq M$ となるものがある. 教科書の定理 4.1 と例 4.1 から, 任意の $p\in[a,b]$ に対して

$$|F(p+h)-F(p)|=\left|\int_c^{p+h} f(t)dt-\int_c^p f(t)dt\right|=\left|\int_p^{p+h} f(t)dt\right|\leqq\left|\int_p^{p+h}|f(t)|dt\right|\leqq\left|\int_p^{p+h}Mdt\right|=|h|M.$$

従って $h\to 0$ のとき $F(p+h)\to F(p)$ となるため, F は p で連続である.

f は p で連続だから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ で $(p-\delta,p+\delta)\subset[a,b]$ かつ「$|t-p|<\delta$ ならば $|f(t)-f(p)|<\varepsilon$」を満たすものがとれる. $|h|<\delta$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(p+h)-F(p)}{h}-f(p)\right|&=\left|\frac{1}{h}\left(\int_c^{p+h} f(t)dt-\int_c^p f(t)dt-\int_p^{p+h} f(p)dt\right)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_p^{p+h}(f(t)-f(p))dt\right|\\&\leqq\left|\frac{1}{h}\int_p^{p+h}|f(t)-f(p)|dt\right|\leqq\left|\frac{1}{h}\int_p^{p+h}\varepsilon dt\right|=\varepsilon\end{aligned}$$

より $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(p+h)-F(p)}{h}=f(p)$ である. □

系 8.4 $f,F:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. F は (a,b) の各点 x で微分可能であり, $F'(x)=f(x)$ が成り立てば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ である.

証明 $G(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ で $G:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ を定めれば定理 8.3 から, 任意の $x\in(a,b)$ に対して $G'(x)=f(x)=F'(x)$ である. 従って教科書の定理 3.6 により, $G-F$ は定数値関数となるため, $G(b)-F(b)=G(a)-F(a)$ が成り立つ. このことと $G(a)=0$ より $\displaystyle\int_a^b f(t)dt=G(b)=G(b)-G(a)=F(b)-F(a)$. □

微分積分学の基本定理を用いずに, 関数の積分を求めることは, 次の例題でみるように基本的な関数 x^k の場合のように, 難しいことが多い.

例題 8.5 k を正の整数, a を正の実数とするとき, 区間 $[0,a]$ を n 等分する分割を考えることによって, $\displaystyle\int_0^a x^k dx$ を積分の定義に従って計算せよ.

解答 まず少し準備をする. $x^{[k]}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ $(k=1,2,\dots)$ とおくと $x^k-x^{[k]}$ は, 定数項を含まない x の $n-1$ 次の整数係数の多項式だから k による帰納法で, $x^k=x^{[k]}+\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}a_{kj}x^{[j]}$ と満たす整数 a_{kj} があることが分かる. また, $(x+1)^{[k+1]}-x^{[k+1]}=(k+1)x^{[k]}$ だから, この両辺に $x=1,2,\dots,n$ を代入して辺々加えれば, $1^{[k+1]}=0$ より $\displaystyle\sum_{i=1}^n i^{[k]}=\frac{1}{k+1}(n+1)^{[k+1]}$ を得る. 従って $\displaystyle\sum_{i=1}^n i^k=\sum_{i=1}^n i^{[k]}+\sum_{j=1}^{k-1}a_{kj}\sum_{i=1}^n i^{[j]}=\frac{1}{k+1}(n+1)^{[k+1]}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a_{kj}}{j+1}(n+1)^{[j+1]}$ となるため $\displaystyle\sum_{i=1}^n i^k$ は n の $k+1$ 次多項式で, n^{k+1} の係数は $\dfrac{1}{k+1}$ である. 故に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^n i^k=\frac{1}{k+1}$ だから $\displaystyle\int_0^a x^k dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{a}{n}\left(\frac{ai}{n}\right)^k=a^{k+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^n i^k=\frac{a^{k+1}}{k+1}$. □

9　整級数について

定義 9.1 A を $\boldsymbol{R}$ の部分集合とする.

(1) 実数 K で, 条件「$x \in A$ ならば $x \leqq K$」を満たすものを, A の上界と呼び, A の上界が存在するとき, A は上に有界であるという. また, 実数 L で, 条件「$x \in A$ ならば $x \geqq L$」を満たすものを, A の下界と呼び, A の下界が存在するとき, A は下に有界であるという.

(2) A が上に有界であるとき, A の上界全体からなる集合の最小元を A の上限と呼んで, $\sup A$ で表す. また, A が下に有界であるとき, A の下界全体からなる集合の最大元を A の下限と呼んで, $\inf A$ で表す.

定理 9.2 $\boldsymbol{R}$ の空でない部分集合 A が上に有界ならば、A は上限をもつ.

証明 A の上界全体からなる集合を B として, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように帰納的に定める. まず $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ を一つずつ選ぶ. $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ が, 条件 $a_i \in A$, $b_i \in B$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$, $b_i - a_i \leqq 2^{-i+1}(b_1 - a_1)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を満たすように選べたと仮定する.

$\dfrac{a_n + b_n}{2} \in B$ の場合は $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ と定めれば, $a_{n+1} \in A$, $b_{n+1} \in B$ であり, $b_n \in B$ だから $a_n \leqq b_n$ となっているため, $b_n \geqq b_{n+1}$ である. さらに, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leqq 2^{-n}(b_1 - a_1)$ も成り立つ.

$\dfrac{a_n + b_n}{2} \notin B$ の場合は A の要素で, $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ より大きなものがある. その一つを a_{n+1} として $b_{n+1} = b_n$ と定めれば, $a_{n+1} \in A$, $b_{n+1} \in B$ であり, $b_n \in B$ だから $a_n \leqq b_n$ となっているため, $a_n \leqq \dfrac{a_n + b_n}{2} < a_{n+1}$ である. さらに, $b_{n+1} - a_{n+1} < b_n - \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leqq 2^{-n}(b_1 - a_1)$ も成り立つ.

以上から, すべての項が A に属する単調増加数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とすべての項が B に属する単調減少数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, 任意の n に対して $b_n - a_n \leqq 2^{-n+1}(b_1 - a_1)$ を満たすものがある. すべての n に対して $a_1 \leqq a_n \leqq b_n \leqq b_1$ が成り立つため, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であり, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界である. 故に連続性の公理によって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに収束する. そこで $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とおけば, 不等式 $b_n - a_n \leqq 2^{-n+1}(b_1 - a_1)$, $a_n \leqq b_n$ より, それぞれ $\beta - \alpha \leqq 0$, $\alpha \leqq \beta$ を得るため, $\alpha = \beta$ であることがわかる.

任意の $x \in A$ と自然数 n に対し, $b_n \in B$ だから $x \leqq b_n$ が成り立つ. この不等式で $n \to \infty$ とすれば, $x \leqq \beta = \alpha$ が得られるため, $\alpha \in B$ であることがわかる. もし α より小さな B の要素 γ が存在すれば, $a_n \leqq \gamma$ が任意の自然数 n に対して成り立つため, $n \to \infty$ とすれば, $\alpha \leqq \gamma$ が得られて, γ が α より小さいことと矛盾する. 従って, α より小さい B の要素は存在しないため, α は B の最小元, すなわち, α は A の上限である. □

定理 9.3 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について, 以下の三つのうち一つが成り立つ.

(1) 任意の実数 x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する.

(2) 正の実数 ρ で, 条件「$|x| < \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束し, $|x| > \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する.」を満たすものがある.

(3) $x \neq 0$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する.

証明 明らかに, (1), (2), (3) のうちのどの二つも同時に成り立たない. (1) と (3) が成り立たない場合に (2) が成り立つことを示す. (3) が成り立たないことから, 0 でない実数 r で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ が収束するものがあるため, 教科書の定理 3.12 から, $|x| < |r|$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する. そこで, 正の実数の部分集合 S を次のように定める.

$$S = \left\{ s \in \boldsymbol{R} \,\middle|\, |x| < s \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は絶対収束する.} \right\}$$

このとき $|r| \in S$ だから S は空集合ではない. また, (1) が成り立たないことから, S に属さない正の実数 d がある. もし $s_0 > d$ である S の要素 s_0 が存在すれば, $|d| = d < s_0$ だから $\sum_{n=0}^{\infty} a_n d^n$ は絶対収束するため, 教科書の定理 3.12 から, $|x| < d$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する. このことは, d が S に属さないことに矛盾する. 故に, 任意の $s \in S$ に対して $s \leqq d$ となるため, S は上に有界な空でない $\boldsymbol{R}$ の部分集合である.

定理 9.2 によって S は上限をもつため, それを ρ とおく. $|x| < \rho$ ならば $\dfrac{|x|+\rho}{2} < \rho$ であり, ρ は S の上限であることから $\dfrac{|x|+\rho}{2} < s \leqq \rho$ を満たす $s \in S$ が存在する. さらに $|x| < \dfrac{|x|+\rho}{2} < s$ だから $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する. 故に, 「$|x| < \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する.」ことが示せた.

$|x_0| > \rho$ を満たす実数 x_0 で, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束するものが存在すると仮定する. このとき教科書の定理 3.12 によって, $|x| < |x_0|$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束するため, $|x_0| \in S$ となって, $|x_0| > \rho$ は ρ が S の上界であることと矛盾する. 従って, $|x| > \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する. □

定理 9.4 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ が存在するか, または正の無限大に発散するとき, この極限は整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径に一致する.

証明 $b_n = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$, $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ とおくと, 仮定から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{|x|}{\rho}$ となるため, コーシーの判定法 (定理 1.6, 注意 1.7) により $|x| < \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束し, $|x| > \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ は収束しない. もし, $|x_0| > \rho$ を満たす x_0 で, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束するものがあれば, 教科書の定理 3.12 の (1) から $\rho < |x| < |x_0|$ を満たす任意の x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束するため, 上のことと矛盾が生じる. 故に $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は ρ である. □

$|a| < 1$ ならば任意の負でない整数 k に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$ だから, 次のことがわかる.

補題 9.5 $\varphi(n)$ を n の多項式, $|a| < 1$ とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \varphi(n) a^n = 0$ である.

命題 9.6 $\varphi(n)$ を 0 でない n の多項式とするとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径と $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ の収束半径は一致する.

証明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ の収束半径を S $(0 \leqq R, S \leqq \infty)$ とする. また, $\varphi(n)$ が定数ならば, 命題の主張は明らかだから $\varphi(n)$ は 1 次以上の n の多項式であると仮定する.

$|x| < R$ のとき, $|x| < r < R$ を満たす r をとると, $\left|\dfrac{x}{r}\right| < 1$ だから補題 9.5 により $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \varphi(n) \left(\frac{x}{r}\right)^n = 0$ である. 従って,「$n > N$ ならば $\left|\varphi(n)\left(\dfrac{x}{r}\right)^n\right| < 1$」を満たす自然数 N があるため $n > N$ ならば $|a_n \varphi(n) x^n| = \left|a_n \varphi(n) \left(\dfrac{x}{r}\right)^n\right| r^n < |a_n| r^n$ である. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ は絶対収束するため, 教科書の定理 1.7 の (1) により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ も絶対収束する. 故に $S < R$ とはなり得ないため $S \geqq R$ である.

$\varphi(n)$ は 1 次以上の n の多項式だから「$n > N$ ならば $|\varphi(n)| > 1$」を満たす自然数 N がある. $|x| < S$ とすると, $n > N$ ならば $|a_n x^n| < |a_n \varphi(n) x^n|$ であり, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ は絶対収束するため, 教科書の定理 1.7 の (1) により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ も絶対収束する. 故に $R < S$ とはなり得ないため $R \geqq S$ である. 以上から $R = S$ である. □

定理 9.7 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とし, 関数 $f : (-R, R) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定める. このとき, $|x| < R$ ならば $f'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ が成り立つ.

証明 k が 2 以上の整数ならば $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}\binom{n-2}{k-2} \leqq n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ が成り立つため,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right| &= |h|\left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-2}x^{n-k}\right| \\
&\leqq |h|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|h|^{k-2}|x|^{n-k} \\
&\leqq |h|\sum_{k=2}^{n}n(n-1)\binom{n-2}{k-2}|h|^{k-2}|x|^{n-k} \\
&= n(n-1)|h|(|h|+|x|)^{n-2}.
\end{aligned}
$$

$|x| < R$ のとき, $|h| < R - |x|$ を満たす h に対し, 命題 9.6 により $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(|h|+|x|)^{n-2}$ は収束する. 一方,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty}a_n nx^{n-1}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right)\right| \\
&\leqq \sum_{n=0}^{\infty}a_n\left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right| \\
&\leqq \sum_{n=0}^{\infty}a_n n(n-1)|h|(|h|+|x|)^{n-2} \\
&= |h|\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)(|h|+|x|)^{n-2}
\end{aligned}
$$

だから $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n nx^{n-1}\right| = 0$ が得られる. □

系 9.8 整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R のとき, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定義される関数 $f : (-R, R) \to \boldsymbol{R}$ は無限回微分可能であり, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ が成り立つ.

証明 定理 9.7 により $f^{(k)}(x) = a_k k! + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$ だから $f^{(k)}(0) = a_k k!$. □

系 9.9 整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ はともに正または無限大の収束半径をもつとする. これらの整級数の収束半径以下である正の実数 δ で, $|x| < \delta$ ならば $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ となるものが存在するとき, 0 以上のすべての整数 n に対して $a_n = b_n$ が成り立つ.

定理 9.10 整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とし, 関数 $f : (-R, R) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定める. このとき, $|x| < R$ ならば $\int_0^x f(t)\,dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ が成り立つ.

証明 0 以上の任意の整数 n に対して $\left|\frac{a_n}{n+1}x^n\right| \leqq |a_n x^n|$ であり, $|x| < R$ ならば整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束するため, $|x| < R$ ならば $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^n$ も絶対収束する. 従って, この整級数を x 倍して得られる整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ も $|x| < R$ ならば 絶対収束する. そこで, 関数 $F : (-R, R) \to \boldsymbol{R}$ を $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ で定めれば, 定理 9.7 から $F'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ だから, 系 8.4 から $\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ である. □

10　関数のテイラー展開

関数 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は何回でも微分可能であると仮定する. $x,p\in(a,b)$ と任意の自然数 n に対し, テイラーの定理から x と p の間の点 $c_{n,x}$ で等式

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n+\frac{f^{(n+1)}(c_{n,x})}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$$

を満たすものがあるため, $f(x)$ を上記の多項式 $(**)$ で近似したときの誤差は

$$\frac{f^{(n+1)}(c_{n,x})}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$$

である. n を大きくしたときに, この誤差が 0 に近づくことは, 無限級数

$$f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots$$

が $f(x)$ に収束することに他ならないため, 次の定理が成り立つことがわかる.

定理 10.1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c_{n,x})}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}=0$ ならば, 次の等式が成り立つ.

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots$$

この結果をふまえて, p の近くの x に対し, $f(x)$ に収束する無限級数

$$a_0+a_1(x-p)+\cdots+a_k(x-p)^k+\cdots$$

を p における f のテイラー展開 (級数) と呼ぶ. とくに p が 0 の場合にはマクローリン展開またはマクローリン級数ともいう.

補題 10.2 実数列 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ で $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{a_0+a_1(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^n}{(x-p)^n}=0$ を満たすものは $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$ に限る.

証明 帰納的に $a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$ $(0\leqq k\leqq n)$ が示せたと仮定すれば, 仮定より

$$\lim_{x\to p}\frac{a_k+a_{k+1}(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^{n-k}}{(x-p)^{n-k}}=0\ \cdots(*)$$

が成り立つ. $k<n$ ならば $(*)$ より

$$a_k=\lim_{x\to p}(a_k+a_{k+1}(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^{n-k})=\lim_{x\to p}\frac{a_k+a_{k+1}(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^{n-k}}{(x-p)^{n-k}}(x-p)^{n-k}=0$$

である. また, $k=n$ ならば $(*)$ より明らかに $a_n=0$ である. □

命題 10.3 実数値関数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ と $p\in(a,b)$ に対し,

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(a_0+a_1(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^n)}{(x-p)^n}=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(b_0+b_1(x-p)+\cdots+b_n(x-p)^n)}{(x-p)^n}$$

を満たす実数列 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ と $b_0,b_1,\ldots,b_n$ が存在すれば $a_k=b_k$ $(k=0,1,\ldots,n)$ が成り立つ.

証明 仮定から $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{(b_0-a_0)+(b_1-a_1)(x-p)+\cdots+(b_n-a_n)(x-p)^n}{(x-p)^n}=0$ が得られるため補題 10.2 により $a_k=b_k$ $(k=0,1,\ldots,n)$ である. □

定理 5.2 と命題 10.3 から次の結果が得られる.

系 10.4 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は n 回微分可能であり, f の n 次導関数 $f^{(n)}$ が p において連続であるとする. 実数列 $a_0, a_1, \dots, a_n$ が

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(a_0+a_1(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^n)}{(x-p)^n}=0$$

を満たすならば $k=0,1,\dots,n$ に対して $a_k=\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}$ である.

11 テイラーの定理再考

定理 11.1 関数 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は n 回微分可能で, n 次導関数 $f^{(n)}:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ が連続ならば, $x,p\in(a,b)$ に対して次の等式が成り立つ.

$$f(x)=f(p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1}+\frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt$$

証明 n による帰納法で主張を示す. 微分積分学の基本定理により $f(x)=f(p)+\displaystyle\int_p^x f'(t)dt$ となるため, $n=1$ のとき主張は正しい. $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt$ が成り立つとすれば, 部分積分法により,

$$\int_p^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt=\int_p^x\left(-\frac{1}{n}(x-t)^n\right)'f^{(n)}(t)dt=\frac{1}{n}(x-p)^nf^{(n)}(p)+\frac{1}{n}\int_p^x (x-t)^nf^{(n+1)}(t)dt$$

となるため, これを上の等式に代入すれば $n+1$ のときも主張が正しいことがわかる. □

$\displaystyle\int_p^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(p)dt=\frac{f^{(n)}(p)}{n}(x-p)^n$ だから, 上の定理より,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1}\left(f^{(n)}(t)-f^{(n)}(p)\right)dt$$

が成り立つため, $f(x)$ を x の多項式 $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$ で近似したときの誤差は次で与えられる.

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1}\left(f^{(n)}(t)-f^{(n)}(p)\right)dt \tag{11.1}$$

$p=0$, $f(x)=(1+x)^\alpha$ $(\alpha\neq 0,1)$ の場合に, この誤差 (11.1) を評価する. $f^{(n)}(t)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(1+t)^{n-\alpha}}$ より

$$\left|\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\left(f^{(n)}(t)-f^{(n)}(0)\right)dt\right|=\left|n\binom{\alpha}{n}\int_0^x\left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}-(x-t)^{n-1}\right)dt\right| \tag{11.2}$$

$-1<x<0$ ならば, 任意の $x\leqq t\leqq 0$ に対して $x\leqq\dfrac{x-t}{1+t}\leqq 0$ だから n が奇数ならば $0\leqq\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-1}}\leqq x^{n-1}$ が成り立つため次の不等式を得る.

$$-(x-t)^{n-1}\leqq\frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}-(x-t)^{n-1}\leqq x^{n-1}(1+t)^{\alpha-1}-(x-t)^{n-1} \tag{11.3}$$

また, n が偶数ならば $x^{n-1}\leqq\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-1}}\leqq 0$ が成り立つため次の不等式が得られる.

$$x^{n-1}(1+t)^{\alpha-1}-(x-t)^{n-1}\leqq\frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}-(x-t)^{n-1}\leqq-(x-t)^{n-1} \tag{11.4}$$

$-1 < x < 0$ であることに注意して (11.3), (11.4) の各辺を 0 から x まで t で積分すれば $\displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1}dt = \frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\int_0^x x^{n-1}(1+t)^{\alpha-1}dt = \frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha - 1)$ だから以下の不等式が成り立つ.

$$\frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\frac{x^n}{n} \leqq \int_0^x \left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}-(x-t)^{n-1}\right)dt \leqq -\frac{x^n}{n} \quad (n \text{ は奇数}) \tag{11.5}$$

$$-\frac{x^n}{n} \leqq \int_0^x \left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}-(x-t)^{n-1}\right)dt \leqq \frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\frac{x^n}{n} \quad (n \text{ は偶数}) \tag{11.6}$$

$\dfrac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\dfrac{x^n}{n}$ と $-\dfrac{x^n}{n}$ の絶対値の大きさを比較するために, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\dfrac{2x}{n}$ によって関数 $\varphi : (-1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を定義すれば, $\varphi'(x) = (x+1)^{\alpha-1}-\dfrac{2}{n}$ である.

補題 11.2 $n \geqq \max\{2, 2\alpha\}$ ならば $-1 < x \leqq 0$ に対して $\varphi(x) \leqq 0$ である.

証明 $\alpha < 1$ の場合, φ は $\left(-1, \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-1\right]$ で単調増加, $\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-1, \infty\right)$ で単調減少である. また, n が 2 以上ならば $\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-1 \geqq 0$ となり, $\varphi(0) = 0$ だから $-1 < x \leqq 0$ ならば $\varphi(x) \leqq 0$ である.

$\alpha > 1$ の場合, φ は $\left(-1, \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-1\right]$ で単調減少, $\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-1, \infty\right)$ で単調増加である. また, n が 2α 以上ならば $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\varphi(x) = \frac{2\alpha-n}{\alpha n} \leqq 0$ であり, $\varphi(0) = 0$ だから $-1 < x \leqq 0$ ならば $\varphi(x) \leqq 0$ である. □

上の補題から $n \geqq \max\{2, 2\alpha\}$ ならば $-1 < x \leqq 0$ に対して $\dfrac{1}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\dfrac{x}{n} \leqq \dfrac{x}{n}$ が成り立つため, この両辺に x^{n-1} をかけることによって, 任意の $x \in (-1, 0]$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\frac{x^n}{n} \leqq \frac{x^n}{n} \quad (n \text{ は奇数}) \qquad -\frac{x^n}{n} \leqq \frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\frac{x^n}{n} \quad (n \text{ は偶数})$$

従って (11.5), (11.6) から $n \geqq \max\{2, 2\alpha\}$ かつ $-1 < x \leqq 0$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$\left|\int_0^x \left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}-(x-t)^{n-1}\right)dt\right| \leqq \left|\frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\frac{x^n}{n}\right| \tag{11.7}$$

$0 < x < 1$ かつ $n \geqq \alpha$ ならば, 任意の $0 \leqq t \leqq x$ に対して $0 \leqq \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}} \leqq (x-t)^{n-1}$ だから

$$-(x-t)^{n-1} \leqq \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}-(x-t)^{n-1} \leqq 0$$

である. この各辺を 0 から x まで t で積分して次の不等式を得る.

$$-\frac{x^n}{n} \leqq \int_0^x \left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}-(x-t)^{n-1}\right)dt \leqq 0 \tag{11.8}$$

(11.2), (11.7), (11.8) から次の結果が得られる.

命題 11.3 $-1 < x < 1$ に対し, $(1+x)^\alpha$ を x の n 次多項式 $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{\alpha}{k}x^k$ で近似した誤差は,

$-1 < x < 0$ かつ $n \geqq \max\{2, 2\alpha\}$ ならば $\left|\dbinom{\alpha}{n}\right|\left|\dfrac{n}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-x\right||x|^{n-1}$ 以下であり,

$0 < x < 1$ かつ $n \geqq \alpha$ ならば $\left|\dbinom{\alpha}{n}\right||x|^n$ 以下である.

12 $\log(1+x)$, $\tan^{-1}x$ の多項式による近似

初項 1, 公比 $-t$ の等比数列 $1, -t, t^2, -t^3, \ldots$ の第 n 項までの和

$$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}t^{k-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

を考える. この両辺の 0 から x まで積分して得られる等式

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}dx = \log(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt$$

から, 次の等式が得られる.

$$\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt \tag{12.1}$$

$-1 < x < 0$ ならば, 任意の $t \in [x, 0]$ に対して $\dfrac{(-t)^n}{1+t} \leqq \dfrac{(-t)^n}{1+x}$ だから

$$\left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt\right| \leqq \int_x^0 \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|dt = \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+t}dt \leqq \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+x}dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$$

$0 < x \leqq 1$ ならば, 任意の $t \in [0, x]$ に対して $\dfrac{t^n}{1+t} \leqq t^n$ だから

$$\left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt\right| \leqq \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \leqq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

となるため, 等式 (12.1) から次のことがわかる.

命題 12.1 $\log(1+x)$ を x の n 次多項式 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ で近似した誤差は, $-1 < x < 0$ ならば $\dfrac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$ 以下であり, $0 < x \leqq 1$ ならば $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ 以下である.

とくに $x = 1$ の場合, $\log 2$ を $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ で近似した誤差は $\dfrac{1}{n+1}$ 以下である.

初項 1, 公比 $-t^2$ の等比数列 $1, -t^2, t^4, -t^6, \ldots$ の第 n 項までの和

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}t^{2k-2} = \frac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}$$

を考える. この両辺の 0 から x まで積分して得られる等式

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \tan^{-1}x - \int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt$$

から, 次の等式が得られる.

$$\tan^{-1}x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) = \int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt \tag{12.2}$$

不等式 $0 \leqq \dfrac{t^{2n}}{1+t^2} \leqq t^{2n}$ が任意の実数 t に対して成り立つことに注意すれば, $x \geqq 0$ ならば

$$\left|\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt\right| = \left|(-1)^n\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\right| = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt \leqq \int_0^x t^{2n}dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1},$$

$x < 0$ ならば

$$\left|\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt\right| = \left|(-1)^n\int_x^0 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\right| = \int_x^0 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt \leqq \int_x^0 t^{2n}dt = -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

となるため, いずれにしても $\left|\displaystyle\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt\right| \leqq \dfrac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$ が成り立つ. 従って等式 (12.2) から次のことがわかる.

命題 12.2 $\tan^{-1} x$ を x の $2n-1$ 次多項式 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^{2k-1}}{2k-1}$ で近似した誤差は, $|x| \leqq 1$ ならば $\dfrac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$ 以下である.

とくに $x=1$ の場合, $\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1} 1$ を $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ で近似したときの誤差は $\dfrac{1}{2n+1}$ 以下だから, π を $4\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)$ で近似したときの誤差は $\dfrac{4}{2n+1}$ 以下である. 従って, この級数を用いて π を例えば小数点以下 10 万桁まで求めたければ, $\dfrac{4}{2n+1} \leqq 10^{-100001}$ を満たす n, すなわち $2{\cdot}10^{100001}$ 項目までの級数の和を計算する必要がある. これでは, コンピューターを用いても労力がかかり過ぎる (不可能かも) ので, もう少し工夫をする.

教科書の第 2 章の演習問題の問題 2.3 の (2) の等式

$$\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5}-4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

をマチン (John.Machin ; 1685〜1751, 1706) の公式というが, これと命題 12.2 を用いて, π を近似する級数を導く. 実際 1949 年に ENIAC と呼ばれた世界最初のデジタル電子計算機で, マチンの公式から導かれた級数を用いて π を 2037 桁まで求めた.

命題 12.2 で $x=\dfrac{1}{5}$, $x=\dfrac{1}{239}$ とすれば

$$\begin{aligned}
\left|16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5^3{\cdot}3}+\frac{1}{5^5{\cdot}5}-\frac{1}{5^7{\cdot}7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{5^{2n-1}(2n-1)}\right)-16\tan^{-1}\frac{1}{5}\right| &\leqq \frac{16}{5^{2n+1}(2n+1)}\\
\left|4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{239^3{\cdot}3}+\frac{1}{239^5{\cdot}5}-\frac{1}{239^7{\cdot}7}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{239^{2m-1}(2m-1)}\right)-4\tan^{-1}\frac{1}{239}\right| &\leqq \frac{4}{239^{2m+1}(2m+1)}
\end{aligned}$$

が得られる. 従って, マチンの公式と三角不等式 $|x+y| \leqq |x|+|y|$ を用いると, 上の 2 つの不等式から

$$\begin{aligned}
\left|16\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{5^{2k-1}(2k-1)}-4\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{239^{2k-1}(2k-1)}-\pi\right| &\leqq \left|16\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{5^{2k-1}(2k-1)}-16\tan^{-1}\frac{1}{5}\right|\\
&\quad+\left|4\tan^{-1}\frac{1}{239}-4\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{239^{2k-1}(2k-1)}\right|\\
&\leqq \frac{16}{5^{2n+1}(2n+1)}+\frac{4}{239^{2m+1}(2m+1)}
\end{aligned}$$

となるため, π を $16\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{5^{2k-1}(2k-1)}-4\sum_{k=1}^{m}\dfrac{(-1)^{k-1}}{239^{2k-1}(2k-1)}$ で近似したときの誤差は

$$\frac{16}{5^{2n+1}(2n+1)}+\frac{4}{239^{2m+1}(2m+1)}$$

以下である. 自然数 l に対して, $\dfrac{16}{5^{2n+1}(2n+1)} < \dfrac{1}{2{\cdot}10^l}$ かつ $\dfrac{4}{239^{2m+1}(2m+1)} < \dfrac{1}{2{\cdot}10^l}$ が成り立つならば, $\dfrac{16}{5^{2n+1}} < \dfrac{16}{5^{2n+1}(2n+1)}$, $\dfrac{4}{239^{2m+1}} < \dfrac{4}{239^{2m+1}(2m+1)}$ より, $\dfrac{16}{5^{2n+1}} < \dfrac{1}{2{\cdot}10^l}$ かつ $\dfrac{4}{239^{2m+1}} < \dfrac{1}{2{\cdot}10^l}$ が成り立つ. これらの両辺の常用対数を考えて, n, m について解けば

$$n > \frac{l+5\log_{10}2-1}{2\log_{10}5} \fallingdotseq \frac{l+0.505}{1.398}, \quad m > \frac{l+3\log_{10}2-\log_{10}239}{2\log_{10}239} \fallingdotseq \frac{l-1.4754}{4.7568}$$

となる. 従って, π を例えば小数点以下 10 万桁まで求めたければ $l=100001$ として,

$$n > \frac{100001.505}{1.398} \fallingdotseq 71532, \quad m > \frac{99999.5246}{4.7568} \fallingdotseq 21022$$

だから $16\sum_{k=1}^{71533}\dfrac{(-1)^{k-1}}{5^{2k-1}(2k-1)}-4\sum_{k=1}^{21023}\dfrac{(-1)^{k-1}}{239^{2k-1}(2k-1)}$ を計算すればよい.

以下で, Web で見つけた $\tan^{-1}$ を用いた π の公式を挙げておく.

・ハットン (Charles Huttion ; 1737〜1823) の公式

$$\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7},\qquad \frac{\pi}{4}=3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{5}{99}$$

・オイラー (Leonhard Euler ; 1707〜1783) の公式

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3},\qquad \frac{\pi}{4}=5\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{3}{79}$$

・ベガ (Vega) の公式 (この公式はヘルマンまたはクラウゼンの発見であるという説もある.)

$$\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

・ベガ (Vega) の公式

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-2\tan^{-1}\frac{1}{408}+\tan^{-1}\frac{1}{1393}$$

・ダーゼ (Z. Dase ; 1804〜1861) の公式

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$$

・ガウス (Carl Friedrich Gauss ; 1777〜1855) の公式

$$\frac{\pi}{4}=12\tan^{-1}\frac{1}{18}+8\tan^{-1}\frac{1}{57}-5\tan^{-1}\frac{1}{239},\qquad \frac{\pi}{4}=3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$$

・ラザフォード (Rutherford) の公式

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}$$

・クリンジェンシェルナ (S. Klingenstierna, 1730) の公式・フゼインガーの公式

$$\frac{\pi}{4}=8\tan^{-1}\frac{1}{10}-\tan^{-1}\frac{1}{239}-4\tan^{-1}\frac{1}{515}$$

・シャンクス (W. Shanks ; 1812〜1882) の公式・シュテルマー (F. C. M. Störmer) の公式

$$\frac{\pi}{4}=6\tan^{-1}\frac{1}{8}+2\tan^{-1}\frac{1}{57}+\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

・シュテルマー (F. C. M. Störmer,1896) の公式

$$\frac{\pi}{4}=44\tan^{-1}\frac{1}{57}+7\tan^{-1}\frac{1}{239}-12\tan^{-1}\frac{1}{682}+24\tan^{-1}\frac{1}{12943}$$

・エスコットの公式

$$\frac{\pi}{4}=22\tan^{-1}\frac{1}{28}+2\tan^{-1}\frac{1}{443}-5\tan^{-1}\frac{1}{1393}-5\tan^{-1}\frac{1}{11018}$$

・高野喜久雄 (1982) の公式 (この公式を用いて, 東京大学の金田教授と日立製作所は 2002 年 11 月に現時点での π の計算の世界新記録である約 1 兆 2411 億桁を計算した.)

$$\frac{\pi}{4}=12\tan^{-1}\frac{1}{49}+32\tan^{-1}\frac{1}{57}-5\tan^{-1}\frac{1}{239}+12\tan^{-1}\frac{1}{110443}$$

13 応用例

xy 平面上の放物線 $y=ax^2$ を C, P, Q を C 上の相異なる点とし, さらに P, Q における C の接線をそれぞれ l, m とする. l, m と C で囲まれた部分の面積を S, 線分 PQ と C で囲まれた部分の面積を T とするとき, $\dfrac{T}{S}$ が P, Q の位置によらず, 常に 2 であることは容易に示されるが, 以下で示すように, ある条件の下では, 与えられた曲線 C 上の 2 点における接線と C で囲まれた部分の面積と, 2 つの接点を結ぶ線分と C で囲まれた部分の面積の比が一定になるのは, C が放物線の場合に限られる.

命題 13.1 関数 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は 6 回微分可能で, f の 6 次導関数は連続であるとし, 任意の $x\in(a,b)$ に対し $f''(x)>0$ であるとする. f のグラフを C として P, Q を C 上の相異なる点とし, P, Q における C の接線をそれぞれ l, m とする. l, m と C で囲まれた部分の面積を S, 線分 PQ と C で囲まれた部分の面積を T とするとき, $\dfrac{T}{S}$ の値が P と Q の位置に依存しない定数 k ならば $k=2$ であり, このとき正の実数 A と実数 B, C, D が存在して

$$f(x)=Ax^2+Bx+C \qquad \text{または} \qquad f(x)=Cx+D-A\sqrt{|x-B|}$$

という形に表される

証明 P, Q の座標をそれぞれ $(\alpha,f(\alpha))$, $(\beta,f(\beta))$ $(a<\alpha<\beta<b)$ とすれば, l, m の方程式は, それぞれ $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$, $y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$ で与えられる. l と m の交点の座標を (p,q) とおけば,

$$p=\frac{\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)-f(\beta)+f(\alpha)}{f'(\beta)-f'(\alpha)} \qquad q=\frac{(\beta-\alpha)f'(\alpha)f'(\beta)-f'(\alpha)f(\beta)+f(\alpha)f'(\beta)}{f'(\beta)-f'(\alpha)}$$

だから, S は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^p(f(x)-f'(\alpha)(x-\alpha)-f(\alpha))dx+\int_p^\beta(f(x)-f'(\beta)(x-\beta)-f(\beta))dx\\
&=\int_\alpha^p f(x)dx-\left[\frac{f'(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2+f(\alpha)x\right]_\alpha^p+\int_p^\beta f(x)dx-\left[\frac{f'(\beta)}{2}(x-\beta)^2+f(\beta)x\right]_p^\beta\\
&=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\frac{f'(\beta)}{2}(p-\beta)^2-\frac{f'(\alpha)}{2}(p-\alpha)^2+f(\beta)(p-\beta)-f(\alpha)(p-\alpha)\\
&=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\frac{(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)f'(\beta)+2(\beta-\alpha)(f'(\beta)f(\alpha)-f'(\alpha)f(\beta))+(f(\beta)-f(\alpha))^2}{2(f'(\beta)-f'(\alpha))}
\end{aligned}$$

P と Q を通る直線の方程式は $y=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x-\dfrac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ だから T は以下で与えられる.

$$T=\int_\alpha^\beta\left(\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x-\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\beta-\alpha}-f(x)\right)dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))-\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

$T=kS$ だから, 上の結果から任意の $a<\alpha<\beta<b$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
2(k+1)\int_\alpha^\beta f(x)dx=&\frac{k(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)f'(\beta)-2k(\beta-\alpha)(f'(\alpha)f(\beta)-f'(\beta)f(\alpha))+k(f(\beta)-f(\alpha))^2}{f'(\beta)-f'(\alpha)}\\
&+(\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))
\end{aligned}$$

φ を f の原始関数とすれば, 上式から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
2(k+1)(\varphi(\beta)-\varphi(\alpha))(\varphi''(\beta)-\varphi''(\alpha))=&k(\beta-\alpha)^2\varphi''(\alpha)\varphi''(\beta)+2k(\beta-\alpha)(\varphi''(\beta)\varphi'(\alpha)-\varphi''(\alpha)\varphi'(\beta))\\
&+k(\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha))^2+(\beta-\alpha)(\varphi'(\beta)+\varphi'(\alpha))(\varphi''(\beta)-\varphi''(\alpha))\ \cdots\ (i)
\end{aligned}$$

$x,c\in(a,b)$ に対し, テイラーの定理から次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\varphi(c)+(x-c)\varphi'(c)+\frac{1}{2}(x-c)^2\varphi''(c)+\frac{1}{6}(x-c)^3\varphi^{(3)}(c)+\frac{1}{24}(x-c)^4\varphi^{(4)}(c)\\&\quad+\frac{1}{120}(x-c)^5\varphi^{(5)}(c)+o\big((x-c)^5\big)\\\varphi'(x)&=\varphi'(c)+(x-c)\varphi''(c)+\frac{1}{2}(x-c)^2\varphi^{(3)}(c)+\frac{1}{6}(x-c)^3\varphi^{(4)}(c)+\frac{1}{24}(x-c)^4\varphi^{(5)}(c)\\&\quad+\frac{1}{120}(x-c)^5\varphi^{(6)}(c)+o\big((x-c)^5\big)\\\varphi''(x)&=\varphi''(c)+(x-c)\varphi^{(3)}(c)+\frac{1}{2}(x-c)^2\varphi^{(4)}(c)+\frac{1}{6}(x-c)^3\varphi^{(5)}(c)+\frac{1}{24}(x-c)^4\varphi^{(6)}(c)\\&\quad+\frac{1}{120}(x-c)^5\varphi^{(7)}(c)+o\big((x-c)^5\big)\end{aligned}$$

これらの等式を用いて, $(\varphi''(x)-\varphi''(c))(\varphi(x)-\varphi(c))$, $(x-c)^2\varphi''(c)$, $\varphi''(c)\varphi'(x)-\varphi''(x)\varphi'(c)$, $\varphi''(x)\varphi'(x)-\varphi''(c)\varphi'(c)$, $(\varphi'(x)-\varphi'(c))^2$ を $x-c$ の多項式で近似を行えば, 以下の等式が得られる.

$$\begin{aligned}(\varphi''(x)-\varphi''(c))(\varphi(x)-\varphi(c))&=(x-c)^2\varphi'(c)\varphi^{(3)}(c)+\frac{1}{2}(x-c)^3\Big(\varphi'(c)\varphi^{(4)}(c)+\varphi''(c)\varphi^{(3)}(c)\Big)\\&\quad+\frac{1}{12}(x-c)^4\Big(2\varphi'(c)\varphi^{(5)}(c)+3\varphi''(c)\varphi^{(4)}(c)+2\varphi^{(3)}(c)^2\Big)\\&\quad+\frac{1}{24}(x-c)^5\Big(\varphi'(c)\varphi^{(6)}(c)+2\varphi''(c)\varphi^{(5)}(c)+3\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(4)}(c)\Big)\\&\quad+\frac{1}{720}(x-c)^6\Big(6\varphi'(c)\varphi^{(7)}(c)+15\varphi''(c)\varphi^{(6)}(c)+26\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(5)}(c)+15\varphi^{(4)}(c)^2\Big)\\&\quad+o\big((x-c)^6\big)\\(x-c)^2\varphi''(c)\varphi''(x)&=(x-c)^2\varphi''(c)^2+(x-c)^3\varphi''(c)\varphi^{(3)}(c)+\frac{1}{2}(x-c)^4\varphi''(c)\varphi^{(4)}(c)\\&\quad+\frac{1}{6}(x-c)^5\varphi''(c)\varphi^{(5)}(c)+\frac{1}{24}(x-c)^6\varphi''(c)\varphi^{(6)}(c)+o\big((x-c)^6\big)\\\varphi''(c)\varphi'(x)-\varphi''(x)\varphi'(c)&=(x-c)\Big(\varphi''(c)^2-\varphi'(c)\varphi^{(3)}(c)\Big)+\frac{1}{2}(x-c)^2\Big(\varphi''(c)\varphi^{(3)}(c)-\varphi'(c)\varphi^{(4)}(c)\Big)\\&\quad+\frac{1}{6}(x-c)^3\Big(\varphi''(c)\varphi^{(4)}(c)-\varphi'(c)\varphi^{(5)}(c)\Big)\\&\quad+\frac{1}{24}(x-c)^4\Big(\varphi''(c)\varphi^{(5)}(c)-\varphi'(c)\varphi^{(6)}(c)\Big)\\&\quad+\frac{1}{120}(x-c)^5\Big(\varphi''(c)\varphi^{(6)}(c)-\varphi'(c)\varphi^{(7)}(c)\Big)+o\big((x-c)^5\big)\\\varphi''(x)\varphi'(x)-\varphi''(c)\varphi'(c)&=(x-c)\Big(\varphi''(c)^2+\varphi'(c)\varphi^{(3)}(c)\Big)+\frac{1}{2}(x-c)^2\Big(3\varphi''(c)\varphi^{(3)}(c)+\varphi'(c)\varphi^{(4)}(c)\Big)\\&\quad+\frac{1}{6}(x-c)^3\Big(\varphi'(c)\varphi^{(5)}(c)+4\varphi''(c)\varphi^{(4)}(c)+3\varphi^{(3)}(c)^2\Big)\\&\quad+\frac{1}{24}(x-c)^4\Big(\varphi'(c)\varphi^{(6)}(c)+5\varphi''(c)\varphi^{(5)}(c)+10\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(4)}(c)\Big)\\&\quad+\frac{1}{120}(x-c)^5\Big(\varphi'(c)\varphi^{(7)}(c)+6\varphi''(c)\varphi^{(6)}(c)+15\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(5)}(c)+10\varphi^{(4)}(c)^2\Big)\\&\quad+o\big((x-c)^5\big)\\(\varphi'(x)-\varphi'(c))^2&=(x-c)^2\varphi''(c)^2+(x-c)^3\varphi''(c)\varphi^{(3)}(c)+\frac{1}{12}(x-c)^4\Big(4\varphi''(c)\varphi^{(4)}(c)+3\varphi^{(3)}(c)^2\Big)\\&\quad+\frac{1}{12}(x-c)^5\Big(\varphi''(c)\varphi^{(5)}(c)+2\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(4)}(c)\Big)\\&\quad+\frac{1}{360}(x-c)^6\Big(6\varphi''(c)\varphi^{(6)}(c)+15\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(5)}(c)+10\varphi^{(4)}(c)^2\Big)+o\left((x-c)^6\right)\end{aligned}$$

(i) の等式の α, β をそれぞれ, x, c で置き換えて, 左辺から右辺を引いた式に, 上の 5 つの等式を用いると

$$
\begin{aligned}
&2(k+1)(\varphi''(x)-\varphi''(c))(\varphi(x)-\varphi(c))-k(x-c)^2\varphi''(c)\varphi''(x)+(2k+1)(x-c)(\varphi''(c)\varphi'(x)-\varphi''(x)\varphi'(c))\\
&\quad-(x-c)(\varphi''(x)\varphi'(x)-\varphi''(c)\varphi'(c))-k(\varphi'(x)-\varphi'(c))^2\\
&=2(k+1)(x-c)^2\varphi'(c)\varphi^{(3)}(c)+(k+1)(x-c)^3\left(\varphi'(c)\varphi^{(4)}(c)+\varphi''(c)\varphi^{(3)}(c)\right)\\
&\quad+\frac{k+1}{6}(x-c)^4\bigl(2\varphi'(c)\varphi^{(5)}(c)+3\varphi''(c)\varphi^{(4)}(c)+2\varphi^{(3)}(c)^2\bigr)\\
&\quad+\frac{k+1}{12}(x-c)^5\bigl(\varphi'(c)\varphi^{(6)}(c)+2\varphi''(c)\varphi^{(5)}(c)+3\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(4)}(c)\bigr)\\
&\quad+\frac{k+1}{360}(x-c)^6\bigl(6\varphi'(c)\varphi^{(7)}(c)+15\varphi''(c)\varphi^{(6)}(c)+26\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(5)}(c)+15\varphi^{(4)}(c)^2\bigr)\\
&\quad-k(x-c)^2\varphi''(c)^2-k(x-c)^3\varphi''(c)\varphi^{(3)}(c)-\frac{k}{2}(x-c)^4\varphi''(c)\varphi^{(4)}(c)-\frac{k}{6}(x-c)^5\varphi''(c)\varphi^{(5)}(c)\\
&\quad-\frac{k}{24}(x-c)^6\varphi''(c)\varphi^{(6)}(c)+(2k+1)(x-c)^2\bigl(\varphi''(c)^2-\varphi'(c)\varphi^{(3)}(c)\bigr)\\
&\quad+\frac{2k+1}{2}(x-c)^3\bigl(\varphi''(c)\varphi^{(3)}(c)-\varphi'(c)\varphi^{(4)}(c)\bigr)+\frac{2k+1}{6}(x-c)^4\bigl(\varphi''(c)\varphi^{(4)}(c)-\varphi'(c)\varphi^{(5)}(c)\bigr)\\
&\quad+\frac{2k+1}{24}(x-c)^5\left(\varphi''(c)\varphi^{(5)}(c)-\varphi'(c)\varphi^{(6)}(c)\right)+\frac{2k+1}{120}(x-c)^6\left(\varphi''(c)\varphi^{(6)}(c)-\varphi'(c)\varphi^{(7)}(c)\right)\\
&\quad-(x-c)^2\bigl(\varphi''(c)^2+\varphi'(c)\varphi^{(3)}(c)\bigr)-\frac{1}{2}(x-c)^3\bigl(3\varphi''(c)\varphi^{(3)}(c)+\varphi'(c)\varphi^{(4)}(c)\bigr)\\
&\quad-\frac{1}{6}(x-c)^4\bigl(\varphi'(c)\varphi^{(5)}(c)+4\varphi''(c)\varphi^{(4)}(c)+3\varphi^{(3)}(c)^2\bigr)\\
&\quad-\frac{1}{24}(x-c)^5\bigl(\varphi'(c)\varphi^{(6)}(c)+5\varphi''(c)\varphi^{(5)}(c)+10\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(4)}(c)\bigr)\\
&\quad-\frac{1}{120}(x-c)^6\left(\varphi'(c)\varphi^{(7)}(c)+6\varphi''(c)\varphi^{(6)}(c)+15\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(5)}(c)+10\varphi^{(4)}(c)^2\right)-k(x-c)^2\varphi''(c)^2\\
&\quad-k(x-c)^3\varphi''(c)\varphi^{(3)}(c)-\frac{k}{12}(x-c)^4\bigl(4\varphi''(c)\varphi^{(4)}(c)+3\varphi^{(3)}(c)^2\bigr)-\frac{k}{12}(x-c)^5\bigl(\varphi''(c)\varphi^{(5)}(c)+2\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(4)}(c)\bigr)\\
&\quad-\frac{k}{360}(x-c)^6\bigl(6\varphi''(c)\varphi^{(6)}(c)+15\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(5)}(c)+10\varphi^{(4)}(c)^2\bigr)+o\left((x-c)^6\right)\\
&=\frac{k-2}{12}(x-c)^4\varphi^{(3)}(c)^2+\frac{k-2}{12}(x-c)^5\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(4)}(c)+\frac{11k-19}{360}(x-c)^6\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(5)}(c)+\frac{k-3}{72}(x-c)^6\varphi^{(4)}(c)^2\\
&\quad+o\bigl((x-c)^6\bigr)
\end{aligned}
$$

が得られ, (i) より, 上の値は常に 0 に等しいため, 任意の $x,c\in(a,b)$ $(x\neq c)$ に対して次の等式が成り立つ.

$$
(k-2)\varphi^{(3)}(c)^2+(k-2)(x-c)\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(4)}(c)+\frac{11k-19}{30}(x-c)^2\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(5)}(c)+\frac{k-3}{6}(x-c)^2\varphi^{(4)}(c)^2+o\bigl((x-c)^2\bigr)=0
$$

$x\to c$ のとき, 上式の左辺は $(k-2)\varphi^{(3)}(c)^2$ に近づくため, $k\neq 2$ ならば $f''(c)=\varphi^{(3)}(c)=0$ となって, 常に $f''(x)>0$ であるという仮定と矛盾する. 故に $k=2$ であり, 上式より

$$
\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(5)}(c)-\frac{5}{3}\varphi^{(4)}(c)^2+\frac{o\bigl((x-c)^2\bigr)}{(x-c)^2}=0
$$

が得られる. $x\to c$ のとき, 上式の左辺は $\varphi^{(3)}(c)\varphi^{(5)}(c)-\dfrac{5}{3}\varphi^{(4)}(c)^2$ に近づくため, 任意の $x\in(a,b)$ に対して

$$
\varphi^{(3)}(x)\varphi^{(5)}(x)-\frac{5}{3}\varphi^{(4)}(x)^2=0
$$

が成り立つ. 従って $f^{(2)}(x)f^{(4)}(x)=\dfrac{5}{3}f^{(3)}(x)^2$ だから, f は微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{d^4y}{dx^4}=\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2$ の解である.

$z=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とおけば $z\dfrac{d^2z}{dx^2}=\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2$ であり, 仮定から z は常に正の値をとるため, $w=\log z$ で関数 w を定めることができる. このとき $z=e^w$ だから $\dfrac{dz}{dx}=e^w\dfrac{dw}{dx}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2}=e^w\left(\dfrac{d^2w}{dx^2}+\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2\right)$ であり, これらを $z\dfrac{d^2z}{dx^2}=\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2$ に代入すれば $\dfrac{d^2w}{dx^2}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2$ が得られる. そこで $v=\dfrac{dw}{dx}$ とおけば $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2}{3}v^2$ となるため, v が 0 にならなければ, $-\dfrac{1}{v}=\dfrac{2}{3}(x-B)$, すなわち $v=-\dfrac{3}{2(x-B)}$ である. この両辺を積分すれば, 正

の定数 A に対し $w=-\dfrac{3}{2}\log|x-B|+\log\dfrac{A}{4}$ となるため, $z=\dfrac{A}{4}|x-B|^{-\frac{3}{2}}$ が得られる．これを 2 回積分して $f(x)=Cx+D-A\sqrt{|x-B|}$ ($A>0$ かつ B, C, D は任意の実数) を得る．v が定義域のある値で 0 になる場合, $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2}{3}v^2$ の解の一意性により, 定数値関数 $v=0$ が, この方程式の解である．このとき $\dfrac{dw}{dx}=0$ だから w は定数値関数 $w=\kappa$ となるため, z は定数値関数 $z=e^{\kappa}$ である．$A=\dfrac{e^{\kappa}}{2}$ とおけば $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2A$ より $y=Ax^2+Bx+C$ ($A>0$ かつ B, C は任意の実数) が得られる． □

14 広義積分

定理 14.1 a を実数, b を a より大きい実数または ∞ とし, 区間 $[a,b)$ で定義された実数値関数 f は単調増加であるとする．実数 M で, 条件「$x\in[a,b)$ ならば $f(x)\leqq M$」を満たすものが存在するとき, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)$ は存在する．もし, 上記の条件を満たす実数 M が存在しなければ, $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)$ は正の無限大に発散する．

証明 実数 M で, 条件「$x\in[a,b)$ ならば $f(x)\leqq M$」を満たすものが存在すると仮定する．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を, $b\neq\infty$ ならば $a_n=b-\dfrac{b-a}{n}$, $b=\infty$ ならば $a_n=a+n-1$ で定めれば, 各 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列で, 各項は区間 $[a,b)$ に属し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=b$ が成り立つ．f は単調増加関数だから $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列で, 仮定からすべての n に対して $f(a_n)\leqq M$ が成り立つため, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である．従って連続性の公理によって $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するため, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(a_n)=L$ とおいて, $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)=L$ であることを以下で示す．

$f(c)>L$ となる $c\in[a,b)$ が存在すると仮定する．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に増加して b に収束 ($b=\infty$ のときは正の無限大に発散) するため, $c<a_K<b$ を満たす自然数 K がある．ところが, f は単調増加関数で, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に増加して L に収束するため $L<f(c)\leqq f(a_K)\leqq L$ となって矛盾が生じる．故に, 任意の $x\in[a,b)$ に対して $f(x)\leqq L$ である．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(a_n)=L$ より, 任意の $\varepsilon>0$ に対して自然数 N で, 条件「$n\geqq N$ ならば $|f(a_n)-L|<\varepsilon$」を満たすものがある．$b\neq\infty$ の場合, $b-\dfrac{b-a}{N}=a_N<x<b$ ならば $f(a_N)\leqq f(x)$ であり, $L-\varepsilon<f(a_N)$ だから $L-\varepsilon<f(x)\leqq L$ が成り立つため $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)=L$ である．$b=\infty$ の場合, $x>a_N=a+N-1$ ならば $f(a_N)\leqq f(x)$ であり, $L-\varepsilon<f(a_N)$ だから $L-\varepsilon<f(x)\leqq L$ が成り立つため $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ である．

実数 M で, 条件「$x\in[a,b)$ ならば $f(x)\leqq M$」を満たすものは存在しないと仮定すれば, 任意の実数 R に対して, $f(x)>R$ を満たす $x\in[a,b)$ が存在するため, そのような x を 1 つ選んで x_R とする．f は単調増加関数だから, $x_R<x<b$ ならば $f(x)\geqq f(x_R)>R$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)=\infty$ である． □

実数値関数 f がつねに 0 以上の値をとるとき, f を正値関数という．

定理 14.2 $a<b\leqq\infty$ とし, 区間 $[a,b)$ で定義された正値関数 f が, 任意の $x\in[a,b)$ に対して, 区間 $[a,x]$ で積分可能であるとする．このとき, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が収束するか, または正の無限大に発散し, 収束するための必要十分条件は, 実数 M で条件「$t\in[a,b)$ ならば $\displaystyle\int_a^t f(x)dx\leqq M$」を満たすものが存在することである．

証明 関数 $F:[a,b)\to\boldsymbol{R}$ を $F(t)=\displaystyle\int_a^t f(x)dx$ で定めれば, F は単調増加関数である．実際 $a\leqq s\leqq t<b$ ならば $F(t)=\displaystyle\int_a^t f(x)dx=\int_a^s f(x)dx+\int_s^t f(x)dx=F(s)+\int_s^t f(x)dx$ であり $f(x)\geqq 0$ だから $\displaystyle\int_s^t f(x)dx\geqq 0$ となるため $F(t)\geqq F(s)$ である．従って, 定理 14.1 を関数 F に対して用いると, 条件「$t\in[a,b)$ ならば $\displaystyle\int_a^t f(x)dx\leqq M$」を満たす実数 M が存在するとき, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-0}F(t)$ は収束し, そのような M が存在しなければ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は正の無限大に発散する． □

系 14.3 $a < b \leqq \infty$ とし, 区間 $[a, b)$ で定義された正値関数 f, g が, 任意の $x \in [a, b)$ に対して, 区間 $[a, x]$ で積分可能であり, $f(x) \leqq g(x)$ が成り立つとする.

(1) $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も収束する. *(2)* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が発散すれば $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ も発散する.

証明 仮定から任意の $t \in [a, b)$ に対して, $\displaystyle\int_a^t f(x)dx \leqq \int_a^t g(x)dx$ が成り立ち, $\displaystyle\int_a^t g(x)dx$ は t の単調増加関数だから, $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が収束すれば, 任意の $t \in [a, b)$ に対して, $\displaystyle\int_a^t f(x)dx \leqq \int_a^t g(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ が成り立つため, 定理 14.2 により $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も収束する. (2) の主張は (1) の対偶である. □

系 14.4 $a < b \leqq \infty$ とし, 区間 $[a, b)$ で定義された正値関数 f, g が, 任意の $x \in [a, b)$ に対して, 区間 $[a, x]$ で積分可能であり, $g(x) > 0$ が成り立つとする.

(1) $c \in [a, b)$ と正の実数 K で, 条件「$x \in [c, b)$ ならば $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqq K$」を満たすものが存在するとき, $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も収束し, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が発散すれば $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ も発散する.

(2) $c \in [a, b)$ と正の実数 K で, 条件「$x \in [c, b)$ ならば $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqq K$」を満たすものが存在するとき, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ も収束し, $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が発散すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も発散する.

証明 (1) 仮定から $x \in [c, b)$ ならば $f(x) \leqq Kg(x)$ であり, $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_c^b Kg(x)dx$ も収束するため, 系 14.3 の (1) によって, $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ も収束する. 従って $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ も収束する. 後半の主張は前半の主張の対偶である.

(2) 仮定から $x \in [c, b)$ ならば $g(x) \leqq \dfrac{1}{K}f(x)$ であり, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_c^b \frac{1}{K}f(x)dx$ も収束するため, 系 14.3 の (1) によって, $\displaystyle\int_c^b g(x)dx$ も収束する. 従って $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)dx$ も収束する. 後半の主張は前半の主張の対偶である. □

15 曲線の長さ

定義 15.1 写像 $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の曲線という. $t \in [a, b]$ を $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の第 j 成分に対応させる関数を $\varphi_j(t)$ で表して, $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0}^N$ に対して, $L(\boldsymbol{\varphi}; \Delta) = \sum\limits_{i=1}^N \sqrt{\sum\limits_{j=1}^n (\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}))^2}$ とおく. 実数 λ で, 次の条件 (L) を満たすものが存在するとき, 曲線 $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもつといい, λ を $\boldsymbol{\varphi}$ の長さと呼ぶ.

(L) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 条件「$\|\Delta\| < \delta$ ならば $|L(\boldsymbol{\varphi}; \Delta) - \lambda| < \varepsilon$」を満たす $\delta > 0$ が存在する.

補題 15.2 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$\left| \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} \right| \leqq \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$$

証明 $(右辺)^2 - (左辺)^2 = 2\left(\sum\limits_{1 \leqq i < j \leqq n} |x_i - y_i||x_j - y_j| + \sqrt{\sum\limits_{j=1}^n x_j^2}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^n y_j^2} - \sum\limits_{j=1}^n x_j y_j\right) \cdots (*)$ であり,

$$\left(\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j\right)^2 = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2) - \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} 2x_i y_i x_j y_j = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqq 0$$

だから, $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2} \geqq \left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \geqq \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ が成り立つため, $(*) \geqq 0$ である. □

定理 15.3 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な数列とすれば, すべての項が自然数である狭義単調増加数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ で, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が収束するようなものがある.

証明 単調増加数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}$ と 単調減少数列 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, 各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して条件

(1) $\beta_n - \alpha_n = 2^{-n+1}(\beta_1 - \alpha_1)$.

(2) $a_i \in [\alpha_n, \beta_n]$ となる i は無限個ある.

を満たすものを以下のように帰納的に定める. まず, すべての n に対して $a_n \in [\alpha_1, \beta_1]$ となる α_1, β_1 がある. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ が各 $n = 1, 2, \ldots, k$ に対して上の条件を満たすように定まったと仮定する. (2) により区間 $\left[\alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}, \beta_k\right]$ の少なくとも一方は無限個の i に対して a_i を含む. $a_i \in \left[\alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right]$ となる i が無限個ある場合は $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $\beta_{k+1} = \dfrac{\alpha_k+\beta_k}{2}$ によって $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ を定め, そうでなければ $\alpha_{k+1} = \dfrac{\alpha_k+\beta_k}{2}$, $\beta_{k+1} = \beta_k$ によって $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ を定める. いずれの場合にしても $\alpha_k \leqq \alpha_{k+1}$, $\beta_k \geqq \beta_{k+1}$ かつ $\beta_{k+1} - \alpha_{k+1} = \dfrac{\beta_k - \alpha_k}{2} = 2^{-k}(\beta_1 - \alpha_1)$ が成り立ち, $a_i \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ となる i は無限個ある.

$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は区間 $[\alpha_1, \beta_1]$ に含まれるため, 上に有界な単調増加数列である. 従って仮定から $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ とおくと $\beta_n = \alpha_n + 2^{-n+1}(\beta_1 - \alpha_1)$ より $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \alpha$ である. $n_1 = 1$ とおき, 自然数の列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ で, 各 $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$ となるものを帰納的に選んだとすれば, $a_i \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ となる i は無限個あるので, $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ となる n_{k+1} で n_k より大きなものがある. このように定めた $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対し, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は, すべての k に対して $\alpha_k \leqq a_{n_k} \leqq \beta_k$ を満たすため, はさみうちの原理によって α に収束する. □

定理 15.4 関数 $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ が連続ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で, 条件「$x, y \in [a, b]$ かつ $|x - y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$」を満たすものが存在する.

証明 背理法で証明する. 主張を否定すれば, ある $\varepsilon > 0$ で 次のようなものがある; $\delta > 0$ をどのように選んでも「$|x - y| < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \geqq \varepsilon$」が成り立つような $x, y \in [a, b]$ がある. $\delta = 2^{-n}$ に対して「$|x_n - y_n| < 2^{-n}$ かつ $|f(x_n) - f(y_n)| \geqq \varepsilon$」が成り立つような $x_n, y_n \in [a, b]$ を選んでおく. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な数列だから定理 15.3 により, $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$, $\{y_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ が両方とも収束するように自然数の列 $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots$ がとれる. $p = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, $q = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$ とおくと $x_{n_k}, y_{n_k} \in [a, b]$ だから $p, q \in [a, b]$ である. $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 2^{-n_k}$ がすべての k について成り立つため, $|p - q| \leqq 0$ すなわち $p = q$ である. f は連続だから, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(p)$ が得られるが, $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqq \varepsilon$ において, $k \to \infty$ とすれば $0 \geqq \varepsilon > 0$ となって矛盾が生じる. □

定理 15.5 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し, 関数 $\varphi_j : (p, q) \to \boldsymbol{R}$ は各点で微分可能であり, 導関数 φ'_j は連続であるとする. $p < a < b < q$ のとき, $t \in [a, b]$ を, 第 j 成分が $\varphi_j(t)$ である $\boldsymbol{R}^n$ の点に対応させる $\boldsymbol{R}^n$ の曲線 $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ の長さは $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\varphi'_j(t))^2}dt$ で与えられる.

証明 ε を任意の正の実数とすると, 定理 15.4 から $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $\delta_j > 0$ で条件「$x, y \in [a, b]$ かつ $|x - y| < \delta_j$ ならば $|\varphi'_j(x) - \varphi'_j(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2n(b-a)}$」を満たすものが存在する. そこで, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ のうち最小のものを δ' とする.

$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0}^N$ は $\|\Delta\| < \delta'$ を満たすとする．平均値の定理から $\xi_{ij} \in (t_{i-1}, t_i)$ で $\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}) = \varphi'_j(\xi_{ij})(t_i - t_{i-1})$ を満たすものがある．このとき $\left|\varphi'_j(\xi_{ij}) - \varphi'_j(t_i)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2n(b-a)}$ であり，補題 15.2 から

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}))^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t_i))^2 (t_i - t_{i-1})}\right| &= \left|\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\varphi'_j(\xi_{ij})\right)^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\varphi'_j(t_i)\right)^2}\right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\leqq \sum_{j=1}^n \left|\varphi'_j(\xi_{ij}) - \varphi'_j(t_i)\right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\leqq \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2n(b-a)} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon(t_i - t_{i-1})}{2(b-a)}
\end{aligned}
$$

が成り立つため，

$$
\begin{aligned}
\left|L(\boldsymbol{\varphi}; \Delta) - \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t_i))^2 (t_i - t_{i-1})}\right| &\leqq \sum_{i=1}^N \left|\sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}))^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t_i))^2 (t_i - t_{i-1})}\right| \\
&\leqq \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon(t_i - t_{i-1})}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

である． さらに，$\|\Delta\| \to 0$ ならば $\displaystyle\sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t_i))^2 (t_i - t_{i-1})} \to \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t))^2 dt}$ だから $\delta'' > 0$ で，条件「$\|\Delta\| < \delta''$ ならば $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t_i))^2 (t_i - t_{i-1})} - \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t))^2 dt}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがあるため，$\delta'$ と δ'' の小さい方を δ とすれば，$(*)$ と三角不等式より，$\|\Delta\| < \delta$ ならば

$$
\begin{aligned}
\left|L(\boldsymbol{\varphi}; \Delta) - \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t))^2 dt}\right| \quad &\leqq \quad \left|L(\boldsymbol{\varphi}; \Delta) - \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t_i))^2 (t_i - t_{i-1})}\right| \\
&\qquad + \left|\sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t_i))^2 (t_i - t_{i-1})} - \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t))^2 dt}\right| \\
&\leqq \quad \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ．従って，任意の正の実数 ε に対して $\delta > 0$ で，条件「$\|\Delta\| < \delta$ ならば $\displaystyle\left|L(\boldsymbol{\varphi}; \Delta) - \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'_j(t))^2 dt}\right| \leqq \varepsilon$」を満たすものがあるため，主張が示された． □

注意 15.6 連続関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n, \lambda : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ と $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \boldsymbol{R}$ に対して，関数 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を

$$
\varphi_1(t) = \int_a^t \lambda(x)(f_1(x))^2 dx - \sum_{k=2}^n \int_a^t \lambda(x)(f_k(x))^2 dx + c_1, \quad \varphi_k(t) = 2\int_a^t \lambda(x) f_1(x) f_k(x) dx + c_k \ (k = 2, 3, \ldots, n)
$$

によって定めれば，次の等式が成り立つ．

$$
\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\varphi'_k(t)\right)^2} = |\lambda(t)| \sum_{k=1}^n \left(f_k(t)\right)^2
$$

とくに $n = 2$ の場合は次のようになる．

$$
\sqrt{\left(\varphi'_1(t)\right)^2 + \left(\varphi'_2(t)\right)^2} = |\lambda(t)| \left(\left(f_1(t)\right)^2 + \left(f_2(t)\right)^2\right)
$$

λ が単調増加関数である原始関数 μ をもち, 各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して, 連続関数 g_k が存在して, 任意の $t\in[a,b]$ に対して $f_k(t)=g_k(\mu(t))$ が成り立つとき, $x=\mu(t)$ とおいて置換積分を行えば, 次の等式が得られる.

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n (\varphi_k'(t))^2}dt = \sum_{k=1}^n \int_a^b (g_k(\mu(t)))^2 \mu'(t)dt = \sum_{k=1}^n \int_{\mu(a)}^{\mu(b)} (g_k(x))^2 dx$$

16 数ベクトル空間と行列

定義 16.1 *(1)* n 個の実数を縦に並べた $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 次元実ベクトルという. このとき x_i を $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分と呼ぶ.

(2) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を n 次元実ベクトルとするとき, これらのベクトルが「等しい」とは, すべての $1\leqq i\leqq n$ に対して $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分 $\boldsymbol{y}$ の第 i 成分が等しくなることで, これを $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ で表す. n 次元実ベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^n$ で表す.

(3) $\boldsymbol{R}^n$ における加法 $+$ と, スカラー倍 $\cdot$ を次で定義する.

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n,\ r\in\boldsymbol{R} \text{ に対し } \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_j+y_j \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix},\ r\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} rx_1 \\ \vdots \\ rx_j \\ \vdots \\ rx_n \end{pmatrix}$$

命題 16.2 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$, $r,s\in\boldsymbol{R}$ とするとき, 次が成り立つ.

(1) 結合法則 ： $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, $(rs)\boldsymbol{x}=r(s\boldsymbol{x})$.

(2) 単位元の存在 ： すべての成分が 0 であるベクトルを $\boldsymbol{0}$ で表すと, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ である. また, $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

(3) 逆元の存在 ： $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$ とおけば $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

(4) 交換法則 ： $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.

(5) 分配法則 ： $r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=r\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y}$, $(r+s)\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{x}$.

定義 16.3 上のように加法とスカラー倍の定義された集合 $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元数ベクトル空間という.

定義 16.4 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^n x_jy_j$ で定義する.

次の結果は内積の定義から容易に確かめられる.

命題 16.5 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$, $r\in\boldsymbol{R}$ とするとき, 次のことが成り立つ.

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$.

(2) $(r\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},r\boldsymbol{y})$.

(3) $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

(4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$ であり, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ である.

定義 16.6 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とおいて, $\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ の長さという.

次の命題は容易に示される.

命題 16.7 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の第 i 成分を x_i とするとき, $|x_i| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \leqq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ が成り立つ.

定理 16.8 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ のとき, 以下の不等式が成り立つ.

(1) $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$ *(シュワルツの不等式).* *(2)* $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *(三角不等式).*

証明 (1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば 両辺はともに 0 になって不等式は成り立つため, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定する. $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ に注意して命題 16.5 の (1), (2), (3) を用いれば, 任意の実数 t に対して $(t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = (t\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})t + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 \left(t + \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \right)^2 + \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ だから $t = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ のとき, $(t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ は最小値 $\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ をとる. 一方, 命題 16.5 の (4) から $(t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \geqq 0$ が成り立つため, この最小値は 0 以上であるから $\|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \geqq 0$ が得られる.

(2) 上の結果から $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$ であり, 上の計算で $t = 1$ とすれば, $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$ だから結果が得られる. □

定義 16.9 $\boldsymbol{R}$ の mn 個の要素 a_{ij} *(*$i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$*)* を下のように長方形に並べたものを $m \times n$ 行列 *(*m 行 n 列行列, (m, n) 型行列*)* という.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

横の並びを上から順に第 1 行 $\sim$ 第 m 行, 縦の並びを左から順に第 1 列 $\sim$ 第 n 列と呼ぶ. また, a_{ij} を A の (i, j) 成分といい, A を (a_{ij}) で表すことがある.
2 つの $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ が「等しい」とは, $a_{ij} = b_{ij}$ がすべての $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ について成り立つことをいう.
とくに, $m = n$ の場合 $m \times m$ 行列を m 次正方行列という.

定義 16.10 上から j 番目の成分が 1 で, 他の成分はすべて 0 であるような $\boldsymbol{R}^n$ の要素を $\boldsymbol{e}_j$ で表し, n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトルという.

定義 16.11 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を $m \times n$ 行列, $C = (c_{ij})$ を $l \times m$ 行列, $r \in \boldsymbol{R}$ とする. 行列の和 $A + B$, スカラー倍 rA を $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, $rA = (ra_{ij})$ で定義し, 積 CA を $CA = (p_{ij})$ *(*但し $p_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{ik} a_{kj}$*)* によって定義する**.** さらに $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\boldsymbol{x}$ を $n \times 1$ 行列とみなして $A\boldsymbol{x}$ が定義される.

命題 16.12 行列の和, スカラー倍, 積, ベクトルとの積に関し, 以下の等式が成り立つ**.**

(1) $m \times n$ 行列 A, B, C に対し, $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + O = O + A = A$ *(*ただし O は, すべての成分が 0 である $m \times n$ 行列*)*, $A + (-A) = (-A) + A = O$ *(*ただし $-A = (-1)A$*)*, $A + B = B + A$.

(2) $m \times n$ 行列 A, B, $r, s \in \boldsymbol{R}$ に対し, $(rs)A = r(sA)$, $1A = A$, $r(A + B) = rA + rB$, $(r + s)A = rA + sA$.

(3) $m \times n$ 行列 A, B, $l \times m$ 行列 C, $n \times k$ 行列 D, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $(rC)A = r(CA) = C(rA)$, $(CA)D = C(AD)$, $C(A + B) = CA + CB$, $(A + B)D = AD + BD$.

(4) $m \times n$ 行列 A, B, $l \times m$ 行列 C, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$, $A(r\boldsymbol{x}) = r(A\boldsymbol{x}) = (rA)\boldsymbol{x}$, $(A + B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}$.

補題 16.13 $A=(a_{ij})$ を $m\times n$ 行列として $M=\sqrt{\sum_{1\leqq i\leqq m,1\leqq j\leqq n} a_{ij}^2}$ とおくと, $\|A\boldsymbol{x}\|\leqq M\|\boldsymbol{x}\|$ が任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して成り立つ.

証明 $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分を x_i とし, A の第 i 行の成分を縦に並べて得られるベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とすると, シュワルツの不等式から $\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)^2=(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{x})^2\leqq\|\boldsymbol{a}_i\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2=\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\|\boldsymbol{x}\|^2$. 従って $\|A\boldsymbol{x}\|^2=\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)^2\leqq\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\|\boldsymbol{x}\|^2=M^2\|\boldsymbol{x}\|^2$. □

17 写像の微分

定義 17.1 $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $r>0$ に対して $U_r(\boldsymbol{p})=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<r\}$ とおき, これを半径 r 中心 $\boldsymbol{p}$ の開球または $\boldsymbol{p}$ の r-近傍という.

以後, $X\subset\boldsymbol{R}^n$, $Y\subset\boldsymbol{R}^m$ とし, 写像 $f:X\to Y$ を考える.

定義 17.2 $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^m$ とする. どんな $\varepsilon>0$ に対しても, $\delta>0$ で条件

「$\boldsymbol{x}\in U_\delta(\boldsymbol{p})\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x})\in U_\varepsilon(\boldsymbol{q})$」

を満たすものがあるとき, $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{p}$ に近づけたときの f の極限は $\boldsymbol{q}$ であるといい, これを $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ で表す.

注意 17.3 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ であることは, 言い換えると, どんな $\varepsilon>0$ に対しても, $\delta>0$ で「$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta$, $\boldsymbol{x}\in X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|<\varepsilon$」を満たすものがあることである. 従って, このことは $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|=0$ と同値である.

命題 17.4 $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\in\boldsymbol{R}^m$, $a,b,c\in\boldsymbol{R}$ とし, 写像 $f,g:X\to Y$ は $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{r}$ を満たし, 関数 $s:X\to\boldsymbol{R}$ は $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}s(\boldsymbol{x})=c$ を満たすとする. このとき, 次の等式が成り立つ.

(1) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}(af(\boldsymbol{x})+bg(\boldsymbol{x}))=a\boldsymbol{q}+b\boldsymbol{r}$ *(2)* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{q}$

証明 (1) 任意の $\boldsymbol{x}\in X$ に対し, 三角不等式から

$$\begin{aligned}\|(af(\boldsymbol{x})+bg(\boldsymbol{x}))-(a\boldsymbol{q}+b\boldsymbol{r})\|&=\|a(f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q})+b(g(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{r})\|\\&\leqq\|a(f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q})\|+\|b(g(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{r})\|=|a|\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|+|b|\|g(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{r}\|\end{aligned}$$

であり, 仮定と注意 17.3 から $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}$ のとき, $\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|$ と $\|g(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{r}\|$ はともに 0 に近づくため, 上の不等式から, $\|(af(\boldsymbol{x})+bg(\boldsymbol{x}))-(a\boldsymbol{q}+b\boldsymbol{r})\|$ も 0 に近づく. 故に, 注意 17.3 により $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}(af(\boldsymbol{x})+bg(\boldsymbol{x}))=a\boldsymbol{q}+b\boldsymbol{r}$ である.

(2) 任意の $\boldsymbol{x}\in X$ に対し, 三角不等式から

$$\begin{aligned}\|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})-c\boldsymbol{q}\|&=\|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})-cf(\boldsymbol{x})+cf(\boldsymbol{x})-c\boldsymbol{q}\|=\|(s(\boldsymbol{x})-c)f(\boldsymbol{x})+c(f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q})\|\\&\leqq|s(\boldsymbol{x})-c|\|f(\boldsymbol{x})\|+|c|\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|=|s(\boldsymbol{x})-c|\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}\|+|c|\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|\\&\leqq|s(\boldsymbol{x})-c|\left(\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|+\|\boldsymbol{q}\|\right)+|c|\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|\end{aligned}$$

であり, 仮定と注意 17.3 から $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}$ のとき, $\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|$ と $|s(\boldsymbol{x})-c|$ はともに 0 に近づくため, 上の不等式から, $\|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})-c\boldsymbol{q}\|$ も 0 に近づく. 故に, 注意 17.3 により $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{q}$ である. □

$\boldsymbol{x}\in X$ に対し, $f(\boldsymbol{x})\in Y$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表すことにする. $\boldsymbol{x}$ を $f_i(\boldsymbol{x})$ に対応させることにより, 関数 $f_i:X\to\boldsymbol{R}$ が定まる.

命題 17.5 $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ の第 i 成分を q_i とすれば, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ が成り立つためには, すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ が成り立つことが必要十分である.

証明 すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ が成り立つならば, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| = 0$ が すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して成り立つため, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| = 0$ である. ここで, 命題 16.7 から $0 \leqq \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| \leqq \sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i|$ だから, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| = 0$ が成り立つため, 注意 17.3 により, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ である.

命題 16.7 から, 任意の $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $|f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| < \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\|$ だから, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ ならば, 注意 17.3 により, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| = 0$ が成り立つため, すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ である. □

定義 17.6 $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p})$ が成り立つとき, f は $\boldsymbol{p}$ で連続であるという. すべての $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, f が $\boldsymbol{p}$ で連続であるとき f を連続写像という.

注意 17.7 命題 *17.4* から, 連続写像の和および連続関数と連続写像の積は連続写像である. また命題 *17.5* から, 写像が連続であるためには, 各成分の関数が連続であることが必要十分である.

命題 17.8 $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, 正の実数 r, L で条件「$\boldsymbol{x} \in U_r(\boldsymbol{p}) \cap X$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$」を満たすものがあれば, f は $\boldsymbol{p}$ で連続である.

証明 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, δ を r と $\dfrac{\varepsilon}{L}$ の小さい方とすれば, $\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{p}) \cap X$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < L\delta \leqq \varepsilon$ だから f は $\boldsymbol{p}$ で連続である. □

命題 17.9 $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, $Z \subset \boldsymbol{R}^k$, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q} \in Y$ とし, 写像 $f : X \to Y$ は $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ を満たし, 写像 $g : Y \to Z$ は $\boldsymbol{q}$ で連続であるとする. このとき $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(f(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{q})$ が成り立つ.

証明 g の $\boldsymbol{q}$ における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_1 > 0$ で「$\boldsymbol{y} \in U_{\delta_1}(\boldsymbol{q}) \cap Y$ ならば $g(\boldsymbol{y}) \in U_\varepsilon(g(\boldsymbol{q}))$ 」を満たすものがある. また, f についての仮定から, $\delta > 0$ で,「$\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{p}) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in U_{\delta_1}(\boldsymbol{q})$」を満たすものがある. 従って $\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{p}) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $g(f(\boldsymbol{x})) \in U_\varepsilon(g(\boldsymbol{q}))$ となるため, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(f(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{q})$ が成り立つ. □

定義 17.10 $X \subset \boldsymbol{R}^n$ の点 $\boldsymbol{p}$ に対し, $U_r(\boldsymbol{p}) \subset X$ を満たす正の実数 r が存在するとき, $\boldsymbol{p}$ を X の内点という.

定義 17.11 $\boldsymbol{p}$ を X の内点とする. $m \times n$ 行列 A で, 次の等式 $(*)$ を満たすものがあるとき f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能であるという.

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} = \boldsymbol{0} \quad \cdots \ (*)$$

以後, 「f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能である.」というときは $\boldsymbol{p}$ は f の定義域 X の内点であることは仮定する.

写像 f, $m \times n$ 行列 A, $\boldsymbol{p} \in X$ に対して, 写像 $\varepsilon = \varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}} : X \to \boldsymbol{R}^m$ を

$$\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

で定義すれば, この定義と定義 17.11 から次のことがわかる.

命題 17.12 任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対して, 等式

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$$

が成り立ち, f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能であるためには, $\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}$ が $\boldsymbol{p}$ において連続, すなわち $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるような, $m \times n$ 行列 A が存在することが必要十分である.

命題 17.13 f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば $r, L > 0$ で $U_r(\boldsymbol{p}) \subset X$ かつ「$\boldsymbol{x} \in U_r(\boldsymbol{p})$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$」を満たすものがある．従って命題 *17.8* から f は $\boldsymbol{p}$ で連続である．

証明 $m \times n$ 行列 A は定義 17.11 の $(*)$ を満たすとする．命題 17.12, 三角不等式および補題 16.13 から $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| = \|A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| \leqq \|A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})\| + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| \leqq (M + \|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\|)\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| \cdots (*)$ である．仮定と命題 17.12 から $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| = 0$ であるため, $r > 0$ で $U_r(\boldsymbol{p}) \subset X$ かつ「$\boldsymbol{x} \in U_r(\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| < 1$」を満たすものがとれる．従って $(*)$ から $\boldsymbol{x} \in U_r(\boldsymbol{p})$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| < (M+1)\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$ である． □

定義 17.14 $\boldsymbol{p} \in X$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}$ とし, 十分小さな $r > 0$ に対して $|t| < r$ ならば $\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v} \in X$ であるとする．極限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t}$$

が存在するとき, f は $\boldsymbol{p}$ において $\boldsymbol{v}$ 方向に微分可能であるといい, この極限のベクトルを f の $\boldsymbol{p}$ における $\boldsymbol{v}$ 方向の微分という．とくに $Y = \boldsymbol{R}$ $(m = 1)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$ の場合, 上の極限値を $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ で表し, f の $\boldsymbol{p}$ における j 番目の変数に関する偏微分といい, このとき, f は j 番目の変数に関して $\boldsymbol{p}$ において偏微分可能であるという．さらに f が X の各点で j 番目の変数に関して偏微分可能なとき, $\boldsymbol{p} \in X$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ に対応させる関数を j 番目の変数に関する偏導関数と呼んで $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : X \to \boldsymbol{R}$ で表す．

命題 17.15 $f : X \to Y$ が $\boldsymbol{p}$ で微分可能なとき, 任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して f は $\boldsymbol{p}$ において $\boldsymbol{v}$ 方向に微分可能である．このとき定義 *17.11* の等式 $(*)$ における $m \times n$ 行列 A は

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t} = A\boldsymbol{v}$$

を満たす．とくに A の第 j 列は $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{p})}{t}$ で与えられるため定義 *17.11* の等式 $(*)$ を満たす行列 A は存在すればただ *1* つだけである．

証明 命題 17.12 の等式に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}$ を代入すれば,

$$f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{p}) + tA\boldsymbol{v} + |t|\|\boldsymbol{v}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$$

となるため,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t} = A\boldsymbol{v} + \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\|\boldsymbol{v}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) \cdots (**)$$

である．$\left\|\dfrac{|t|}{t}\|\boldsymbol{v}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})\right\| = \|\boldsymbol{v}\|\,\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})\|$ であり, 仮定と命題 17.12 から $\lim_{t\to 0} \|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})\| = 0$ だから $(**)$ から $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t} = A\boldsymbol{v}$ が得られる． □

定義 17.16 上の命題から定義 *17.11* の等式 $(*)$ を満たす行列 A は f と $\boldsymbol{p}$ を与えればただ *1* つに定まるため, これを $f'(\boldsymbol{p})$ で表して, f の $\boldsymbol{p}$ における微分という．

命題 17.17 写像 $f : X \to Y$ と $\boldsymbol{x} \in X$ に対し, $f(\boldsymbol{x}) \in Y$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表し, X で定義された実数値関数 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ を考える．

(1) f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば, 各 f_i は $\boldsymbol{p}$ で微分可能で, $f'(\boldsymbol{p})$ の (i, j) 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ である．

(2) 逆に各 f_i が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能である．

証明 (1) $f'(\boldsymbol{p})$ の第 i 行を A_i とすると $\dfrac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|}$ の第 i 成分は $\dfrac{f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{p}) - A_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|}$ だから

$$\left|\frac{f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{p}) - A_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|}\right| \leqq \left\|\frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|}\right\|$$

が成り立つ. $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ のとき, 右辺は 0 に近づくため $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{p}) - A_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = 0$ となり, f_i は $\boldsymbol{p}$ で微分可能で $f_i'(\boldsymbol{p}) = A_i$ である. A の (i,j) 成分は A_i の第 j 列だから命題 17.15 と偏微分の定義から $A_i\boldsymbol{e}_j = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ に等しくなる.

(2) A を $f_i'(\boldsymbol{p})$ を第 i 行とする $m \times n$ 行列とすれば, m 次元ベクトル $\dfrac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$ の第 i 成分は $\dfrac{f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{p}) - f_i'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$ だから仮定と命題 17.5 から $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = \boldsymbol{0}$ である. □

命題 17.18 $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ とし, $t \in (a,b)$ ならば $\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v} \in X$ であるとする. $\omega : (a,b) \to X$ を $\omega(t) = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}$ で定め, 関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ は $\omega(t)$ $(t \in (a,b))$ において微分可能であるとする. このとき, $\boldsymbol{v}$ の第 j 成分を v_j とすれば, 次の等式が成り立つ.

$$(f\circ\omega)'(t) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$$

証明 命題 17.17 から $f'(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) \end{pmatrix}$ である. 一方, 命題 17.15 から $(f\circ\omega)'(t) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f((\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})}{h} = f'(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ だから結果を得る. □

定理 17.19 (合成写像の微分法) $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, $Z \subset \boldsymbol{R}^l$ とする. $f : X \to Y$ が $\boldsymbol{p}$ で微分可能であり, $g : Y \to Z$ が $f(\boldsymbol{p})$ で微分可能ならば, 合成写像 $g\circ f : X \to Z$ も $\boldsymbol{p}$ で微分可能で, 次の等式が成り立つ.

$$(g\circ f)'(\boldsymbol{p}) = g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})$$

証明 写像 $\varepsilon_{f,f'(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}}$, $\varepsilon_{g,g'(f(\boldsymbol{p})),f(\boldsymbol{p})}$ を, それぞれ, $\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}$, $\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}$ で表すことにすれば, 命題 17.12 から

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{p}) + f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) \ \cdots \ (1) \\ g(\boldsymbol{y}) &= g(f(\boldsymbol{p})) + g'(f(\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{p})) + \|\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{p})\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{y}) \ \cdots \ (2) \end{aligned}$$

が成り立つ. (2) の等式の $\boldsymbol{y}$ に $f(\boldsymbol{x})$ を代入すれば次の等式が得られる.

$$g(f(\boldsymbol{x})) = g(f(\boldsymbol{p})) + g'(f(\boldsymbol{p}))(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})) + \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))$$

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ として, この等式の右辺の第 2 項の $f(\boldsymbol{x})$ に (1) の右辺を代入して, 両辺を $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$ で割って整理すれば

$$\frac{(g\circ f)(\boldsymbol{x}) - (g\circ f)(\boldsymbol{p}) - g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = g'(f(\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) + \frac{\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x})) \ \cdots \ (3)$$

が得られる. 従って $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ としたときに, 上式の右辺が $\boldsymbol{0}$ に近づくことが示されれば, $g\circ f : X \to Z$ は $\boldsymbol{p}$ で微分可能で, 定義 17.16 により, $(g\circ f)'(\boldsymbol{p}) = g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})$ であることがわかる.

三角不等式から (3) の右辺の長さについて, 次の不等式が成り立つ.

$$\left\| g'(f(\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) + \frac{\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x})) \right\| \leqq \|g'(f(\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| + \frac{\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} \left\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))\right\| \ \cdots \ (4)$$

まず, $A = g'(f(\boldsymbol{p}))$ として補題 16.13 を用いると $\|g'(f(\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| \leqq M\|\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\|$ を満たす定数 M があり, 仮定と命題 17.12 から $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{p}$ に近づくとき, この不等式の右辺は 0 に近づくため

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|g'(f(\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| = 0 \ \cdots \ (5)$$

である. 命題 17.13 から, $r, L > 0$ で $U_r(\boldsymbol{p}) \subset X$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < r$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$ を満たすものがあるため, $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < r$ ならば

$$\frac{\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} \left\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))\right\| \leqq L \left\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))\right\| \ \cdots \ (6)$$

が成り立つ．命題 17.13 から，f は $\boldsymbol{p}$ で連続だから，$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p})$ が成り立つため，仮定と命題 17.9 から，$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ である．従って $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}$ のとき，(6) の右辺は 0 に近づくため，

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\left\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))\right\| = 0 \ \cdots\ (7)$$

が成り立つ．(5), (7) と (4) から，$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}$ のとき，(3) の右辺は $\boldsymbol{0}$ に近づくため，主張は示された． □

上の定理で $Z=\boldsymbol{R}$ の場合を考える．$\boldsymbol{x}\in X$ に対し $f(\boldsymbol{x})\in Y$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表し，実数値関数 $f_i : X\to\boldsymbol{R}$ を考えれば，命題 17.17 の (1) から $m\times n$ 行列 $f'(\boldsymbol{p})$ の (i,j) 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ であり，$1\times m$ 行列 $g'(f(\boldsymbol{p}))$ の $(1,j)$ 成分は $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(f(\boldsymbol{p}))$ である．一方 $(g\circ f)'(\boldsymbol{p})$ の $(1,j)$ 成分は $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ だから，上で示した等式 $(g\circ f)'(\boldsymbol{p}) = g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})$ の両辺の $(1,j)$ 成分を比較すれば次の結果が得られる．

系 17.20 *$f : X\to Y$ が $\boldsymbol{p}$ で微分可能であり，$g : Y\to\boldsymbol{R}$ が $f(\boldsymbol{p})$ で微分可能ならば，次の等式が成り立つ．*

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial x_k}(f(\boldsymbol{p}))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$$

18　偏微分

補題 18.1 *$x_1,\dots,x_n$ を負でない実数とするとき，$x_1+\cdots+x_n \leqq \sqrt{n}\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ が成り立つ．*

証明 $\left(\sqrt{n}\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)^2 - (x_1+\cdots+x_n)^2 = \sum_{1\leqq i<j\leqq n}(x_i-x_j)^2 \geqq 0$ □

定理 18.2 *$f : X\to Y$ を写像とし，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し $f(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}^m$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表し，X で定義された実数値関数 $f_i : X\to\boldsymbol{R}$ を考える．$i=1,2,\dots,m$ に対し，f_i は X の各点ですべての変数に対して微分可能で，偏導関数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} : X\to\boldsymbol{R}$ は連続であるとする．このとき，f は X の各点で微分可能である．*

証明 命題 17.17 の (2) から $Y=\boldsymbol{R}$ の場合に対して主張を示せばよい．$\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\in X$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, p_j として，$g_i : [0,1]\to\boldsymbol{R}$ を

$$g_i(t) = f\left(\sum_{j=1}^{i-1}p_j\boldsymbol{e}_j + (p_i+t(x_i-p_i))\boldsymbol{e}_i + \sum_{j=i+1}^{n}x_j\boldsymbol{e}_j\right)$$

で定めると，g_i は $(0,1)$ の各点で微分可能であり，

$$g_i'(t) = (x_i-p_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{i-1}p_j\boldsymbol{e}_j + (p_i+t(x_i-p_i))\boldsymbol{e}_i + \sum_{j=i+1}^{n}x_j\boldsymbol{e}_j\right)\ \cdots\ (*)$$

が成り立つ．さらに $i=2,3,\dots,n$ に対し，$g_i(1)=g_{i-1}(0)$ であり，$g_1(1)=f(\boldsymbol{x})$, $g_n(0)=f(\boldsymbol{p})$ だから $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{n}(g_i(1)-g_i(0))$ が成り立つ．平均値の定理から $g_i(1)-g_i(0)=g_i'(\theta_i)$ を満たす $0<\theta_i<1$ があるため，$\boldsymbol{c}_i = \sum_{j=1}^{i-1}p_j\boldsymbol{e}_j + (p_i+\theta_i(x_i-p_i))\boldsymbol{e}_i + \sum_{j=i+1}^{n}x_j\boldsymbol{e}_j$ とおいて $(*)$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i-p_i) &= \sum_{i=1}^{n}\left(g_i(1)-g_i(0)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i-p_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(g_i'(\theta_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i-p_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right)(x_i-p_i)
\end{aligned}$$

である．$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ の連続性から，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ で $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{v}) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ を満たすものがある．$\|\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{p}\| = \sqrt{\theta_i^2(x_i - p_i)^2 + \sum_{j=i+1}^{n}(x_j - p_j)^2} \leqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$ だから $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ であり，これと上の計算および補題 18.1 から

$$\left|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i - p_i)\right| \leqq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right||x_i - p_i| < \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}|x_i - p_i| \leqq \varepsilon\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$$

が得られる．これは $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}$ とおけば $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} = 0$ が成り立つことを意味するため，f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能である． □

定義 18.3 X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とする．関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ と $1 \leqq i_s \leqq n$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ を満たす数列 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ に対し，f の r 次偏導関数

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}\ldots\partial x_{i_1}} : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

を次のように帰納的に定義する．f が X の各点で i_1 番目の変数に関して偏微分可能であるとき，$\dfrac{\partial^1 f}{\partial x_{i_1}}$ は $\boldsymbol{x} \in X$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x})$ に対応させる関数とする．$\dfrac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}}\ldots\partial x_{i_1}} : X \to \boldsymbol{R}$ $(r \geqq 2)$ が定まり，X の各点で i_r 番目の変数に関して偏微分可能であるとき，$\dfrac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}\ldots\partial x_{i_1}}$ を

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}\ldots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}}\ldots\partial x_{i_1}}\right)(\boldsymbol{x})$$

によって定義する．

$1 \leqq i_s \leqq n$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ を満たす任意の数列 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ に対し，f の r 次偏導関数が定義できるとき，「f は X で r 回偏微分可能である」という．

定理 18.4 $\boldsymbol{p}$ を $X \subset \boldsymbol{R}^n$ の内点とする．また $f : X \to \boldsymbol{R}$ は X の各点で i 番目と j 番目の変数に関して偏微分可能であるとし，$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f}{\partial x_j} : X \to \boldsymbol{R}$ がともに連続であるとする．さらに，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : X \to \boldsymbol{R}$ が存在して，$\boldsymbol{p} \in X$ において連続ならば $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ は $\boldsymbol{p}$ で i 番目の変数に関して偏微分可能であり，$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{p}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})$ が成り立つ．

証明 仮定から $U_r(\boldsymbol{p}) \subset X$ を満たす $r > 0$ がある．$J \subset \boldsymbol{R}^2$ を $J = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |x|, |y| < \dfrac{r}{\sqrt{2}} \right\}$ で定め，$F : J \to \boldsymbol{R}$ を

$$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + y\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{p} + y\boldsymbol{e}_j) + f(\boldsymbol{p})$$

で定義する．$t \in \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ を固定して $\varphi_t : \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi_t(x) = f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i)$ で定めれば，$\varphi_t'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i)$ および $\varphi_t(x) - \varphi_t(0) = F\left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つ．$s \in \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ に対し，0 と s で挟まれた区間において平均値の定理を用いると $0 < \theta_1 < 1$ で $\varphi_t(s) - \varphi_t(0) = s\varphi_t'(\theta_1 s)$ をみたすものがあるため，

$$F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = s\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i)\right) \cdots (1)$$

が成り立つ．ここで θ_1 は s と t の両方に依存することに注意する．さらに，s, t を固定して $\psi : \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \to \boldsymbol{R}$ を $\psi(u) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + u\boldsymbol{e}_j)$ で定義すれば，仮定から ψ は微分可能で，0 と t で挟まれる区間で平均値の定理を

用いると, $0<\theta_2<1$ で $\psi(t)-\psi(0)=t\psi'(\theta_2 t)$ を満たすものがある. $\psi'(u)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p}+\theta_1 s\boldsymbol{e}_i+u\boldsymbol{e}_j)$ だから

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p}+\theta_1 s\boldsymbol{e}_i+t\boldsymbol{e}_j)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p}+\theta_1 s\boldsymbol{e}_i)=t\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p}+\theta_1 s\boldsymbol{e}_i+\theta_2 t\boldsymbol{e}_j)\ \cdots\ (2)$$

が得られる. (1), (2) から

$$F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)=st\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p}+\theta_1 s\boldsymbol{e}_i+\theta_2 t\boldsymbol{e}_j)\ \cdots\ (3)$$

を満たす $0<\theta_1,\theta_2<1$ の存在が示せたことになる. $s,t\in\left(-\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ を固定して $\lambda_s:\left(-\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\to\boldsymbol{R}$ を $\lambda_s(y)=f(\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{e}_i+y\boldsymbol{e}_j)-f(\boldsymbol{p}+y\boldsymbol{e}_j)$ で定めて, 0 と t で挟まれた区間で平均値の定理を用いれば, $\lambda_s(t)-\lambda_s(0)=t\lambda_s'(\theta_3 t)$ を満たす $0<\theta_3<1$ がある. $\lambda_s(t)-\lambda_s(0)=F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)$, $\lambda_s'(y)=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{e}_i+y\boldsymbol{e}_j)-\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+y\boldsymbol{e}_j)$ より

$$F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)=t\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{e}_i+\theta_3 t\boldsymbol{e}_j)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+\theta_3 t\boldsymbol{e}_j)\right)\ \cdots\ (4)$$

である. 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ の $\boldsymbol{p}$ における連続性から $0<\delta<1$ で, $x^2+y^2<\delta^2$ ならば

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p}+x\boldsymbol{e}_i+y\boldsymbol{e}_j)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})\right|<\varepsilon\ \cdots\ (5)$$

を満たすものがある. 従って, $s^2+t^2<\delta^2$ ならば (3), (4), (5) から

$$\left|\frac{1}{s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{e}_i+\theta_3 t\boldsymbol{e}_j)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+\theta_3 t\boldsymbol{e}_j)\right)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})\right|=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p}+\theta_1 s\boldsymbol{e}_i+\theta_2 t\boldsymbol{e}_j)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})\right|<\varepsilon$$

が成り立つ. $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ の連続性から, 上式で $t\to 0$ とすれば $|s|<\delta$ ならば

$$\left|\frac{1}{s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{e}_i)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})\right)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})\right|\leqq\varepsilon$$

が成り立つことが分かる. ε は任意だから上式は定理の主張が成り立つことを示している. □

上の定理から, f が r 回偏微分可能で r 次までの偏導関数がすべて連続ならば r 次偏導関数は偏微分する変数の順序には依存しないことが分かる.

19　多変数関数のテイラーの定理

X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $f:X\to\boldsymbol{R}$ を関数とする. $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ の第 i 成分を v_i とし, f がすべての変数について偏微分可能であるとき, 関数 $\left(v_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+v_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)f:X\to\boldsymbol{R}$ を

$$\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\right)(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

で定義する. 帰納的に, f が r 回偏微分可能であるとき $\left(v_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+v_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f:X\to\boldsymbol{R}$ を

$$\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{r-1}f\right)$$

で定める.

補題 19.1 $f : X \to \boldsymbol{R}$ は r 回偏微分可能で, r 次までの偏導関数がすべて連続であるとする. $\boldsymbol{p} \in X$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$, $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対し, $t \in (a, b)$ ならば $\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v} \in X$ であるとき, $g : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ を $g(t) = f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$ で定める. このとき, g の r 次導関数は

$$g^{(r)}(t) = \left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f\right)(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$$

で与えられる.

証明 定理 18.2 により, f は X の各点で微分可能だから, 命題 17.18 により,

$$g'(t) = \left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right) f\right)(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$$

となり, $r = 1$ のとき主張は正しい. $g^{(r-1)}(t) = \left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{r-1} f\right)(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$ が成り立つと仮定して, $h : X \to \boldsymbol{R}$ を

$$h = \left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{r-1} f$$

によって定義すると, $g^{(r-1)}(t) = h(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$ である. この両辺 t で微分すれば, 再び命題 17.18 から

$$\begin{aligned} g^{(r)}(t) = h'(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} &= \left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right) h\right)(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) \\ &= \left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f\right)(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

となるため, r のときも主張が成り立つ. □

補題 19.2 $l_1, \ldots, l_k$ は正の整数とし, $r = l_1 + \cdots l_k$ とおくと, 次の等式が成り立つ.

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots (l_s - 1)! \cdots l_k!} = \frac{r!}{l_1! \cdots l_k!}$$

証明 k による帰納法で示す. $k = 1$ のとき, 主張は明らかに成り立つ. $k - 1$ のとき, 主張が正しいと仮定すると,

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{k} \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots (l_s - 1)! \cdots l_k!} &= \sum_{s=1}^{k-1} \frac{(r - l_k - 1)!}{l_1! \cdots (l_s - 1)! \cdots l_{k-1}!} \frac{(r-1)!}{l_k!(r - l_k - 1)!} + \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots l_{k-1}!(l_k - 1)!} \\ &= \frac{(r - l_k)!}{l_1! \cdots l_{k-1}!} \frac{(r-1)!}{l_k!(r - l_k - 1)!} + \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots l_{k-1}!(l_k - 1)!} = \frac{r!}{l_1! \cdots l_{k-1}! l_k!} \end{aligned}$$

となって, k のときも主張は成り立つ. □

命題 19.3 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が r 回偏微分可能で, r 次までの偏導関数がすべて連続であるとき, $\boldsymbol{x} \in X$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f\right)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = r} \frac{r!}{i_1! \cdots i_n!} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x})$$

証明 r による帰納法で示す. $r = 1$ のときは主張は明らかに成り立つ. $r - 1$ のとき主張が正しいと仮定すると,

$$\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f\right)(\boldsymbol{x}) = \sum_{j_1 + \cdots + j_n = r-1} \frac{(r-1)!}{j_1! \cdots j_n!} \left(\sum_{s=1}^{n} v_1^{j_1} \cdots v_s^{j_s + 1} \cdots v_n^{j_n} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_s^{j_s + 1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(\boldsymbol{x})\right)$$

ここで $i_1 + \cdots + i_n = r$ を満たす負でない整数 $i_1, \ldots, i_n$ に対して, 上式の $v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x})$ の項を集めると, その係数は $\sum_{1 \le s \le n, i_s \ne 0} \frac{(r-1)!}{i_1! \cdots (i_s - 1)! \cdots i_n!}$ だから補題 19.2 により, $\frac{r!}{i_1! \cdots i_n!}$ に等しくなる. 従って, 上式の左辺は $\sum_{i_1 + \cdots + i_n = r} \frac{r!}{i_1! \cdots i_n!} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x})$ となって r のときも主張が成り立つ. □

定理 19.4 *(テイラーの定理)* $f : X \to \boldsymbol{R}$ が r 回偏微分可能で, r 次までの偏導関数がすべて連続であるとする. $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \in X$ に対し, $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ線分は X に含まれるとするとき, $0 < \theta < 1$ で,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{p}) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1 - p_1)^{i_1} \cdots (x_n - p_n)^{i_n} \\ &\quad + \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}))(x_1 - p_1)^{i_1} \cdots (x_n - p_n)^{i_n} \end{aligned}$$

を満たすものがある. ここで, x_i, p_i はそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{p}$ の第 i 成分である.

証明 $g : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ を $g(t) = f(\boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}))$ で定めれば, g に関するテイラーの定理から,

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{r!} g^{(r)}(\theta)$$

を満たす $0 < \theta < 1$ がある. 補題 19.1, 命題 19.3 により,

$$\begin{aligned} g^{(k)}(t) &= \left(\left((x_1 - p_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - p_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + (x_n - p_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f \right) (\boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})) \\ &= \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \frac{k!}{i_1! \cdots i_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}))(x_1 - p_1)^{i_1} \cdots (x_n - p_n)^{i_n} \end{aligned}$$

だから, これを上式に代入すれば結果が得られる. □

補題 19.5

$$(x_1 + \cdots + x_n)^r = \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{r!}{i_1! \cdots i_n!} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

証明 n による帰納法で示す. $n = 1$ の場合は主張は明らか. $n - 1$ のときに主張が成立するならば, 二項定理から,

$$\begin{aligned} (x_1 + \cdots + x_n)^r &= \sum_{s+i_n=r} \frac{r!}{s! i_n!} (x_1 + \cdots + x_{n-1})^s x_n^{i_n} = \sum_{s+i_n=r} \frac{r!}{s! i_n!} \left(\sum_{i_1+\cdots+i_{n-1}=s} \frac{s!}{i_1! \cdots i_{n-1}!} x_1^{i_1} \cdots x_{n-1}^{i_{n-1}} \right) x_n^{i_n} \\ &= \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{r!}{i_1! \cdots i_n!} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \end{aligned}$$

となって, n のときも主張が成立する. □

系 19.6 定理 *19.4* と同じ仮定のもとで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で, $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$\left| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \sum_{k=1}^{r} \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1 - p_1)^{i_1} \cdots (x_n - p_n)^{i_n} \right| < \varepsilon \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|^r$$

を満たすようなものがある.

証明 $\dfrac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}$ の連続性から任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば $i_1 + \cdots + i_n = r$ を満たすすべての負でない整数 $i_1, \ldots, i_n$ に対して

$$\left| \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}) \right| < \frac{r!}{\sqrt{n^r}} \varepsilon$$

を満たすようなものがある. テイラーの定理と補題 19.5, 補題 18.1 を用いると, $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
&\left| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \sum_{k=1}^{r} \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \frac{1}{i_1!\cdots i_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n} \right| \\
&= \left| \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{1}{i_1!\cdots i_n!} \left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})) - \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}) \right) (x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n} \right| \\
&\leqq \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{1}{i_1!\cdots i_n!} \left| \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})) - \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}) \right| |x_1-p_1|^{i_1}\cdots|x_n-p_n|^{i_n} \\
&< \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{1}{i_1!\cdots i_n!} |x_1-p_1|^{i_1}\cdots|x_n-p_n|^{i_n} \frac{r!}{\sqrt{n^r}}\varepsilon = (|x_1-p_1|+\cdots+|x_n-p_n|)^r \frac{\varepsilon}{\sqrt{n^r}} \leqq \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^r
\end{aligned}$$

□

20　多変数関数の極大・極小

定義 20.1 X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を関数とする. $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $\varepsilon > 0$ で "$\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \varepsilon$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{p})$"を満たすものがあるとき, f は $\boldsymbol{p}$ で極大であるといい, $f(\boldsymbol{p})$ を f の極大値という. また, $\varepsilon > 0$ で "$\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \varepsilon$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \geqq f(\boldsymbol{p})$"を満たすものがあるとき, f は $\boldsymbol{p}$ で極小であるといい, $f(\boldsymbol{p})$ を f の極小値という.

命題 20.2 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X で定義された実数値関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が X の内点 $\boldsymbol{p}$ において微分可能であり, 極大または極小ならば $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = 0$ である.

証明 $U_r(\boldsymbol{p}) \subset X$ を満たす $r > 0$ をとり, $f_j : (-r, r) \to \boldsymbol{R}$ を $f_j(t) = f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{e}_j)$ で定める. f が $\boldsymbol{p}$ で極大 (極小) ならば f_j は 0 で極大 (極小) だから 1 変数関数の場合の結果により $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = f_j'(0) = 0$ となる. □

n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, ${}^t\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ を $n\times 1$ 行列とみなしたときの転置行列とする. 実数を成分にもつ n 次対称行列 A に対し, 関数 $Q_A : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を $Q_A(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ で定義する. このとき, $r \in \boldsymbol{R}$ に対して, $Q_A(r\boldsymbol{x}) = r^2 Q_A(\boldsymbol{x})$ が成り立ち, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分を x_j とし, A の (i,j) 成分を a_{ij} とすれば, $a_{ji} = a_{ij}$ より

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqq i<j\leqq n} 2a_{ij}x_ix_j$$

が成り立つことがわかる.

また, X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし, X 上の関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ は 2 回偏微分可能で 2 次までの偏導関数がすべて連続であるとする. $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p})$ が (i,j) 成分であるような n 次正方行列を $f''(\boldsymbol{p})$ とする. すなわち

$$f''(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{p}) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(\boldsymbol{p}) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{p})
\end{pmatrix}.$$

このとき $f''(\boldsymbol{p})$ は n 次対称行列であることに注意する．さらに $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \in X$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, p_j とすれば，次の等式が成り立つことが容易に確かめられるため，

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1+\cdots+i_n=1} \frac{1}{i_1!\cdots i_n!} \frac{\partial f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n} &= f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) \\
\sum_{i_1+\cdots+i_n=2} \frac{1}{i_1!\cdots i_n!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n} &= \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})
\end{aligned}$$

$r=2$ の場合の系 19.6 は次のようになる．

系 20.3 *X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし，X 上の関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ は 2 回偏微分可能で 2 次までの偏導関数がすべて連続であるとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ で，$0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば次の不等式を満たすものがある．*

$$\left| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) - \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) \right| < \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2$$

命題 20.4 *X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし，X 上の関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ は 2 回偏微分可能で 2 次までの偏導関数がすべて連続であるとする．さらに $\boldsymbol{p} \in X$ に対し，$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}) = 0$ が成り立つとする．*
(1) $K > 0$ で，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}) \geqq K\|\boldsymbol{x}\|^2$ を満たすものが存在するとき f は $\boldsymbol{p}$ で極小である．
(2) $K < 0$ で，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}) \leqq K\|\boldsymbol{x}\|^2$ を満たすものが存在するとき f は $\boldsymbol{p}$ で極大である．
(3) $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u}) > 0$, $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}) < 0$ を満たす $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ があるとき，f は $\boldsymbol{p}$ で極大でも極小でもない．

証明 仮定と命題 17.17 の (1) から $f'(\boldsymbol{p}) = O$ だから，系 20.3 によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ で，$0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば次の不等式 $(*)$ を満たすものがある．

$$\frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) - \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 < f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) < \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) + \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 \ \cdots\ (*)$$

(1) $\varepsilon = \dfrac{K}{3}$ に対して $(*)$ を満たすような $\delta > 0$ をとる．仮定より $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) \geqq K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2$ が成り立つため，$(*)$ によって，$0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) > \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) - \frac{K}{3}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 \geqq \frac{K}{6}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 > 0$$

が成り立つ．故に f は $\boldsymbol{p}$ で極小である．

(2) $\varepsilon = -\dfrac{K}{3}$ に対して $(*)$ を満たすような $\delta > 0$ をとる．仮定より $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) \leqq K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2$ が成り立つため，$(*)$ によって，$0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) < \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) - \frac{K}{3}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 \leqq \frac{K}{6}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 < 0$$

が成り立つ．故に f は $\boldsymbol{p}$ で極大である．

(3) 任意の実数 r に対して $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(r\boldsymbol{x}) = r^2 Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x})$ が成り立つため，$\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$, $\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ を，それぞれ $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ とおくことによって $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = 1$ と仮定してよい．$\varepsilon = \dfrac{1}{3}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u})$ に対して $(*)$ を満たすような $\delta > 0$ をとる．$0 < |t| < \delta$ ならば $0 < \|(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{p}\| = |t| < \delta$ だから $(*)$ によって，

$$f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{p}) > \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(t\boldsymbol{u}) - \frac{1}{3}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u})\|t\boldsymbol{u}\|^2 = \frac{1}{2}t^2Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{3}t^2Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{6}t^2Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u}) > 0$$

が成り立つ．従って $\boldsymbol{p}$ において f は極大ではない．$\varepsilon = -\dfrac{1}{3}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v})$ に対して $(*)$ を満たすような $\delta > 0$ をとる．$0 < |t| < \delta$ ならば $0 < \|(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{p}\| = |t| < \delta$ だから $(*)$ によって，

$$f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p}) < \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(t\boldsymbol{v}) - \frac{1}{3}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v})\|t\boldsymbol{v}\|^2 = \frac{1}{2}t^2Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{3}t^2Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{6}t^2Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}) < 0$$

が成り立つ．従って $\boldsymbol{p}$ において f は極小でもない． □

注意 20.5 上の結果から, f が $f'(\boldsymbol{p})=O$ を満たす点 $\boldsymbol{p}\in X$ で極値をとるかどうかは, n 次対称行列 $A=f''(\boldsymbol{p})$ から定まる, n 変数の「*2* 次関数」Q_A の挙動から判定できる *(ことがある)*. 実際, 線形代数学の結果を用いると次の *(1), (2), (3)* は互いに同値, *(4), (5), (6)* は互いに同値, *(7)* と *(8)* は同値であることが示される.

(1) $K>0$ で, 任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_A(\boldsymbol{x})\geqq K\|\boldsymbol{x}\|^2$ を満たすものが存在する.

(2) $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ が零ベクトルでないならば $Q_A(\boldsymbol{x})>0$ である.

(3) A の固有値はすべて正の実数である.

(4) $K<0$ で, 任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_A(\boldsymbol{x})\leqq K\|\boldsymbol{x}\|^2$ を満たすものが存在する.

(5) $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ が零ベクトルでないならば $Q_A(\boldsymbol{x})<0$ である.

(6) A の固有値はすべて負の実数である.

(7) $Q_A(\boldsymbol{u})>0$, $Q_A(\boldsymbol{v})<0$ を満たす $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ がある.

(8) A が正の固有値と負の固有値をもつ.

補題 20.6 *2* 次対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$ に対して次のことが成り立つ.

(1) $a>0$, $ac-b^2>0$ の場合, 任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2$ に対して $Q_A(\boldsymbol{x})\geqq\dfrac{ac-b^2}{a+c}\|\boldsymbol{x}\|^2$ である.

(2) $a<0$, $ac-b^2>0$ の場合, $Q_A(\boldsymbol{x})\leqq\dfrac{ac-b^2}{a+c}\|\boldsymbol{x}\|^2$ である.

(3) $ac-b^2<0$ ならば $Q_A(\boldsymbol{u})>0$, $Q_A(\boldsymbol{v})<0$ を満たす $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^2$ がある.

証明 (1) $Q_A\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2\end{smallmatrix}\right)=a\left(x_1+\dfrac{b}{a}x_2\right)^2+\dfrac{ac-b^2}{a}x_2^2$ より $P=\begin{pmatrix}\sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=P\boldsymbol{x}$ とおけば, P は正則で $Q_A(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{y}\|^2$ である. 補題 16.13 から $\|\boldsymbol{x}\|^2=\|P^{-1}\boldsymbol{y}\|^2\leqq\dfrac{a+c}{ac-b^2}\|\boldsymbol{y}\|^2$ だから $Q_A(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{y}\|^2\geqq\dfrac{ac-b^2}{a+c}\|\boldsymbol{x}\|^2$.

(2) この場合, $-A$ は (1) の条件を満たし, $Q_A(\boldsymbol{x})=-Q_{-A}(\boldsymbol{x})$ だから (1) より結果が得られる.

(3) $a\neq 0$ ならば $Q_A(\boldsymbol{e}_1)Q_A\left(-\dfrac{b}{a}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\right)=ac-b^2<0$ だから $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{e}_1$, $-\dfrac{b}{a}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ のいずれかとすればよい. $a=0$ ならば $b\neq 0$ だから $Q_A\left(\left(-\dfrac{c}{2b}-1\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\right)Q_A\left(\left(-\dfrac{c}{2b}+1\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\right)=-4b^2<0$ だから $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は $\left(-\dfrac{c}{2b}-1\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\left(-\dfrac{c}{2b}+1\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ のいずれかとすればよい. □

上の補題で (1) の場合, $a>0$ かつ $ac>b^2\geqq 0$ だから $c>0$ である. 従って $a+c>0$ となるため, $K=\dfrac{ac-b^2}{a+c}$ とおけば, $K>0$ である. 同様に (2) の場合, $a<0$ かつ $ac>b^2\geqq 0$ だから $c<0$ である. 従って $a+c<0$ となるため, $K=\dfrac{ac-b^2}{a+c}$ とおけば, $K<0$ である. このことから, $X\subset\boldsymbol{R}^2$ の場合, 補題 20.6 を $A=f''(\boldsymbol{p})$ に対して用いると, 命題 20.4 の結果から, 次の定理が得られる.

定理 20.7 $X\subset\boldsymbol{R}^2$ とし, $f:X\to\boldsymbol{R}$ は *2* 回偏微分可能で *2* 次偏導関数は連続であるとする. $\boldsymbol{p}\in X$ に対し, 十分小さな $r>0$ をとれば「$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<r$ ならば $\boldsymbol{x}\in X$」が成り立ち $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p})=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{p})=0$ とする.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p})>0$ かつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p})\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{p})-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\boldsymbol{p})\right)^2>0$ ならば f は $\boldsymbol{p}$ で極大.

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p})<0$ かつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p})\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{p})-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\boldsymbol{p})\right)^2>0$ ならば f は $\boldsymbol{p}$ で極小.

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p})\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{p})-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\boldsymbol{p})\right)^2<0$ ならば f は $\boldsymbol{p}$ で極大でも極小でもない.

21 逆写像定理と陰関数定理

まず, 開集合に関するいくつかの性質示す.

命題 21.1 X, Y が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合ならば $X \cap Y$ も開集合である.

証明 $\boldsymbol{p} \in X \cap Y$ とする. $r_1, r_2 > 0$ で $U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \subset X$, $U_{r_2}(\boldsymbol{p}) \subset Y$ を満たすものがある. r_1, r_2 の小さい方を r とすれば $U_r(\boldsymbol{p}) \subset X \cap Y$ となるため, $\boldsymbol{p}$ は $X \cap Y$ の内点である. □

一般に X, Y を集合とし, 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとき, Y の部分集合 Z に対し $f^{-1}(Z) = \{x \in X |\, f(x) \in Z\}$ とおいて, これを f による Z の逆像と呼ぶ.

命題 21.2 X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とする. 写像 $f : X \to Y$ が連続ならば, Y に含まれる $\boldsymbol{R}^m$ の任意の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合である.

証明 $\boldsymbol{p} \in f^{-1}(O)$ ならば $f(\boldsymbol{p}) \in O$ だから $\varepsilon > 0$ で $U_\varepsilon(f(\boldsymbol{p})) \subset O$ を満たすものがある. f の連続性から $\delta > 0$ で,「$\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{p})$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in U_\varepsilon(f(\boldsymbol{p}))$」を満たすものがある. よって $\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{p})$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in O$ だから $U_\delta(\boldsymbol{p}) \subset f^{-1}(O)$ となるため $\boldsymbol{p}$ は $f^{-1}(O)$ の内点である. 従って $f^{-1}(O)$ は開集合である. □

1 変数の連続関数の場合と同ように, 多変数関数の場合も次の「最大値・最小値の定理」が成り立つ.

定理 21.3 X が $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合ならば, X で定義された連続な実数値関数は最大値と最小値をもつ.

$M_n(\boldsymbol{R})$ を実数を成分とする n 次正方行列全体からなる集合とする. これを n^2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ と同一視して, 内積を定義すると, 行列式を対応させる関数 $\det : M_n(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ は連続である.

補題 21.4 X を $\boldsymbol{R}^k$ の開集合とし, 連続写像 $f : X \to M_n(\boldsymbol{R})$ が与えられているとき, $f(\boldsymbol{x})$ が正則行列であるようなベクトル全体からなる X の部分集合は $\boldsymbol{R}^k$ の開集合である.

証明 $\boldsymbol{R} - \{0\}$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合であり, 連続写像の合成写像 $f \circ \det : X \to \boldsymbol{R}$ は連続だから, 命題 21.2 により $(f \circ \det)^{-1}(\boldsymbol{R} - \{0\})$ は X の開集合である. この集合は $f(\boldsymbol{x})$ が正則行列であるようなベクトル全体からなる X の部分集合に他ならない. □

$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X の任意の 2 点を結ぶ線分が X に含まれるとき X は凸であると言う.

定義 21.5 X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, Y を $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合とする. 写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}^m$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表すことにする. $\boldsymbol{x}$ を $f_i(\boldsymbol{x})$ に対応させることにより, 関数 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ が定まるが, f_i が r 次までのすべての偏導関数をもち, それらがすべて連続であるとき, f を C^r 級写像という.

補題 21.6 X を $\boldsymbol{R}^n$ の凸である開集合, Y を $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合, $f : X \to Y$ を C^1 級写像とする. 実数 M は, すべての $\boldsymbol{x} \in X$ と $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\left| \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \right| \leqq M$ を満たすとする. このとき, すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| \leqq mnM\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

証明 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, y_j として, $g_{ik} : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ を

$$g_{ik}(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j \boldsymbol{e}_j + (y_k + t(x_k - y_k))\boldsymbol{e}_k + \sum_{j=k+1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j\right)$$

で定めると, g_{ik} は $(0,1)$ の各点で微分可能であり,

$$g'_{ik}(t) = (x_k - y_k)\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j \boldsymbol{e}_j + (y_k + t(x_k - y_k))\boldsymbol{e}_k + \sum_{j=k+1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j\right) \cdots (*)$$

が成り立つ. さらに $k = 2,3,\ldots,n$ に対し, $g_{ik}(1) = g_{i\,k-1}(0)$ であり, $g_{i1}(1) = f_i(\boldsymbol{x})$, $g_{in}(0) = f_i(\boldsymbol{y})$ だから $f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{y}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(g_{ik}(1) - g_{ik}(0))$ が成り立つ. 平均値の定理から $g_{ik}(1) - g_{ik}(0) = g'_{ik}(\theta_{ik})$ を満たす $0 < \theta_{ik} < 1$ があるため, $\boldsymbol{c}_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{k-1} y_j\boldsymbol{e}_j + (y_k + \theta_{ik}(x_k - y_k))\boldsymbol{e}_k + \sum\limits_{j=k+1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j$ とおいて $(*)$ に注意すれば,

$$|f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{y})| = \left|\sum_{k=1}^{n}(g_{ik}(1) - g_{ik}(0))\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} g'_{ik}(\theta_{ik})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{c}_{ik})(x_k - y_k)\right| \leqq \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{c}_{ik})\right||x_k - y_k|$$

より, $|f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{y})| \leqq \sum\limits_{k=1}^{n} M|x_k - y_k|$ である. 従って命題 16.7 により

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| \leqq \sum_{i=1}^{m}|f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{y})| \leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} M|x_k - y_k| \leqq mnM\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

□

定理 21.7 *(逆写像定理)* X, Y を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $f : X \to Y$ を C^r 級写像 $(r \geqq 1)$ とする. $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $f'(\boldsymbol{p})$ が正則行列ならば, $\boldsymbol{p}$ を含む開集合 U と $f(\boldsymbol{p})$ を含む開集合 V で, f は U から V の上への *1* 対 *1* 写像であり, 逆写像 $f^{-1} : V \to U$ も C^r 級写像になるものがとれる. このとき, $\boldsymbol{x} \in U$ に対し, $(f^{-1})'(f(\boldsymbol{x})) = f'(\boldsymbol{x})^{-1}$ が成り立つ.

証明 $f'(\boldsymbol{p}) = E_n$ を満たす f に対して主張が示されたとする. 一般の f に対しては, $g : X \to \boldsymbol{R}^n$ を $g(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{p})^{-1}f(\boldsymbol{x})$ で定めれば, $g'(\boldsymbol{p}) = f'(\boldsymbol{p})^{-1}f'(\boldsymbol{p}) = E_n$, $f = T\circ g$ ($T : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ は $T(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}$ で与えられる同型写像) だから f に対する主張が示される. 従って以下では $f'(\boldsymbol{p}) = E_n$ の場合を考える.

もし, $r_1 > 0$ で「$\boldsymbol{x} \in U_{r_1}(\boldsymbol{p})$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{p})$」を満たすものが存在しないならば, 各 $n = 1,2,\ldots$ に対して $\boldsymbol{x}_n \in U_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{p}$ で $f(\boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{p})$ を満たすものがある. このとき, $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{p}$ であるが,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{p}) - f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|}{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|} = 1$$

となるため, これは $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\dfrac{\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} = 0$ と矛盾する. よって

[1] $\boldsymbol{x} \in U_{r_1}(\boldsymbol{p})$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{p})$

を満たす $r_1 > 0$ は存在する. $f' : X \to M_n(\boldsymbol{R})$ に対し補題 21.4 を用いると, $f'(\boldsymbol{p})$ は正則行列だから $r_2 > 0$ で

[2] $\boldsymbol{x} \in U_{r_2}(\boldsymbol{p})$ ならば $f'(\boldsymbol{x})$ は正則行列.

を満たすものがある. また, f は C^1 級写像だから $r_3 > 0$ で

[3] $\boldsymbol{x} \in U_{r_3}(\boldsymbol{p})$ ならば, すべての $i, j = 1,2,\ldots,n$ に対して $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) - \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})\right| < \dfrac{1}{2n^2}$

を満たすものがとれる.

$\varphi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ で定義される写像 $\varphi : U_{r_3}(\boldsymbol{p}) \to \boldsymbol{R}^n$ に補題 21.6 を用いると, $\varphi'(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x}) - E_n = f'(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{p})$ と [3] により $M = \dfrac{1}{2n^2}$ ととれるため, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U_{r_3}(\boldsymbol{p})$ に対して $\|(f(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{x}_1) - (f(\boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{x}_2)\| \leqq \dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|$ が成り立つ. 三角不等式により $\|(f(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{x}_1) - (f(\boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{x}_2)\| + \|f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1)\| \geqq \|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|$ だから上の不等式から $\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2\| \geqq \|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}\| - \|f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x})\|$ が得られ, 次の主張が成り立つ.

[4] $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U_{r_3}(\boldsymbol{p})$ ならば $\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\| \leqq 2\|f(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_1)\|$

r を $\dfrac{r_1}{2}, \dfrac{r_2}{2}, \dfrac{r_3}{2}$ の中で一番小さいものとする. $S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ を $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n |\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| = \varepsilon\}$ で定めれば, これは $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合である. 実際 $S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ が有界であることは明らかであり, 補集合 $\boldsymbol{R}^n - S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ の各点はすべて内点であるため, $\boldsymbol{R}^n - S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ は開集合である. $\psi : S(\boldsymbol{p};r) \to \boldsymbol{R}$ を $\psi(\boldsymbol{x}) = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\|$ で定義すれば最大値・最小値の定理によって, ψ は最小値をとる. この最小値を d とすれば [1] から $d > 0$ である. $\boldsymbol{x} \in S(\boldsymbol{p};r)$, $\boldsymbol{y} \in U_{\frac{d}{2}}(f(\boldsymbol{p}))$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \geqq d$, $\|\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{p})\| < \dfrac{d}{2}$ より $\|\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x})\| \geqq \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| - \|\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{p})\| > d - \dfrac{d}{2} = \dfrac{d}{2}$. 従って

[5] $\boldsymbol{x} \in S(\boldsymbol{p};r)$, $\boldsymbol{y} \in U_{\frac{d}{2}}(f(\boldsymbol{p}))$ ならば $\|\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x})\| > \dfrac{d}{2}$.

各 $\boldsymbol{y} \in U_{\frac{d}{2}}(f(\boldsymbol{p}))$ に対し, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in U_r(\boldsymbol{p})$ がただ 1 つ存在することを示す. $\overline{U}_\varepsilon(\boldsymbol{p})$ を $\overline{U}_\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n |\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| \leqq \varepsilon\}$ で定めれば, これは $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合である. そこで $\xi : \overline{U}_r(\boldsymbol{p}) \to \boldsymbol{R}$ を $\xi(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x})\|^2$ で定めると, 最大値・最小値の定理によって, ξ は最小値をとる. $\boldsymbol{x} \in S(\boldsymbol{p};r)$ ならば [5] と $\boldsymbol{y} \in U_{\frac{d}{2}}(f(\boldsymbol{p}))$ から $\xi(\boldsymbol{x}) > \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 > \xi(\boldsymbol{p})$ となるため, ξ は $\overline{U}_r(\boldsymbol{p})$ の部分集合 $S(\boldsymbol{p};r)$ においては最小値をとらない. 従って ξ は $\overline{U}_r(\boldsymbol{p})$ の内点において最小値をとるため, 命題 20.2 から, $\xi'(\boldsymbol{x}) = O$ を満たす $\boldsymbol{x} \in U_r(\boldsymbol{p})$ がある. ここで $\xi'(\boldsymbol{x}) = -2({}^t\boldsymbol{y} - {}^t f(\boldsymbol{x}))f'(\boldsymbol{x})$ であり, [2] によって $f'(\boldsymbol{x})$ は正則行列だから, $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ である. さらに [4] により, $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x}$ はただ 1 つである.

$U = U_r(\boldsymbol{p}) \cap f^{-1}\left(U_{\frac{d}{2}}(f(\boldsymbol{p}))\right)$, $V = U_{\frac{d}{2}}(f(\boldsymbol{p}))$ とおくと, 命題 21.2 と, 命題 21.1 により U, V は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合であり, f は U から V の上への 1 対 1 写像である. この逆写像を $f^{-1} : V \to U$ とすると $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$ に対し, $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)$, $\boldsymbol{x}_2 = f^{-1}(\boldsymbol{y}_2)$ とおくと $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2 \in U$ だから [4] により

[6] $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$ ならば $\|f^{-1}(\boldsymbol{y}_2) - f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)\| \leqq 2\|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1\|$.

故に f^{-1} は連続である.

最後に f^{-1} の $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in U)$ における微分可能性を示す. f は $\boldsymbol{x}$ で微分可能だから, $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} : U \to \boldsymbol{R}^n$ を

$$\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \dfrac{f(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\|} & \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \end{cases}$$

で定めれば $\lim_{\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{x}} \varepsilon_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ であり, 任意の $\boldsymbol{z} \in U$ に対して $\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x})$ が成り立つ. $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y})$ であり, $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{z})$ とおくと $\boldsymbol{z} = f^{-1}(\boldsymbol{w})$ だから, 上式より次の等式が得られる.

$$\|f^{-1}(\boldsymbol{w}) - f^{-1}(\boldsymbol{y})\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w})) = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{y} - f'(\boldsymbol{x})(f^{-1}(\boldsymbol{w}) - f^{-1}(\boldsymbol{y})) \ \cdots (*)$$

[2] により, $f'(\boldsymbol{x})$ は正則行列だから $(*)$ の両辺に左から $f'(\boldsymbol{x})^{-1}$ をかけることによって

$$\|f^{-1}(\boldsymbol{w}) - f^{-1}(\boldsymbol{y})\|f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w})) = f'(\boldsymbol{x})^{-1}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}) - (f^{-1}(\boldsymbol{w}) - f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

が得られる. この等式の両辺を $\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}\|$ で割って, 適当に移項すれば

$$\frac{f^{-1}(\boldsymbol{w}) - (f^{-1}(\boldsymbol{y}) + f'(\boldsymbol{x})^{-1}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}))}{\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}\|} = -\frac{\|f^{-1}(\boldsymbol{w}) - f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}\|} f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))$$

と変形される. 従って $\lim_{\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{y}} \dfrac{\|f^{-1}(\boldsymbol{w}) - f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}\|} f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w})) = \boldsymbol{0}$ を示せば f^{-1} は $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ において微分可能で, $(f^{-1})'(f(\boldsymbol{x})) = f'(\boldsymbol{x})^{-1}$ が得られる. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in U$ ならば $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w} \in V$ だから [6] により $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{y}$ ならば $\dfrac{\|f^{-1}(\boldsymbol{w}) - f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}\|} \leqq 2$ である. また補題 16.13 により $\|f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))\| \leqq M\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))\|$ を満たす定数 M があるため, 次の不等式が成り立つ.

$$\left\| \frac{\|f^{-1}(\boldsymbol{w}) - f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}\|} f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w})) \right\| \leqq 2M\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))\| \ \cdots (**)$$

[6] により f^{-1} は連続だから $\lim_{\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{y}} f^{-1}(\boldsymbol{w}) = f^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$ であり, $\lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{x}} \varepsilon_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ だから命題 17.9 により

$$\lim_{\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{y}} \varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w})) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ. 故に $(**)$ から $\lim_{\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{y}} \dfrac{\|f^{-1}(\boldsymbol{w}) - f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}\|} f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w})) = \boldsymbol{0}$ が示されたことになる.

上で示したことから $\boldsymbol{y} \in V$ に対し, $(f^{-1})'(\boldsymbol{y}) = f'(f^{-1}(\boldsymbol{y}))^{-1}$ だから, f は f^{-1}, f' と $A \mapsto A^{-1}$ で与えられる写像の合成写像である. すでに示したように f^{-1} は連続写像であり, f は C^r 級写像 $(r \geqq 1)$ だから $(f^{-1})'$ は C^{r-1} 級写像となるため連続写像である. また $A \mapsto A^{-1}$ で与えられる写像も連続写像である. 従って, $(f^{-1})'$ は連続写像の合成写像になるため, 連続写像だから f^{-1} は C^1 級写像である. 帰納的に f^{-1} が C^{k-1} 級写像 $(2 \leqq k \leqq r)$ であると仮定すれば, f' と $A \mapsto A^{-1}$ で与えられる写像も C^{k-1} 級写像であることから $(f^{-1})'$ は C^{k-1} 級写像の合成写像になるため, C^{k-1} 級写像である. 従って f^{-1} は C^k 級写像となるため, 帰納法によって f^{-1} は C^r 級写像である.□

$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を x_j, $\boldsymbol{R}^m$ のベクトル $\boldsymbol{y}$ の第 j 成分を y_j とするとき, $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$ によって, 第 j 成分が $j \leqq n$ ならば x_j, $j \geqq n+1$ ならば y_{j-n} である $\boldsymbol{R}^{n+m}$ のベクトルを表すことにする. さらに $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X, $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合 Y に対し, $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の部分集合 $X \times Y$ を $X \times Y = \left\{\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \middle|\, \boldsymbol{x} \in X,\ \boldsymbol{y} \in Y\right\}$ によって定義する.

補題 21.8 $r, r_1, r_2 > 0$, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ に対し, $r \leqq r_1, r_2$ ならば

$$U_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(\boldsymbol{p}) \times U_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(\boldsymbol{q}) \subset U_r\left(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)\right) \subset U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_2}(\boldsymbol{q})$$

が成り立つ. 従って $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)$ が $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の部分集合 X の内点ならば $U_r(\boldsymbol{p}) \times U_r(\boldsymbol{q}) \subset X$ を満たす $r > 0$ がある.

証明 $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \in U_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(\boldsymbol{p}) \times U_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(\boldsymbol{q})$ ならば $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}\|^2 < \left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2$ だから $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \in U_r\left(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)\right)$.

$\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \in U_r\left(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)\right)$ ならば $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}\|^2 < r^2 \leqq r_1^2$, $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}\|^2 < r^2 \leqq r_2^2$ だから $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \in U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_2}(\boldsymbol{q})$. □

命題 21.9 X, Y がそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合ならば $X \times Y$ は $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である.

証明 任意の $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right) \in X \times Y$ に対し, $U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \subset X$, $U_{r_2}(\boldsymbol{q}) \subset Y$ を満たす $r_1, r_2 > 0$ が存在する. r を r_1, r_2 の小さい方とすれば, 補題 21.8 から, $U_r\left(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)\right) \subset U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_2}(\boldsymbol{q}) \subset X \times Y$ となるため $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)$ は $X \times Y$ の内点である. □

X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし, Z を $\boldsymbol{R}^k$ の部分集合とする. C^r 級写像 $F : X \times Y \to Z$ と $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \in X \times Y$ に対し $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ を (i, j) 成分とする $k \times n$ 行列を $D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ を (i, j) 成分とする $k \times m$ 行列を $D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$ で表すことにする.

補題 21.10 X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合, Z を $\boldsymbol{R}^k$ の部分集合とする. C^1 級写像 $F : X \times Y \to Z$ と $f : X \to Y$ に対し, 写像 $\psi : X \to Z$ を $\psi(\boldsymbol{x}) = F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ で定めると, ψ の $\boldsymbol{x} \in X$ における微分 $\psi'(\boldsymbol{x})$ は以下で与えられる.

$$\psi'(\boldsymbol{x}) = D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) + D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) f'(\boldsymbol{x})$$

証明 ψ は $g(\boldsymbol{x}) = \left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ によって定められる写像 $g : X \to X \times Y$ と $F : X \times Y \to Z$ の合成写像である.

$$F'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) & D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}, \qquad g'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} E_n \\ f'(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$$

となるため, 定理 17.19 から $\psi'(\boldsymbol{x}) = F'(g(\boldsymbol{x}))g'(\boldsymbol{x}) = F'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) g'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) & D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n \\ f'(\boldsymbol{x})\end{pmatrix} = D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) + D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) f'(\boldsymbol{x})$. □

定理 21.11 (陰関数定理) X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし, $F : X \times Y \to \boldsymbol{R}^m$ を C^r 級写像とする. $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} \in X \times Y$ は $F\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$ を満たし, $D_2F\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ が正則ならば, $\boldsymbol{p}$ を含み, X に含まれる $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U, $\boldsymbol{q}$ を含み, Y に含まれる $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 V と C^r 級写像 $f : U \to V$ で, $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}$ かつ, すべての $\boldsymbol{x} \in U$ に対して $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ は正則であり, $F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{0}$ を満たすものがある. さらに $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $f'(\boldsymbol{x}) = -D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}^{-1} D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ が成り立つ.

証明 $G : X \times Y \to \boldsymbol{R}^{n+m}$ を

$$G\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ F\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix}$$

で定めれば, これは C^r 級写像であり, $D_2F\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ は正則だから,

$$G'\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ D_1F\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} & D_2F\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} \end{pmatrix}$$

は正則行列である. 従って定理 21.7 から $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ を含む開集合 W と $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{0}}$ を含む開集合 Z で, G が W から Z の上への 1 対 1 写像であり, 逆写像 $G^{-1} : Z \to W$ が C^r 級写像になるものが存在する.

補題 21.8 から $U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_1}(\boldsymbol{q}) \subset W$ を満たす $r_1 > 0$ がある. 命題 21.9 から $U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_1}(\boldsymbol{q})$ は $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合だから $(G^{-1})^{-1}(U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_1}(\boldsymbol{q}))$ は G^{-1} の連続性と命題 21.2 から $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{0}}$ を含む $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である. 再び補題 21.8 から $U_{r_2}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_2}(\boldsymbol{0}) \subset (G^{-1})^{-1}(U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_1}(\boldsymbol{q}))$ を満たす $0 < r_2 \leqq r_1$ をとれば $U_{r_2}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_2}(\boldsymbol{0})$ は命題 21.9 により $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である. $W' = G^{-1}(U_{r_2}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_2}(\boldsymbol{0}))$ とおくと G の連続性と命題 21.2 から W' も $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である. $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in W'$ ならば $G\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in U_{r_2}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_2}(\boldsymbol{0}) \subset (G^{-1})^{-1}(U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_1}(\boldsymbol{0}))$ だから $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = G^{-1}\left(G\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) \in U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_1}(\boldsymbol{q})$ となるため, $W' \subset U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_1}(\boldsymbol{q})$ が成り立つ.

各 $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in U_{r_2}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_2}(\boldsymbol{0})$ に対し, $G^{-1}\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} g_1\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \\ g_2\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix}$ とおくと, $G\left(G^{-1}\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) = \binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$ だから $g_1\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}$, $F\begin{pmatrix} g_1\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \\ g_2\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}$ である. $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in U_{r_2}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_2}(\boldsymbol{0})$ ならば $G^{-1}\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in U_{r_1}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_1}(\boldsymbol{q})$ より $g_2\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in U_{r_1}(\boldsymbol{q})$ である. そこで, $U = U_{r_2}(\boldsymbol{p})$, $V = U_{r_1}(\boldsymbol{q})$ とおいて, $f : U \to V$ を $f(\boldsymbol{x}) = g_2\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{0}}$ で定めると, 上のことから $F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{0}$ が成り立ち, G^{-1} が C^r 級写像であることから f も C^r 級写像である. また, $G\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} = \binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{0}}$ だから $G^{-1}\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{0}} = \binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ である. 従って $f(\boldsymbol{p}) = g_2\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{q}$ である.

写像 $\mu : U_{r_2}(\boldsymbol{p}) \to M_m(\boldsymbol{R})$ を $\mu(\boldsymbol{x}) = D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ で定めると, μ は連続で, $\mu(\boldsymbol{p})$ は正則だから補題 21.4 により, $0 < r_3 \leqq r_2$ で, $\boldsymbol{x} \in U_{r_3}(\boldsymbol{p})$ ならば $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ は正則行列になるものが取れる. 従って r_2 を r_3 で置き換えて, U の各点で $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ は正則行列であるとしてよい.

写像 F, f に対して写像 $\psi : U \to \boldsymbol{R}^m$ を補題 21.10 のように定めれば, $\psi'(\boldsymbol{x}) = D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} + D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} f'(\boldsymbol{x})$ であるが, ψ は恒等的に $\boldsymbol{0}$ である写像だから, 任意の $\boldsymbol{x} \in U$ に対して $\psi'(\boldsymbol{x}) = O$ である. 故に $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} f'(\boldsymbol{x}) = -D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ が得られ, $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ は正則行列であったので, $f'(\boldsymbol{x}) = -D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}^{-1} D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ が成り立つ. □

注意 21.12 定理 *21.11* の条件の下で, U', V' を, それぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ を含む $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし, $g : U' \to V'$ を C^r 級写像 で, $g(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}$ かつ, すべての $\boldsymbol{x} \in U'$ に対して $F\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{0}$ を満たすものとする. 定理 *21.11* の証明における写像 $G : X \times Y \to \boldsymbol{R}^{n+m}$ を考えると, $\boldsymbol{x} \in U \cap U'$ ならば $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{0}} \in U \times \{\boldsymbol{0}\} \subset U_{r_2}(\boldsymbol{p}) \times U_{r_2}(\boldsymbol{0}) \subset W$ だから $G\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})} = \binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{0}} = G\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ の各辺を G^{-1} で写すことによって, $\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})} = G^{-1}\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{0}} = \binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ を得る. 従って, $\boldsymbol{x} \in U \cap U'$ ならば $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ となるため, 定理 *21.11* の条件を満たす写像が *2* つあれば, それらの定義域の共通部分に属する各ベクトルを同じベクトルに写す.

定理 21.11 において, とくに $m = 1$ で Y が $\boldsymbol{R}$ の開集合の場合を考える.

定理 21.13 X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}$ の開集合とし, $F : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ を C^r 級関数とする. $\binom{\boldsymbol{p}}{q} \in X \times Y$ は $F\binom{\boldsymbol{p}}{q} = 0$ を満たし, $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{p}}{q} \neq 0$ ならば, $\boldsymbol{p}$ を含む $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U と C^r 級関数 $f : U \to Y$ で, $f(\boldsymbol{p}) = q$

かつ, すべての $\boldsymbol{x}\in U$ に対して $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\neq 0$ であり, $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)=0$ を満たすものがある. さらに $\boldsymbol{x}\in U$ と $j=1,2,\dots,n$ に対し $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}$ が成り立ち, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^{-3}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}^2}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)\end{aligned}$$

証明 最後の主張以外は, 定理 21.13 で $m=1$ とした場合である.

U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, V を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし, C^r 級写像 $G:U\times V\to\boldsymbol{R}^m$ と $g:U\to V$ に対し, 写像 $\psi:U\to\boldsymbol{R}^m$ を $\psi(\boldsymbol{x})=G\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ で定めたとき, 補題 21.10 より $\psi'(\boldsymbol{x})=D_1G\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)+D_2G\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)g'(\boldsymbol{x})$ が成り立つ. とくに $m=1$ の場合は, 両辺の $(1,i)$ 成分を比較すれば次の等式が得られる.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial G}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial G}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

従って $\psi_j:U\to\boldsymbol{R}$ $(j=1,2,\dots,n+1)$ を $\psi_j(\boldsymbol{x})=\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば,

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

が得られるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}=-\dfrac{\psi_j(\boldsymbol{x})}{\psi_{n+1}(\boldsymbol{x})}$ の両辺を x_i で偏微分すれば,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x})&=-\frac{\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\psi_{n+1}(\boldsymbol{x})-\psi_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})}{(\psi_{n+1}(\boldsymbol{x}))^2}\\&=\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}^2}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right)-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right)\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^2}\end{aligned}$$

が得られる. さらに, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}$ だから, これを上式に代入して, 分母と分子に $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ をかければ, 最後の主張が正しいことがわかる. □

注意 21.14 定理 *21.13* の仮定のもとで, $\boldsymbol{p}\in U$ と $j=1,2,\dots,n$ に対し $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})=0$ が成り立つとき, $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ f(\boldsymbol{p})\end{smallmatrix}\right)=-\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ f(\boldsymbol{p})\end{smallmatrix}\right)\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})=0$ だから, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{p})=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)}$ が成り立つ. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ x_{n+1}\end{smallmatrix}\right)=0$ によって定まる陰関数の極値を求めるには, まず $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)=0$ *(*$j=1,2,\dots,n$*)* を満たす $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)\in X\times Y$ を求める. 次に, それらのうちで $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)\neq 0$ を満たすものについて, $-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)}$ を (i,j) 成分とする n 次正方行列 $f''(\boldsymbol{p})$ を考えて, 命題 *20.4* を用いれば $\boldsymbol{p}$ において f が極値をとるかどうかを判定できる *(*かもしれない*)*.

22 条件付き極値

22.1 Lagrange 乗数

$\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合 Z から $\boldsymbol{R}^m$ への写像 F と Z で定義された実数値関数 φ が与えられたとき, 条件 $F(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{0}$ を満たす点からなる Z の部分集合を W とする. φ の定義域を W に制限して得られる関数 $\varphi|_W$ の極値について以下で考察する. まず, W の点 $\boldsymbol{p}$ で, $\varphi|_W$ が極値をとるための必要条件は次の定理で与えられる.

定理 22.1 Z を $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合とし, $F:Z\to\boldsymbol{R}^m$ は C^1 級写像で, $W=\{\boldsymbol{z}\in Z|\,F(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{0}\}$ の任意の点 $\boldsymbol{z}$ において $F'(\boldsymbol{z})$ の階数は m であるとする. C^1 級関数 $\varphi:Z\to\boldsymbol{R}$ の定義域を W に制限した関数 $\varphi|_W:W\to\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{p}\in W$ において極値をとるならば, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\in\boldsymbol{R}$ で $\varphi'(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}F'(\boldsymbol{p})$ を満たすものが存在する.

証明 F の第 i 成分の関数を $F_i:Z\to\boldsymbol{R}$ とする. $\boldsymbol{z}\in Z$ に対し $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{z})$ $(i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n)$ を (i,j) 成分とする $m\times n$ 行列を $D_1F(\boldsymbol{z})$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{z})$ $(i,j=1,2,\dots,m)$ を (i,j) 成分とする m 次正方行列行列を $D_2F(\boldsymbol{z})$ で表すと, $F'(\boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}D_1F(\boldsymbol{z}) & D_2F(\boldsymbol{z})\end{pmatrix}$ である. $F'(\boldsymbol{p})$ の階数は m だから $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の座標の順序を入れ替えることにより, $D_2F(\boldsymbol{p})$ は正則であると仮定する. $\boldsymbol{p}=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{smallmatrix}\right)$ $(\boldsymbol{p}_1\in\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{p}_2\in\boldsymbol{R}^m)$ とおくと補題 21.8 により, $r>0$ で $U_r(\boldsymbol{p}_1)\times U_r(\boldsymbol{p}_2)\subset Z$ となるものがある. そこで, F の定義域を $U_r(\boldsymbol{p}_1)\times U_r(\boldsymbol{p}_2)$ に制限した写像に対して定理 21.11 を用いると, $\boldsymbol{p}_1$ を含み, $U_r(\boldsymbol{p}_1)$ に含まれる開集合 U, $\boldsymbol{p}_2$ を含み, $U_r(\boldsymbol{p}_2)$ に含まれる開集合 V と C^1 級写像 $f:U\to V$ で, $f(\boldsymbol{p}_1)=\boldsymbol{p}_2$ であり, 各 $\boldsymbol{x}\in U$ に対して $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)=\boldsymbol{0}$ を満たすものがある. 関数 $\psi:U\to\boldsymbol{R}$ を $\psi(\boldsymbol{x})=\varphi\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ で定めると, ψ は $\boldsymbol{p}_1$ において極値をとるため, 命題 20.2 から $\psi'(\boldsymbol{p}_1)=O$ である. $\boldsymbol{z}\in Z$ に対して

$$D_1\varphi(\boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{z}) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\boldsymbol{z}) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}(\boldsymbol{z})\end{pmatrix},\quad D_2\varphi(\boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{z}) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{n+2}}(\boldsymbol{z}) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{n+m}}(\boldsymbol{z})\end{pmatrix}$$

とおくと, 補題 21.10 から $\boldsymbol{x}\in U$ に対し, $\psi'(\boldsymbol{x})=D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)+D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)f'(\boldsymbol{x})$ である. さらに, 定理 21.11 により $f'(\boldsymbol{x})=-D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)^{-1}D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ が成り立つため,

$$\psi'(\boldsymbol{x})=D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)-D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)^{-1}D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$$

が得られる. $\psi'(\boldsymbol{p}_1)=O$, $f(\boldsymbol{p}_1)=\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{smallmatrix}\right)$ だから上式より, $D_1\varphi(\boldsymbol{p})=D_2\varphi(\boldsymbol{p})D_2F(\boldsymbol{p})^{-1}D_1F(\boldsymbol{p})$ を得る. そこで $D_2\varphi(\boldsymbol{p})D_2F(\boldsymbol{p})^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}$ とおくと,

$$D_1\varphi(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}D_1F(\boldsymbol{p}),\qquad D_2\varphi(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}D_2F(\boldsymbol{p})$$

である. ここで $\varphi'(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}D_1\varphi(\boldsymbol{p}) & D_2\varphi(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}$, $F'(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}D_1F(\boldsymbol{p}) & D_2F(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}$ であることに注意すれば, 上式から $\varphi'(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}F'(\boldsymbol{p})$ を得る. □

上の定理においてとくに $m=1$ の場合は, 次のようになる.

系 22.2 Z を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の開集合とし, $F:Z\to\boldsymbol{R}$ は C^1 級関数で, $W=\{\boldsymbol{z}\in Z|\,F(\boldsymbol{z})=0\}$ の任意の点 $\boldsymbol{z}$ 対し, $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{z})\neq 0$ となる $j=1,2,\dots,n+1$ があるとする. C^1 級関数 $\varphi:Z\to\boldsymbol{R}$ の定義域を W に制限した関数 $\varphi|_W:W\to\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{p}\in W$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ で, すべての $j=1,2,\dots,n$ に対して $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})=\lambda\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ を満たすものがある.

さらに $n=1$ の場合は次のようになる.

系 22.3 Z を $\boldsymbol{R}^2$ の開集合とし, $F:Z\to\boldsymbol{R}$ は C^1 級関数で, $W=\{\boldsymbol{z}\in Z|\,F(\boldsymbol{z})=0\}$ の任意の点 $\boldsymbol{z}$ 対し, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{z})$ または $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{z})$ は 0 でないとする. C^1 級関数 $\varphi:Z\to\boldsymbol{R}$ の定義域を W に制限した関数 $\varphi|_W:W\to\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{p}\in W$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ で, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(\boldsymbol{p})=\lambda\dfrac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})$ かつ $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(\boldsymbol{p})=\lambda\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})$ を満たすものがある.

定理 21.11 により, $\varphi|_W$ が極値をとる候補になるのは $\varphi'(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}F'(\boldsymbol{p})$ を満たす $\lambda_i\in\boldsymbol{R}$ $(i=1,2,\dots,m)$ が存在するような W の点 $\boldsymbol{p}$ であるが, $\boldsymbol{p}$ での極値の判定について, まず $m=1$ の場合を考える.

X を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の開集合, $F,\varphi:X\to\boldsymbol{R}$ を C^r 級関数とし, $\boldsymbol{p}=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ p_2\end{smallmatrix}\right)\in X$ は $F(\boldsymbol{p})=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})\neq 0$ を満たすとする. このとき, 定理 21.11 から $\boldsymbol{p}_1$ を含む $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U, p_2 を含む $\boldsymbol{R}$ の開区間 V と C^r 級関数 $f:U\to V$ で,

$U \times V \subset X$ かつ $f(\boldsymbol{p}_1) = p_2$ を満たし, 任意の $\boldsymbol{x} \in U$ に対して $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) = 0$ となるものがある. 関数 $\psi : U \to \boldsymbol{R}$ を $\psi(\boldsymbol{x}) = \varphi\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, 定理 21.13 の証明より $\boldsymbol{x} \in U$, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \quad \cdots (i)$$

が成り立つことがわかる. $r \geqq 2$ であると仮定して, この両辺をさらに x_i で微分すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = {}& \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{n+1}^2}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) \qquad \cdots (ii)\end{aligned}$$

が得られる. 定理 21.13 で得た等式を (i), (ii) の $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})$ に代入すれば, 次の等式が得られる.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)} \quad \cdots (iii)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = {}& \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) - \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)} - \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)} \\ &+ \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{n+1}^2}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^2} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)} \\ &+ \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^2} + \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^2} \\ &- \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}^2}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^3} \qquad \cdots (iv)\end{aligned}$$

$\lambda \in \boldsymbol{R}$ で, すべての $j = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = \lambda \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ を満たすものがあるとき, $\lambda = \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})}$ であり, これを $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = \lambda \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ に代入して $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})}$ を得る. $f(\boldsymbol{p}_1) = p_2$ より $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ f(\boldsymbol{p}_1)\end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{p}$ だから, (iii) の $\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{p}_1$ を代入すれば, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}_1) = 0$ であることがわかる. また, (iv) で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1$ とすれば次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p}_1) \quad = \quad & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p}) - \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})} - \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})} + \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{n+1}^2}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})\right)^2} \\ & - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})} + \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})} + \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}^2}(\boldsymbol{p})}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{p})\right)^2}\end{aligned}$$

上の値を (i, j) 成分とする n 次正方行列 $\psi''(\boldsymbol{p})$ を考えて, 命題 20.4 を用いれば, ψ が $\boldsymbol{p}_1$ において極値をとるかどうか, 言い換えれば, 条件 $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ x_{n+1}\end{smallmatrix}\right) = 0$ のもとで φ が $\boldsymbol{p}$ において極値をとるかどうかを判定できる (かもしれない).

とくに, $n = 1$ の場合には上の等式から次の等式を得る.

$$\psi''(p_1) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) - \frac{2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})} + \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})} + \frac{2\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2}$$

また, φ が $\varphi\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ x_{n+1}\end{smallmatrix}\right)=x_{n+1}$ で与えられる関数の場合, $\psi=f$ だから, 上の等式 (iii), (iv) は定理 21.13 の後半で述べた等式を一般化している. 次の節で, 関数 ψ の「2 階微分 ψ''」を求めるために行列を値にとる写像の微分について考察した後, m が 2 以上の場合の条件付き極値の判定法について考える.

22.2　2 階微分

定義 22.4 *V を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする. V 上で定義された実数値関数 ρ_V が次の条件を満たすとき, ρ_V を V のノルムといい, ノルムが与えられたベクトル空間をノルム空間という.*

(1) $\boldsymbol{v}\in V$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対して $\rho_V(r\boldsymbol{v})=|r|\rho_V(\boldsymbol{v})$ が成り立つ.

(2) $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$ に対して $\rho_V(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\leqq\rho_V(\boldsymbol{v})+\rho_V(\boldsymbol{w})$ が成り立つ.

(3) $\boldsymbol{v}$ が V の零でないベクトルならば $\rho_V(\boldsymbol{v})>0$ である.

注意 22.5 *(1)* V が ρ_V をノルムとするノルム空間ならば, $\boldsymbol{x}\in V$ に対し, $\rho_V(\boldsymbol{x})$ を $\|\boldsymbol{x}\|$ で表すことが多い.

(2) V が計量ベクトル空間ならば, $\rho_V(\boldsymbol{x})=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ によって $\rho_V:V\to\boldsymbol{R}$ を定める. このとき ρ_V が上の定義の *(1)* と *(3)* を満たすことは, 内積の定義から明らかである. また, 定理 *16.8* の証明には, 内積が満たすべき条件である命題 *16.5* の *(1)* から *(4)* の主張しか用いていないため, V においてもシュワルツの不等式と三角不等式が成り立つことが示される. 従って, ρ_V は上の定義の *(2)* も満たすため, ρ_V は V のノルムである. このようにして計量ベクトル空間はノルム空間であるとみなせる.

V をノルム空間とするとき, $\boldsymbol{R}^n$ の場合と同様に次のように V の開球や内点の概念を定義する.

定義 22.6 $\boldsymbol{p}\in V$, $r>0$ に対して $U_r(\boldsymbol{p})=\{\boldsymbol{x}\in V\,|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<r\}$ とおき, これを半径 r 中心 $\boldsymbol{p}$ の開球または $\boldsymbol{p}$ の r-近傍という.

定義 22.7 $X\subset\boldsymbol{R}^n$ の点 $\boldsymbol{p}$ に対し, $U_r(\boldsymbol{p})\subset X$ を満たす正の実数 r が存在するとき, $\boldsymbol{p}$ を X の内点という.

以後, V, W をノルム空間, $X\subset V$, $Y\subset W$ とし, 写像 $f:X\to Y$ を考える.

定義 22.8 $\boldsymbol{p}\in V$, $\boldsymbol{q}\in W$ とする. どんな $\varepsilon>0$ に対しても, $\delta>0$ で条件

「$\boldsymbol{x}\in U_\delta(\boldsymbol{p})\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x})\in U_\varepsilon(\boldsymbol{q})$」

を満たすものがあるとき, $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{p}$ に近づけたときの f の極限は $\boldsymbol{q}$ であるといい, これを $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ で表す.

写像の極限の定義は上のようにノルム空間でも, $\boldsymbol{R}^n$ の場合と全く同じであるが, 微分の定義は下のように, 定義 17.11 における「$m\times n$ 行列 A」の部分のみを「1 次写像 $T:V\to W$」に置き換える必要がある.

定義 22.9 $\boldsymbol{p}$ を X の内点とする. *1* 次写像 $T:V\to W$ で, 次の等式 $(*)$ を満たすものがあるとき f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能であるという.

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\boldsymbol{0}\quad\cdots\ (*)$$

注意 22.10 $V=\boldsymbol{R}^n$, $W=\boldsymbol{R}^m$ の場合は, $m\times n$ 行列全体からなる集合と V から W への *1* 次写像全体の集合が *1* 対 *1* に対応するため, これらを同一視すれば上の定義は, 定義 *17.11* と同じであることに注意する.

写像 $f:X\to Y$, 1 次写像 $T:V\to W$, $\boldsymbol{p}\in X$ に対して, 写像 $\varepsilon=\varepsilon_{f,T,\boldsymbol{p}}:X\to W$ を

$$\varepsilon_{f,T,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}\end{cases}$$

で定義すれば, 命題 17.12 と同様に次のことがわかる.

命題 22.11 任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対して, 等式

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,T,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$$

が成り立ち, f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能であるためには, $\varepsilon_{f,T,\boldsymbol{p}}$ が $\boldsymbol{p}$ において連続, すなわち $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \varepsilon_{f,T,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるような, *1* 次写像 $T : V \to W$ が存在することが必要十分である.

命題 17.15 の証明と同様にして, 次の結果が示される.

命題 22.12 $f : X \to Y$ が $\boldsymbol{p}$ で微分可能なとき, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して定義 *22.9* の等式 $(*)$ における *1* 次写像 $T : V \to W$ は

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t} = T(\boldsymbol{v})$$

を満たす. 従って, *1* 次写像 T による $\boldsymbol{v}$ による像は上式の左辺で与えられるため, f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば, 定義 *22.9* の等式 $(*)$ を満たす *1* 次写像 T はただ *1* つに定まる.

そこで, 定義 17.16 と同様に, 次の定義をする.

定義 22.13 上の命題から定義 *22.9* の等式 $(*)$ を満たす *1* 次写像 T は f と $\boldsymbol{p}$ を与えればただ *1* つに定まるため, これを $f'(\boldsymbol{p})$ で表して, f の $\boldsymbol{p}$ における微分という.

命題 16.13 の類似は次のような形になる.

命題 22.14 ノルム空間の間の *1* 次写像 $T : V \to W$ が $\boldsymbol{0}$ で連続ならば, 負でない実数 M で, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\|T(\boldsymbol{v})\| \leqq M\|\boldsymbol{v}\|$ を満たすものがある. 従って, T は V の各点で連続である.

証明 仮定から $\delta > 0$ で, 条件「$\|\boldsymbol{x}\|\delta$ ならば $\|T(\boldsymbol{x})\| \leqq 1$」を満たすものがある. $\boldsymbol{v}$ を V の零でない任意のベクトルとすれば, $\left\|\frac{\delta}{2\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}\right\| < \delta$ だから $\left\|T\left(\frac{\delta}{2\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}\right)\right\| \leqq 1$ が成り立つ. この両辺に $\frac{2\|\boldsymbol{v}\|}{\delta}$ をかければ $\|T(\boldsymbol{v})\| \leqq \frac{2}{\delta}\|\boldsymbol{v}\|$ が得られ, この不等式は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の場合も成り立つため, $M = \frac{2}{\delta}$ とすればよい. ここで, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$ を上記の不等式に代入すれば, $\|T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{p})\| \leqq M\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$ となるため, T の $\boldsymbol{p}$ における連続性が示される. □

このことを用いると, 命題 17.13 と同様に次の結果が示される.

命題 22.15 f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能かつ $f'(\boldsymbol{p}) : V \to W$ が連続ならば $r, L > 0$ で $U_r(\boldsymbol{p}) \subset X$ かつ「$\boldsymbol{x} \in U_r(\boldsymbol{p})$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$」を満たすものがある. 従って f は $\boldsymbol{p}$ で連続である.

ノルム空間の間の写像の合成写像の微分法は, 微分が連続な 1 次写像であるという条件の下で示される.

定理 22.16 *(合成写像の微分法)* U, V, W をノルム空間, $X \subset V$, $Y \subset W$, $Z \subset U$ とする. $f : X \to Y$ が $\boldsymbol{p}$ で微分可能, $g : Y \to Z$ が $f(\boldsymbol{p})$ で微分可能であり, *1* 次写像 $f'(\boldsymbol{p}) : V \to W$, $g'(f(\boldsymbol{p})) : W \to U$ がともに連続ならば合成写像 $g\circ f : X \to Z$ も $\boldsymbol{p}$ で微分可能で, 次の等式が成り立つ.

$$(g\circ f)'(\boldsymbol{p}) = g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})$$

実数を成分にもつ $m \times n$ 行列全体からなる集合を $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ で表せば, 行列の加法と実数倍によって $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間である. さらに, $A, B \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ に対し, $(A, B) = \mathrm{tr}({}^t BA)$ によって $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の内積が定義され, $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ を計量ベクトル空間とみなすことができる.

命題 22.17 $A \in M_{l,m}(\boldsymbol{R})$, $B \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ に対して, 不等式 $\|AB\| \leqq \|A\|\|B\|$ が成り立つ.

証明 $\|A\|$ は A のすべての成分の 2 乗の和の平方根だから, 命題 16.13 から, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して $\|A\boldsymbol{x}\| \leqq \|A\|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ. この不等式に $\boldsymbol{x} = (B$ の第 j 列$) = B\boldsymbol{e}_j$ を代入し, $\sum_{j=1}^{n} \|B\boldsymbol{e}_j\|^2 = \|B\|^2$ であることに注意すれば, $\|AB\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|AB\boldsymbol{e}_j\|^2 \leqq \sum_{j=1}^{n} \|A\|^2\|B\boldsymbol{e}_j\|^2 = \|A\|^2 \sum_{j=1}^{n} \|B\boldsymbol{e}_j\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2$ が得られて主張が示される. □

$M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ を mn 次元数ベクトル空間とみなせば, 補題 16.13 と同様に次の結果が示される.

補題 22.18 *1 次写像 $T : \boldsymbol{R}^k \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ に対し, $M = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \|T(\boldsymbol{e}_j)\|^2}$ とおけば, 任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^k$ に対して $\|T(\boldsymbol{v})\| \leqq M\|\boldsymbol{v}\|$ が成り立つ.*

$GL_n(\boldsymbol{R})$ によって n 次正則行列全体の集合を表す. 正則行列 X の逆行列の各成分は X の成分の有理式で与えられることから, 次の結果が成り立つ.

命題 22.19 *$\mathrm{inv} : GL_n(\boldsymbol{R}) \to GL_n(\boldsymbol{R})$ を $\mathrm{inv}(X) = X^{-1}$ で定めれば, inv は連続写像である.*

一般にベクトル空間 V から W への 1 次写像全体の集合を $\mathrm{hom}(V, W)$ で表すことにする.

定義 22.20 *X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$ とし, 写像 $f : X \to Y$ は X の各点で微分可能であるとする. $\boldsymbol{p} \in X$ を $f'(\boldsymbol{p}) \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ に対応させる写像を $f' : X \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ で表し, f の導関数という. さらに, 定義 22.9 の意味で f' が $\boldsymbol{p} \in X$ で微分可能であるとき, $(f')'(\boldsymbol{p})$ を $\boldsymbol{p}$ における f の 2 次微分といい, $f''(\boldsymbol{p})$ で表す. f' が X の各点で微分可能であるとき, f は 2 回微分可能であるといい, $\boldsymbol{p} \in X$ を $f''(\boldsymbol{p})$ に対応させる写像を $f'' : X \to \mathrm{hom}(\boldsymbol{R}^n, M_{m,n}(\boldsymbol{R}))$ で表し, f の 2 次導関数という.*

命題 22.21 *写像 $f : X \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{p} \in X$ で微分可能であるとする. $\boldsymbol{x} \in X$ に対し, $f(\boldsymbol{x})$ の (i, j) 成分を $f_{ij}(\boldsymbol{x})$ で表し, $\boldsymbol{x}$ を $f_{ij}(\boldsymbol{x})$ に対応させる関数 $f_{ij} : X \to \boldsymbol{R}$ を考える. このとき, f_{ij} は $\boldsymbol{p} \in X$ で微分可能であり, $f'(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{R}^n \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ による $\boldsymbol{e}_k$ の像は $\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}$ を (i, j) 成分とする $m \times n$ 行列である.*

証明 f_{ij} が $\boldsymbol{p} \in X$ で微分可能であることは, 命題 17.17 と同様に示される. 命題 22.12 により, $f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{e}_k)$ は

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{p})}{t}$$

に等しいため, $f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{e}_k)$ は

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_{ij}(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{e}_k) - f_{ij}(\boldsymbol{p})}{t} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}(\boldsymbol{p})$$

を (i, j) 成分とする $m \times n$ 行列である. □

$f : X \to Y$ は 2 回微分可能であるとする. $f(\boldsymbol{x}) \in Y$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表し, X で定義された実数値関数 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ を考えれば, 命題 17.17 の (1) により, f' は $\boldsymbol{p} \in X$ を, (i, j) 成分が $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ である $m \times n$ 行列に対応させる写像であるため, 上の命題から次の結果が得られる.

系 22.22 *X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$ とし, 写像 $f : X \to Y$ は 2 回微分可能であるとする. このとき $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, 1 次写像 $f''(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{R}^n \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ による $\boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_k$ の像は $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(\boldsymbol{p})$ を (i, j) 成分とする $m \times n$ 行列である.*

行列のなすノルム空間を値にとる写像の微分に関して, 次の結果が成り立つ.

命題 22.23 *X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし, $f : X \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$, $g : X \to M_{l,m}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{p} \in X$ で微分可能であるとする.*

(1) $h : X \to M_{l,n}(\boldsymbol{R})$ を $h(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})$ で定めれば h は $\boldsymbol{p}$ で微分可能であり, 1 次写像 $h'(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{R}^n \to M_{l,n}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ を $(g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{v}))\, f(\boldsymbol{p}) + g(\boldsymbol{p})\, (f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{v}))$ に対応させる写像である.

(2) $m = n$ であり, f は常に正則行列を値にとるとき, $\boldsymbol{x} \in X$ を $f(\boldsymbol{x})^{-1}$ に対応させる写像を $\bar{f}$ とすれば, $\bar{f}$ は $\boldsymbol{p}$ で微分可能であり, 1 次写像 $\bar{f}'(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{R}^n \to M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ を $-f(\boldsymbol{p})^{-1}\, (f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{v}))\, f(\boldsymbol{p})^{-1}$ に対応させる写像である.

証明 (1) $\varepsilon_{f,f'(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}} : X \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$, $\varepsilon_{g,g'(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}} : X \to M_{l,m}(\boldsymbol{R})$ をそれぞれ ε_f, ε_g で表せば, 仮定から ε_f, ε_g はともに $\boldsymbol{p}$ で連続であり, 次の等式が成り立つ.

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_f(\boldsymbol{x}), \quad g(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{p}) + g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_g(\boldsymbol{x})$$

補題 22.14 から, 負でない実数 M, N で, 任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $\|f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{v})\| \leqq M\|\boldsymbol{v}\|$, $\|g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{v})\| \leqq N\|\boldsymbol{v}\|$ が成り立つものがある. このことと上の等式, 命題 22.17 および三角不等式を用いれば

$$\begin{aligned}
&\|f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})g(\boldsymbol{p}) - (f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))\,g(\boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{p})\,(g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))\,\| \\
&\qquad = \|\,(f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))\,(g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})) + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\,(f(\boldsymbol{p}) + f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))\,\varepsilon_g(\boldsymbol{x})\| \\
&\qquad \leqq \|f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\|\|g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\|\varepsilon_f(\boldsymbol{x})\|\|g(\boldsymbol{x})\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\,\|f(\boldsymbol{p}) + f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\|\,\|\varepsilon_g(\boldsymbol{x})\| \\
&\qquad \leqq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\,(MN\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| + \|\varepsilon_f(\boldsymbol{x})\|\|g(\boldsymbol{x})\| + \|f(\boldsymbol{p})\|\|\varepsilon_g(\boldsymbol{x})\| + M\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\|\varepsilon_g(\boldsymbol{x})\|)
\end{aligned}$$

であるため, $\left\|\dfrac{f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})g(\boldsymbol{p}) - (g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}))\,f(\boldsymbol{p}) - g(\boldsymbol{p})\,(f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right\|$ は

$$MN\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| + \|\varepsilon_f(\boldsymbol{x})\|\|g(\boldsymbol{x})\| + \|f(\boldsymbol{p})\|\|\varepsilon_g(\boldsymbol{x})\| + M\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\|\varepsilon_g(\boldsymbol{x})\|$$

以下である. $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ のとき, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$, $\|\varepsilon_f(\boldsymbol{x})\|$, $\|\varepsilon_g(\boldsymbol{x})\|$ はすべて 0 に近づき, $\|g(\boldsymbol{x})\|$ は命題 22.15 により定数 $\|g(\boldsymbol{p})\|$ に近づくため, 上のことから

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \left\|\frac{f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})g(\boldsymbol{p}) - (g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}))\,f(\boldsymbol{p}) - g(\boldsymbol{p})\,(f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right\| = 0$$

である. これは h は $\boldsymbol{p}$ で微分可能であり, 1 次写像 $h'(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{R}^n \to M_{l,n}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ を $(g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{v}))\,f(\boldsymbol{p}) + g(\boldsymbol{p})\,(f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{v}))$ に対応させる写像であることを意味する.

(2) $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_f(\boldsymbol{x})$ の両辺に左から $f(\boldsymbol{x})^{-1}$, 右から $f(\boldsymbol{p})^{-1}$ をかければ

$$f(\boldsymbol{p})^{-1} = f(\boldsymbol{x})^{-1} + f(\boldsymbol{x})^{-1}f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})^{-1} + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|f(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{p})^{-1}$$

である. 上式の右辺の第 1 項を左辺に移項して両辺に -1 をかければ

$$f(\boldsymbol{x})^{-1} - f(\boldsymbol{p})^{-1} = -f(\boldsymbol{x})^{-1}f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})^{-1} - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|f(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{p})^{-1} \cdots (*)$$

が得られる. (1) の証明と同様に, 任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $\|f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{v})\| \leqq M\|\boldsymbol{v}\|$ を満たす実数 M があるため, 上の等式と命題 22.17 および三角不等式を用いれば

$$\begin{aligned}
&\left\|f(\boldsymbol{x})^{-1} - f(\boldsymbol{p})^{-1} + f(\boldsymbol{p})^{-1}f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})^{-1}\right\| \\
&\qquad = \|\left(f(\boldsymbol{p})^{-1} - f(\boldsymbol{x})^{-1}\right)f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})^{-1} - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|f(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{p})^{-1}\| \\
&\qquad \leqq \|\left(f(\boldsymbol{p})^{-1} - f(\boldsymbol{x})^{-1}\right)f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})^{-1}\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\left\|f(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{p})^{-1}\right\| \\
&\qquad \leqq M\left\|f(\boldsymbol{x})^{-1} - f(\boldsymbol{p})^{-1}\right\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\left\|f(\boldsymbol{p})^{-1}\right\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\left\|f(\boldsymbol{x})^{-1}\right\|\|\varepsilon_f(\boldsymbol{x})\|\left\|f(\boldsymbol{p})^{-1}\right\|
\end{aligned}$$

だから

$$\left\|\frac{f(\boldsymbol{x})^{-1} - f(\boldsymbol{p})^{-1} + f(\boldsymbol{p})^{-1}f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})^{-1}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right\| \leqq \left(M\left\|f(\boldsymbol{x})^{-1} - f(\boldsymbol{p})^{-1}\right\| + \left\|f(\boldsymbol{x})^{-1}\right\|\|\varepsilon_f(\boldsymbol{x})\|\right)\left\|f(\boldsymbol{p})^{-1}\right\|$$

が得られる. $\boldsymbol{x} \in X$ を $f(\boldsymbol{x})^{-1}$ に対応させる写像は, $\boldsymbol{p}$ で連続な写像 f と連続写像 inv の合成写像だから, $\boldsymbol{p}$ において連続である. 従って, $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ のとき $\left\|f(\boldsymbol{x})^{-1} - f(\boldsymbol{p})^{-1}\right\|$ と $\|\varepsilon_f(\boldsymbol{x})\|$ はともに 0 に近づき, $\left\|f(\boldsymbol{x})^{-1}\right\|$ は定数 $\left\|f(\boldsymbol{x})^{-1}\right\|$ に近づくため, 上の不等式から

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \left\|\frac{f(\boldsymbol{x})^{-1} - f(\boldsymbol{p})^{-1} + f(\boldsymbol{p})^{-1}f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})^{-1}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right\| = 0$$

である. これは $\bar{f}$ は $\boldsymbol{p}$ で微分可能で, 1 次写像 $\bar{f}'(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{R}^n \to M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ を $-f(\boldsymbol{p})^{-1}\left(f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{v})\right) f(\boldsymbol{p})^{-1}$ に対応させる写像であることを意味する. □

Z を $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合, $F : Z \to \boldsymbol{R}^m$, $\varphi : Z \to \boldsymbol{R}$ を C^r 級写像とする. $\boldsymbol{z} \in Z$ に対し, $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{z})$ $(i = 1, 2, \dots, m,$ $j = 1, 2, \dots, n)$ を (i, j) 成分とする $m \times n$ 行列を $D_1F(\boldsymbol{z})$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{z})$ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ を (i, j) 成分とする $k \times m$ 行列を $D_2F(\boldsymbol{z})$ で表し, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{z})$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ を $(1, j)$ 成分とする $1 \times n$ 行列を $D_1\varphi(\boldsymbol{z})$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{z})$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ を (i, j) 成分とする $1 \times m$ 行列を $D_2\varphi(\boldsymbol{z})$ で表す. そこで $\boldsymbol{z}$ をそれぞれ $D_1F(\boldsymbol{z})$, $D_2F(\boldsymbol{z})$, $D_1\varphi(\boldsymbol{z})$, $D_2\varphi(\boldsymbol{z})$ に対応させる写像 $D_1F : Z \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$, $D_2F : Z \to M_{m,m}(\boldsymbol{R})$, $D_1\varphi : Z \to M_{1,n}(\boldsymbol{R})$, $D_2\varphi : Z \to M_{1,m}(\boldsymbol{R})$ を考える.

$\boldsymbol{p} = \left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{smallmatrix}\right) \in Z$ $(\boldsymbol{p}_1 \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{R}^m)$ は $F(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$ を満たし, $D_2F(\boldsymbol{p})$ が正則行列であるとき, 定理 21.11 から $\boldsymbol{p}_1$ を含む $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U, $\boldsymbol{p}_2$ を含む $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 V と C^r 級写像 $f : U \to V$ で, $U \times V \subset Z$ かつ $f(\boldsymbol{p}_1) = \boldsymbol{p}_2$ を満たし, 任意の $\boldsymbol{x} \in U$ に対して $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{0}$ となるものがある. このとき, 写像 $g : U \to Z$ を $g(\boldsymbol{x}) = \left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ で定め, 関数 $\psi : U \to \boldsymbol{R}$ を g と φ の合成関数 $\varphi \circ g$ とすれば, φ の定義域を $F(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ を満たす点からなる Z の部分集合を W に制限して得られる関数 $\varphi|_W$ が $\boldsymbol{p}$ で極大であるためには ψ が $\boldsymbol{p}_1$ で極大であることが必要十分であり, $\varphi|_W$ が $\boldsymbol{p}$ で極小であるためには ψ が $\boldsymbol{p}_1$ で極小であることが必要十分である.

定理 22.1 の証明の中で $\boldsymbol{x} \in U$ に対して

$$\psi'(\boldsymbol{x}) = (D_1\varphi)\circ g(\boldsymbol{x}) - (D_2\varphi)\circ g(\boldsymbol{x})((D_2F)\circ g(\boldsymbol{x}))^{-1}(D_1F)\circ g(\boldsymbol{x})$$

が成り立つことを示した. $\varphi_1 : U \to M_{1,n}(\boldsymbol{R})$, $\varphi_2 : U \to M_{1,m}(\boldsymbol{R})$, $F_1 : U \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$, $F_2 : U \to M_{m,m}(\boldsymbol{R})$ を $\varphi_1 = (D_1\varphi)\circ g$, $\varphi_2 = (D_2\varphi)\circ g$, $F_1 = (D_1F)\circ g$, $F_2 = (D_2F)\circ g$ で定めれば $\psi'(\boldsymbol{x}) = \varphi_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_2(\boldsymbol{x})F_2(\boldsymbol{x})^{-1}F_1(\boldsymbol{x})$ である. さらに $G : U \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ を $G(\boldsymbol{x}) = F_2(\boldsymbol{x})^{-1}F_1(\boldsymbol{x})$ で定め, $\bar{F}_2 : U \to M_{m,m}(\boldsymbol{R})$ を $\bar{F}_2(\boldsymbol{x}) = F_2(\boldsymbol{x})^{-1}$ で定めれば $\psi'(\boldsymbol{x}) = \varphi_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_2(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x})$, $G(\boldsymbol{x}) = \bar{F}_2(\boldsymbol{x})F_1(\boldsymbol{x})$ だから, 命題 22.23 から $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
\psi''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) &= \varphi_1'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) - (\varphi_2'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}))G(\boldsymbol{x}) - \varphi_2(\boldsymbol{x})(G'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}))\\
G'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) &= (\bar{F}_2'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}))F_1(\boldsymbol{x}) + \bar{F}_2(\boldsymbol{x})(F_1'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}))\\
\bar{F}_2'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) &= -F_2(\boldsymbol{x})^{-1}\left(F_2'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v})\right)F_2(\boldsymbol{x})^{-1}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 下の 2 つの式をいちばん上の式に代入すれば $\psi''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v})$ は

$$\varphi_1'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) - (\varphi_2'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}))F_2(\boldsymbol{x})^{-1}F_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x})F_2(\boldsymbol{x})^{-1}\left(F_2'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v})\right)F_2(\boldsymbol{x})^{-1}F_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_2(\boldsymbol{x})F_2(\boldsymbol{x})^{-1}(F_1'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}))$$

に等しいことがわかる. さらに, $g'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} E_n \\ f'(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ であることに注意すれば, 合成写像の微分法から

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) &= (D_1\varphi)'(g(\boldsymbol{x}))(g'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}) = (D_1\varphi)'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{v}\\ f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}\end{smallmatrix}\right)\\
\varphi_2'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) &= (D_2\varphi)'(g(\boldsymbol{x}))(g'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}) = (D_2\varphi)'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{v}\\ f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}\end{smallmatrix}\right)\\
F_1'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) &= (D_1F)'(g(\boldsymbol{x}))(g'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}) = (D_1F)'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{v}\\ f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}\end{smallmatrix}\right)\\
F_2'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) &= (D_2F)'(g(\boldsymbol{x}))(g'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}) = (D_2F)'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{v}\\ f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}\end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

である. 以上から, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
\psi''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}) = {}& (D_1\varphi)'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{v}\\ f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}\end{smallmatrix}\right) - \left((D_2\varphi)'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{v}\\ f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}\end{smallmatrix}\right)\right)\left(D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^{-1} D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\\
& + D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^{-1}\left((D_2F)'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{v}\\ f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}\end{smallmatrix}\right)\right)\left(D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^{-1} D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \qquad \cdots (*)\\
& - D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)^{-1}\left((D_1F)'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{v}\\ f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}\end{smallmatrix}\right)\right)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{z} \in Z$ に対し, $D_2F(\boldsymbol{z})^{-1}$ の (i, j) 成分を $\Delta_{ij}(\boldsymbol{z})$ とすれば, 定理 21.11 から $f'(\boldsymbol{x}) = -D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)^{-1} D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ だから $\boldsymbol{e}_j \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\boldsymbol{R}^{m+n}$ において次の等式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_i \\ f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_i - \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\Delta_{lk}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)\boldsymbol{e}_{l+n}$$

さらに $\boldsymbol{z} \in Z$ と $\boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{R}^{m+n}$ に対し, 命題 22.22 から $(D_1\varphi)'(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e}_i)$ は $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{z})$ を $(1, j)$ 成分とする $1 \times n$ 行列, $(D_2\varphi)'(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e}_i)$ は $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_{n+j}}(\boldsymbol{z})$ を $(1, j)$ 成分とする $1 \times m$ 行列, $(D_1 F)'(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e}_i)$ は $\dfrac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{z})$ を (i, j) 成分とする $m \times n$ 行列, $(D_2 F)'(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e}_i)$ は $\dfrac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial x_{n+j}}(\boldsymbol{z})$ を (i, j) 成分とする $m \times m$ 行列である. 一方, 命題 22.22 から $\psi''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_i)$ は $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})$ を $(1, j)$ 成分とする $1 \times n$ 行列だから上の等式 $(*)$ の $\boldsymbol{v}$ に $\boldsymbol{e}_i$ を代入して, 両辺の $(1, j)$ 成分を比較すれば次の等式が得られる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) - \sum_{\lambda,\mu=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+\lambda}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \Delta_{\lambda\mu}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_i \partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \\
&\quad - \sum_{\lambda,\mu=1}^{m} \Delta_{\lambda\mu}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_{n+\lambda}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) - \sum_{\lambda,\mu=1}^{m} \Delta_{\lambda\mu}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial F_\mu}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_{n+\lambda}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \\
&\quad + \sum_{\kappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+\kappa}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \Delta_{\kappa\lambda}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \Delta_{\mu\nu}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial F_\nu}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_j \partial x_{n+\mu}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \\
&\quad + \sum_{\kappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+\kappa}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \Delta_{\kappa\lambda}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \Delta_{\mu\nu}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial F_\nu}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_i \partial x_{n+\mu}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \\
&\quad + \sum_{\kappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{m} \Delta_{\kappa\lambda}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \Delta_{\mu\nu}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial F_\nu}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{n+\kappa} \partial x_{n+\mu}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \\
&\quad - \sum_{\alpha,\iota,\kappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+\alpha}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \Delta_{\alpha\iota}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \Delta_{\kappa\lambda}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \Delta_{\mu\nu}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial F_\nu}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial^2 F_\iota}{\partial x_{n+\kappa} \partial x_{n+\mu}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{p} = \left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{smallmatrix}\right) \in Z$ に対し, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \boldsymbol{R}$ で $\varphi'(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix} F'(\boldsymbol{p})$ を満たすものが存在するとき, $\boldsymbol{p}$ で φ を W に制限した関数が極値をとるかどうかは,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p}_1) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p}) &- \sum_{\lambda,\mu=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+\lambda}}(\boldsymbol{p}) \Delta_{\lambda\mu}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p}) \\
&- \sum_{\lambda,\mu=1}^{m} \Delta_{\lambda\mu}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_{n+\lambda}}(\boldsymbol{p}) - \sum_{\lambda,\mu=1}^{m} \Delta_{\lambda\mu}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) \frac{\partial F_\mu}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_{n+\lambda}}(\boldsymbol{p}) \\
&+ \sum_{\kappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+\kappa}}(\boldsymbol{p}) \Delta_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{p}) \Delta_{\mu\nu}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial F_\nu}{\partial x_i}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_j \partial x_{n+\mu}}(\boldsymbol{p}) \\
&+ \sum_{\kappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+\kappa}}(\boldsymbol{p}) \Delta_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{p}) \Delta_{\mu\nu}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial F_\nu}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_i \partial x_{n+\mu}}(\boldsymbol{p}) \\
&+ \sum_{\kappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{m} \Delta_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{p}) \Delta_{\mu\nu}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial F_\nu}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{n+\kappa} \partial x_{n+\mu}}(\boldsymbol{p}) \\
&- \sum_{\alpha,\iota,\kappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+\alpha}}(\boldsymbol{p}) \Delta_{\alpha\iota}(\boldsymbol{p}) \Delta_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{p}) \Delta_{\mu\nu}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial F_\nu}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial^2 F_\iota}{\partial x_{n+\kappa} \partial x_{n+\mu}}(\boldsymbol{p})
\end{aligned}
$$

を (i, j) 成分とする n 次対称行列 $\psi''(\boldsymbol{p}_1)$ を考えて, 命題 20.4 を用いれば, 条件 $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{0}$ のもとで φ が $\boldsymbol{p}$ で極値をとるかどうか判定できる (かもしれない).

23　2変数の3次多項式から定まる陰関数の極値を求める問題の作り方

23.1　問題設定と仮定

$F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ を x, y の 3 次の既約多項式とする．y を x の関数と考えたとき, 方程式 $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ から定まる陰関数の極値を求めるために, 連立方程式

$$\begin{cases} F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0 \end{cases} \quad \cdots(*)$$

の解を求める必要があるが, この解を容易に求められるように $\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ は 1 次式の積に因数分解分解して

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=6(ax-by-k)(px-qy-r)$$

であると仮定する．さらに, さらに曲線 $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ を平行移動して, この曲線が原点で x 軸に接するとすれば $6kr=0$ となるため, $k=0$ と仮定する．このとき

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=6apx^2-(6aq+6bp)xy+6bqy^2-6arx+6bry$$

であり, 曲線 $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が原点を通ると仮定したため $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ は

$$F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2apx^3-(3aq+3bp)x^2y+6bqxy^2+cy^3-3arx^2+6brxy+dy^2+ey$$

という形になる．$a=0$ ならば上式の右辺は y を因数にもち, 可約になるため, $a=1$ と仮定する．このとき

$$F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2px^3-(3q+3bp)x^2y+6bqxy^2+cy^3-3rx^2+6brxy+dy^2+ey, \quad \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=6(x-by)(px-qy-r)$$

だから, 連立方程式 $(*)$ が成り立つことは, 次の (1) または (2) が成り立つことと同値である．

$$\begin{cases} F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0 \\ x=by \end{cases} \quad \cdots(1) \qquad \begin{cases} F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0 \\ px=qy+r \end{cases} \quad \cdots(2)$$

次節では $p=0$, すなわち $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ が x に関して 2 次式の場合, 第 3 節では $p\neq 0$, すなわち $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ が x に関して 3 次式の場合に上記の連立方程式の解と, 解における F の偏微分の値について調べる．

23.2　x, y の 3 次多項式が x に関して 2 次式の場合

$p=0$ の場合, $r=0$ ならば $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ は y を因数にもって可約になるため, $r=1$ と仮定する．もし $c=dq-eq^2$ ならば $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(qy+1)(-3x^2+6bxy+(d-eq)y^2+ey)$ と因数分解され, $q\neq 0$ ならば $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ が既約であるという仮定に反するため, $p=0$ の場合は $q=0$ または $c\neq dq-eq^2$ であるとする．このとき, 前節の (2) の連立方程式は解をもたないため, $(*)$ は (1) と同値である．従って, y についての方程式 $F\left(\begin{smallmatrix}by\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ の解について調べればよい．

$p=0$, $r=1$ の場合は下記の等式が成り立つ．

$$F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=-3qx^2y+6bqxy^2+cy^3-3x^2+6bxy+dy^2+ey \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=-6(x-by)(qy+1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=-3qx^2+12bqxy+3cy^2+6bx+2dy+e \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=-6(qy+1)$$

$F\left(\begin{smallmatrix}by\\y\end{smallmatrix}\right)=(c+3b^2q)y^3+(d+3b^2)y^2+ey$ だから, この右辺の y の次数によって場合に分ける．

(i) $\underline{c \neq -3b^2q \text{ の場合}}$ $F\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right) = (c+3b^2q)y(y-\alpha)(y-\beta)$ とおけば, $d = -3b^2-(\alpha+\beta)(c+3b^2q)$, $e = \alpha\beta(c+3b^2q)$ である. このとき

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right) = (c+3b^2q)(3y^2-2(\alpha+\beta)y+\alpha\beta)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \alpha\beta(c+3b^2q) \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} b\alpha \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) = \alpha(\alpha-\beta)(c+3b^2q) \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} b\beta \\ \beta \end{smallmatrix}\right) = \beta(\beta-\alpha)(c+3b^2q)$$

が成り立つ. さらに $(c+3b^2q)(q\alpha+1)(q\beta+1) = c-dq+eq^2$ と $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = -6(qy+1)$ から, 次の結果が得られる.

命題 23.1 *(1)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であるためには $e \neq 0$ であることが必要十分であり, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} b\alpha \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ かつ $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} b\beta \\ \beta \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であるためには, α, β が互いに相異なること, すなわち $(d+3b^2r)^2-4e(c+3b^2q) \neq 0$ であることが必要十分である.

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であり, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} q\alpha \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ かつ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} q\beta \\ \beta \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であるためには, $c \neq dq-eq^2$ であることが必要十分である.

注意 23.2 $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が既約ならば, $c \neq dq-eq^2$ または $q=0$ であり, $q=0$ ならば $c \neq -3b^2q = 0 = dq-eq^2$ となるため, 上の命題の *(2)* が成り立つ.

(ii) $\underline{c = -3b^2q \text{ かつ } d \neq -3b^2 \text{ の場合}}$

$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = (d+3b^2)y^2+ey-3(x-by)^2(qy+1)$ であり, $F\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right) = (d+3b^2)y^2+ey$ だから, $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ の解は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} \frac{-be}{d+3b^2} \\ \frac{-e}{d+3b^2} \end{pmatrix}$ で与えられる. このとき $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = e$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} \frac{-be}{d+3b^2} \\ \frac{-e}{d+3b^2} \end{pmatrix} = -e$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{-be}{d+3b^2} \\ \frac{-e}{d+3b^2} \end{pmatrix} = -\dfrac{6(d+3b^2-eq)}{d+3b^2}$ から次の結果が得られる.

命題 23.3 *(1)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} \frac{-be}{d+3b^2} \\ \frac{-e}{d+3b^2} \end{pmatrix}$ がともに 0 にならないためには, $e \neq 0$ であることが必要十分である.

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であり, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{-be}{d+3b^2} \\ \frac{-e}{d+3b^2} \end{pmatrix} \neq 0$ であるためには, $d \neq eq-3b^2$ であることが必要十分である.

注意 23.4 $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が既約ならば, $-3b^2q = c \neq dq-eq^2$ または $q=0$ であり, $q \neq 0$ ならば $-3b^2q = c \neq dq-eq^2$ より $d \neq eq-3b^2$ が得られ, $q=0$ ならば $d \neq -3b^2 = eq-3b^2$ となるため, 上の命題の *(2)* が成り立つ.

(iii) $\underline{c = -3b^2q \text{ かつ } d = -3b^2 \text{ の場合}}$

$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = ey-3(x-by)^2(qy+1)$ となるため, $e=0$ ならば $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ は可約である. $F\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right) = ey$ だから, $e \neq 0$ ならば $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ の解は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のみである. このとき $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = e$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = -6$ である.

23.3 x, y の 3 次多項式が x に関して 3 次式の場合

$p=1$ と仮定すれば,

$$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2x^3-3(b+q)x^2y+6bqxy^2+cy^3-3rx^2+6brxy+dy^2+ey, \quad \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 6(x-by)(x-qy-r)$$

だから次の等式が成り立つ.

$$F\left(\begin{smallmatrix} qy+r \\ y \end{smallmatrix}\right) = (c+3bq^2-q^3)y^3+(d+6bqr-3q^2r)y^2+(e+3br^2-3qr^2)y-r^3$$
$$F\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right) = (c-b^3+3b^2q)y^3+(d+3b^2r)y^2+ey$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} qy+r \\ y \end{smallmatrix}\right) = 3(c+3bq^2-q^3)y^2+2(d+6bqr-3q^2r)y+e+3br^2-3qr^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right) = 3(c-b^3+3b^2q)y^2+2(d+3b^2r)y+e$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} qy+r \\ y \end{smallmatrix}\right) = -6((b-q)y-r) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right) = 6((b-q)y-r)$$

以下で, y の多項式 $F\left(\begin{smallmatrix} qy+r \\ y \end{smallmatrix}\right)$ の次数について場合分けを行い, その各場合について, さらに y の多項式 $F\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right)$ の次数について場合分けを行う.

(*i*) $\underline{c \neq q^3 - 3bq^2 \text{ の場合}}$　$F\left(\begin{smallmatrix} qy+r \\ y \end{smallmatrix}\right) = (c+3bq^2-q^3)(y-\lambda)(y-\mu)(y-\nu)$ とおけば

$$d = -(c+3bq^2-q^3)(\lambda+\mu+\nu) - 3q(2b-q)(\lambda\mu\nu(c+3bq^2-q^3))^{\frac{1}{3}} \tag{23.1}$$
$$e = (c+3bq^2-q^3)(\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\nu) - 3(b-q)(\lambda\mu\nu(c+3bq^2-q^3))^{\frac{2}{3}} \tag{23.2}$$
$$r = (\lambda\mu\nu(c+3bq^2-q^3))^{\frac{1}{3}} \tag{23.3}$$

だから $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} qy+r \\ y \end{smallmatrix}\right) = (c+3bq^2-q^3)(3y^2-2(\lambda+\mu+\nu)y+\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\nu)$ である. 従って, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} q\lambda+r \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) = (c+3bq^2-q^3)(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} q\mu+r \\ \mu \end{smallmatrix}\right) = (c+3bq^2-q^3)(\mu-\lambda)(\mu-\nu)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} q\nu+r \\ \nu \end{smallmatrix}\right) = (c+3bq^2-q^3)(\nu-\lambda)(\nu-\mu)$$

$d+6bqr-3q^2r = -(c+3bq^2-q^3)(\lambda+\mu+\nu)$, $e+3br^2-3qr^2 = (c+3bq^2-q^3)(\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\nu)$, $r^3 = (c+3bq^2-q^3)\lambda\mu\nu$ だから $(c+3bq^2-q^3)((b-q)\lambda-r)((b-q)\mu-r)((b-q)\nu-r) = -r(r^2(c+2b^3)+dr(b-q)+e(b-q)^2)$ が得られる. この等式と $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} qy+r \\ y \end{smallmatrix}\right) = -6((b-q)y-r)$ から, 次のことがわかる.

命題 23.5 *(1)* $\{\eta,\xi,\zeta\} = \{\lambda,\mu,\nu\}$ ならば, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} q\eta+r \\ \eta \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であるためには $\eta \neq \xi,\zeta$ であることが必要十分である.

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} q\lambda+r \\ \lambda \end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} q\mu+r \\ \mu \end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} q\nu+r \\ \nu \end{smallmatrix}\right)$ がどれも 0 にならないためには,

$$r \neq 0 \quad \text{かつ} \quad r^2(c+2b^3)+dr(b-q)+e(b-q)^2 \neq 0$$

であることが必要十分である.

注意 23.6 虚数 ξ に対して $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} q\xi+r \\ \xi \end{smallmatrix}\right) = 0$ となるのは $b=q$ かつ $r=0$ の場合に限るため, λ が実数, μ が虚数で $\nu=\bar{\mu}$ の場合, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} q\lambda+r \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であるためには $r \neq 0$ かつ $r^2(c+2b^3)+dr(b-q)+e(b-q)^2 \neq 0$ であることが必要十分である.

(*i*-1) $\underline{c \neq q^3-3bq^2, b^3-3b^2q \text{ の場合}}$　$F\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right) = (c-b^3+3b^2q)y(y-\alpha)(y-\beta)$ とおけば

$$d = -3b^2r - (\alpha+\beta)(c-b^3+3b^2q), \quad e = \alpha\beta(c-b^3+3b^2q)$$

だから, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right) = (c-b^3+3b^2q)(3y^2-2(\alpha+\beta)y+\alpha\beta)$ が成り立つ. 従って

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} b\alpha \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) = (c-b^3+3b^2q)\alpha(\alpha-\beta) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} b\beta \\ \beta \end{smallmatrix}\right) = (c-b^3+3b^2q)\beta(\beta-\alpha)$$

が成り立つ. これらの等式と, $(c-b^3+3b^2q)((b-q)\alpha-r)((b-q)\beta-r) = r^2(c+2b^3)+dr(b-q)+e(b-q)^2$ と $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} by \\ y \end{smallmatrix}\right) = 6((b-q)y-r)$ より次の結果が得られる.

命題 23.7 *(1)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であるためには $e \neq 0$ であることが必要十分であり, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} b\alpha \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ かつ $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} b\beta \\ \beta \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であるためには, 0, α, β が相異なること, すなわち $e \neq 0$ かつ $(d+3b^2r)^2-4e(c-b^3+3b^2q) \neq 0$ であることが必要十分である.

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であるためには $r \neq 0$ であることが必要十分であり, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} b\alpha \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ かつ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} b\beta \\ \beta \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ であるためには, $r^2(c+2b^3)+dr(b-q)+e(b-q)^2 \neq 0$ であることが必要十分である.

(i-2) $\underline{c=b^3-3b^2q\neq q^3-3bq^2\ \text{かつ}\ d\neq -3b^2r\ \text{の場合}}$ $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(x-by)^2(2x+(b-3q)y-3r)+(d+3b^2r)y^2+ey$ であり, $F\left(\begin{smallmatrix}by\\y\end{smallmatrix}\right)=(d+3b^2r)y^2+ey$ だから, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ の解で直線 $x=by$ 上にあるものは $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix}\frac{-be}{d+3b^2r}\\ \frac{-e}{d+3b^2r}\end{pmatrix}$ である. このとき $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=e$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{-be}{d+3b^2r}\\ \frac{-e}{d+3b^2r}\end{pmatrix}=-e$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=-6r$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{-be}{d+3b^2r}\\ \frac{-e}{d+3b^2r}\end{pmatrix}=-\dfrac{6r(d+3b^2r)+6e(b-q)}{d+3b^2r}$ から次の結果が得られる.

命題 23.8 *(1)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{-be}{d+3b^2r}\\ \frac{-e}{d+3b^2r}\end{pmatrix}$ がともに 0 にならないためには, $e\neq 0$ であることが必要十分である.

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{-be}{d+3b^2r}\\ \frac{-e}{d+3b^2r}\end{pmatrix}\neq 0$ がともに 0 にならないためには, $r\neq 0$ かつ $r(d+3b^2r)+e(b-q)\neq 0$ であることが必要十分である.

(i-3) $\underline{c=b^3-3b^2q\neq q^3-3bq^2\ \text{かつ}\ d=-3b^2r\ \text{の場合}}$ $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(x-by)^2(2x+(b-3q)y-3r)+ey$ となるため, $e=0$ ならば $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ は可約である. $F\left(\begin{smallmatrix}by\\y\end{smallmatrix}\right)=ey$ だから, $e\neq 0$ ならば $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ の解で直線 $x=by$ 上にあるものは $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ のみである. このとき $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=e$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=-6r$ である.

注意 23.9 実数 b, q と実数係数の *3* 次方程式の *3* つの解 λ, μ, ν があらかじめ与えられていて, $c=b^3-3b^2q\neq q^3-3bq^2$ とするとき, *(3.1), (3.2), (3.3)* によって d, e, r を定めれば, $d=-3b^2r$ が成り立つためには, $(\lambda+\mu+\nu)^3=27\lambda\mu\nu$ が成り立つことが必要十分である. また, $e\neq 0$ であるためには $(\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\nu)^3\neq 27(\lambda\mu\nu)^2$ が成り立つことが必要十分である.

(ii) $\underline{c=q^3-3bq^2,\ d\neq 3q^2r-6bqr\ \text{の場合}}$ $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(x-qy)^2(2x+(q-3b)y)-3r(x-by)^2+(d+3b^2r)y^2+ey$ であり, $l=\left(d+6bqr-3q^2r\right)^{\frac{1}{3}}$, $F\left(\begin{smallmatrix}qy+r\\y\end{smallmatrix}\right)=l^3(y-\mu)(y-\nu)$ とおけば

$$e=-3(b-q)(l\mu\nu)^{\frac{2}{3}}-l^3(\mu+\nu),\quad r=-l(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}$$

だから $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}qy+r\\y\end{smallmatrix}\right)=l^3(2y-\mu-\nu)$ である. 従って, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}q\mu+r\\ \mu\end{smallmatrix}\right)=l^3(\mu-\nu)\qquad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}q\nu+r\\ \nu\end{smallmatrix}\right)=l^3(\nu-\mu)$$

$e+3br^2-3qr^2=-l^3(\mu+\nu)$, $r^3=-l^3\mu\nu$ だから

$$l^3((b-q)\mu-r)((b-q)\nu-r)=r\left(l^3r+e(b-q)+2r^2(b-q)^2\right)=r\left(dr+e(b-q)+r^2\left(2b^2+2bq-q^2\right)\right)$$

が得られる. この等式と $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}qy+r\\y\end{smallmatrix}\right)=-6((b-q)y-r)$ から, 次のことがわかる.

命題 23.10 *(1)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}q\mu+r\\ \mu\end{smallmatrix}\right)$ と $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}q\nu+r\\ \nu\end{smallmatrix}\right)$ が 0 にならないためには, μ, ν が相異なること, すなわち

$$\left(e+3br^2-3qr^2\right)^2+4r^3\left(d+6bqr-3q^2r\right)\neq 0$$

であることが必要十分である.

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}q\mu+r\\ \mu\end{smallmatrix}\right)$ と $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}q\nu+r\\ \nu\end{smallmatrix}\right)$ が 0 にならないためには,

$$r\neq 0\quad \text{かつ}\quad dr+e(b-q)+r^2\left(2b^2+2bq-q^2\right)\neq 0$$

であることが必要十分である.

$(ii\text{-}1)$ <u>$c=q^3-3bq^2\neq b^3-3b^2q,\ d\neq 3q^2r-6bqr$ の場合</u>　$c-b^3+3b^2q=(q-b)^3$ だから $q\neq b$ であることに注意する. $F\left(\begin{smallmatrix}by\\y\end{smallmatrix}\right)=(q-b)^3y(y-\alpha)(y-\beta)$ とおけば

$$d=-3b^2r+(\alpha+\beta)(b-q)^3,\quad e=-\alpha\beta(b-q)^3$$

であり, 以下の等式が成り立つ.

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}by\\y\end{smallmatrix}\right)=(q-b)^3(3y^2-2(\alpha+\beta)y+\alpha\beta)\quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}b\alpha\\\alpha\end{smallmatrix}\right)=(q-b)^3\alpha(\alpha-\beta)\quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}b\beta\\\beta\end{smallmatrix}\right)=(q-b)^3\beta(\beta-\alpha)$$

これらの等式と, $(q-b)^3((b-q)\alpha-r)((b-q)\beta-r)=(b-q)\left(dr+e(b-q)+r^2\left(2b^2+2bq-q^2\right)\right)$ と $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}by\\y\end{smallmatrix}\right)=6((b-q)y-r)$ より次の結果が成り立つ.

命題 23.11 *(1)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\neq 0$ であるためには $e\neq 0$ であることが必要十分であり, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}b\alpha\\\alpha\end{smallmatrix}\right)\neq 0$ かつ $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}b\beta\\\beta\end{smallmatrix}\right)\neq 0$ であるためには, $0,\ \alpha,\ \beta$ が相異なること, すなわち $e\neq 0$ かつ $\left(d+3b^2r\right)^2+4e(b-q)^3\neq 0$ であることが必要十分である.

(2) $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\neq 0$ であるためには $r\neq 0$ であることが必要十分であり, $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}b\alpha\\\alpha\end{smallmatrix}\right)\neq 0$ かつ $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}b\beta\\\beta\end{smallmatrix}\right)\neq 0$ であるためには, $dr+e(b-q)+r^2\left(2b^2+2bq-q^2\right)\neq 0$ であることが必要十分である.

注意 23.12 *(1)* $e\neq 0$ であるためには $3l(b-q)(\mu\nu)^{\frac{2}{3}}\neq\mu+\nu$ が成り立つことが必要十分であり, $dr+e(b-q)+r^2\left(2b^2+2bq-q^2\right)\neq 0$ であるためには $l^2(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}+l(\mu+\nu)(b-q)+(\mu\nu)^{\frac{2}{3}}(b-q)^2\neq 0$ であることが必要十分である. また $\left(d+3b^2r\right)^2+4e(b-q)^3=l^2\left(l^4-6l^4(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}(b-q)^2-4l(\mu+\nu)(b-q)^3-3(\mu\nu)^{\frac{2}{3}}(b-q)^4\right)$ が成り立つ.

(2) 虚数 ξ に対して $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}q\xi+r\\\xi\end{smallmatrix}\right)=0$ ならば $b=q$ かつ $r=0$ である.

$(ii\text{-}2)$ <u>$c=q^3-3bq^2=b^3-3b^2q,\ d\neq 3q^2r-6bqr,-3b^2r$ の場合</u>　$q^3-3bq^2=b^3-3b^2q$ だから $q=b$ であることに注意する. $F\left(\begin{smallmatrix}by\\y\end{smallmatrix}\right)=y((d+3b^2r)y+e)$ だから, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ の解で直線 $x=by$ 上にあるものは $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix}\frac{-be}{d+3b^2r}\\\frac{-e}{d+3b^2r}\end{pmatrix}$ である. このとき $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=e,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{-be}{d+3b^2r}\\\frac{-e}{d+3b^2r}\end{pmatrix}=-e,\ \dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{-be}{d+3b^2r}\\\frac{-e}{d+3b^2r}\end{pmatrix}=-6r$ から次の結果が得られる.

命題 23.13 *(1)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right),\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{-be}{d+3b^2r}\\\frac{-e}{d+3b^2r}\end{pmatrix}$ がともに 0 にならないためには, $e\neq 0$ であることが必要十分である.

(2) $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right),\ \dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{-be}{d+3b^2r}\\\frac{-e}{d+3b^2r}\end{pmatrix}\neq 0$ がともに 0 にならないためには, $r\neq 0$ であることが必要十分である.

$(ii\text{-}3)$ <u>$c=q^3-3bq^2=b^3-3b^2q,\ d=-3b^2r\neq 3q^2r-6bqr$ の場合</u>　$q^3-3bq^2=b^3-3b^2q$ だから $q=b$ であるが, これは仮定 $d=-3b^2r\neq 3q^2r-6bqr$ と矛盾するため, このような場合はありえない.

(iii) <u>$c=q^3-3bq^2,\ d=3q^2r-6bqr,\ e\neq 3qr^2-3br^2$ の場合</u>　$F\left(\begin{smallmatrix}qy+r\\y\end{smallmatrix}\right)=(e+3br^2-3qr^2)y-r^3$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ の解で直線 $x=qy+r$ 上にあるものは $\begin{pmatrix}\frac{er+3br^3-2qr^3}{e+3br^2-3qr^2}\\\frac{r^3}{e+3br^2-3qr^2}\end{pmatrix}$ のみである. このとき $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{er+3br^3-2qr^3}{e+3br^2-3qr^2}\\\frac{r^3}{e+3br^2-3qr^2}\end{pmatrix}=e+3br^2-3qr^2,\ \dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{er+3br^3-2qr^3}{e+3br^2-3qr^2}\\\frac{r^3}{e+3br^2-3qr^2}\end{pmatrix}=\dfrac{6r(e+2br^2-2qr^2)}{e+3br^2-3qr^2}$ となるため, 次のことがわかる.

命題 23.14 *(1)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{er+3br^3-2qr^3}{e+3br^2-3qr^2}\\\frac{r^3}{e+3br^2-3qr^2}\end{pmatrix}\neq 0$ である.

(2) $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{er+3br^3-2qr^3}{e+3br^2-3qr^2}\\\frac{r^3}{e+3br^2-3qr^2}\end{pmatrix}$ が 0 にならないためには, $r\neq 0$ であることが必要十分である.

(iii-1) $\underline{c = q^3 - 3bq^2 \neq b^3 - 3b^2q,\ d = 3q^2r - 6bqr,\ e \neq 3qr^2 - 3br^2 \text{ の場合}}$ $c - b^3 + 3b^2q = (q-b)^3$ だから $q \neq b$ であることに注意する．$F\binom{by}{y} = (q-b)^3 y(y-\alpha)(y-\beta)$ とおけば

$$3r(q-b)^2 = -(\alpha+\beta)(q-b)^3, \quad e = \alpha\beta(q-b)^3$$

であり, 以下の等式が成り立つ.

$$\frac{\partial F}{\partial y}\binom{by}{y} = (q-b)^3(3y^2 - 2(\alpha+\beta)y + \alpha\beta) \quad \frac{\partial F}{\partial y}\binom{b\alpha}{\alpha} = (q-b)^3\alpha(\alpha-\beta) \quad \frac{\partial F}{\partial y}\binom{b\beta}{\beta} = (q-b)^3\beta(\beta-\alpha)$$

これらの等式と, $(q-b)^3((b-q)\alpha - r)((b-q)\beta - r) = (b-q)^2(e + 2r^2(b-q))$ と $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{by}{y} = 6((b-q)y - r)$ より次の結果が成り立つ.

命題 23.15 *(1)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{0}{0} \neq 0$ であるためには α, β が 0 でないこと, すなわち $e \neq 0$ であることが必要十分であり, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{b\alpha}{\alpha} \neq 0$ かつ $\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{b\beta}{\beta} \neq 0$ であるためには, $0, \alpha, \beta$ が相異なること, すなわち $e \neq 0$ かつ $9r^2(q-b) - 4e \neq 0$ であることが必要十分である.

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{0}{0} \neq 0$ であるためには $r \neq 0$ であることが必要十分であり, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{b\alpha}{\alpha} \neq 0$ かつ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{b\beta}{\beta} \neq 0$ であるためには, $e + 2r^2(b-q) \neq 0$ であることが必要十分である.

注意 23.16 $r = \dfrac{1}{3}(\alpha+\beta)(b-q)$ より $e + 3r^2(b-q) = \dfrac{1}{3}(b-q)^3(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$, $e + 2r^2(b-q) = \dfrac{1}{9}(b-q)^3(2\alpha-\beta)(\alpha-2\beta)$ である．従って, $e \neq 3qr^2 - 3br^2$ であるためには, $\beta \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\alpha$ であることが必要十分であり, $e + 2r^2(b-q) \neq 0$ であるためには $2\alpha \neq \beta$ かつ $\alpha \neq 2\beta$ であることが必要十分である.

(iii-2) $\underline{c = q^3 - 3bq^2 = b^3 - 3b^2q,\ d = 3q^2r - 6bqr \neq -3b^2r,\ e \neq 3qr^2 - 3br^2 \text{ の場合}}$ $q^3 - 3bq^2 = b^3 - 3b^2q$ だから $q = b$ であるが, これは仮定 $d = 3q^2r - 6bqr \neq -3b^2r$ と矛盾するため, このような場合はありえない.

(iii-3) $\underline{c = q^3 - 3bq^2 = b^3 - 3b^2q,\ d = 3q^2r - 6bqr = -3b^2r,\ e \neq 3qr^2 - 3br^2 \text{ の場合}}$ $q^3 - 3bq^2 = b^3 - 3b^2q$ だから $q = b$ となるため, 仮定から $e \neq 0$ である．$F\binom{by}{y} = ey$ だから, $F\binom{x}{y} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ の解で直線 $x = by$ 上にあるものは $\binom{0}{0}$ のみである．このとき $\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{0}{0} = e$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{0}{0} = -6r$ である.

(iv) $\underline{c = q^3 - 3bq^2,\ d = 3q^2r - 6bqr,\ e = 3qr^2 - 3br^2 \text{ の場合}}$ $F\binom{qy+r}{y} = -r^3$ だから $r \neq 0$ ならば $F\binom{x}{y} = 0$ の解で直線 $x = qy + r$ 上にあるものは存在しない．また, $r = 0$ ならば $F\binom{x}{y} = (x-qy)(2x^2 - (3b+q)xy - (q^2 - 3bq)y^2)$ だから $F\binom{x}{y}$ は可約である．従って以下では $r \neq 0$ の場合を考える.

(iv-1) $\underline{c = q^3 - 3bq^2 \neq b^3 - 3b^2q,\ d = 3q^2r - 6bqr,\ e = 3qr^2 - 3br^2 \text{ の場合}}$ $c - b^3 + 3b^2q = (q-b)^3$ だから $q \neq b$ であることに注意する．$F\binom{by}{y} = (q-b)y((q-b)^2y^2 + 3r(q-b)y + 3r^2)$ であり, $(q-b)^2y^2 + 3r(q-b)y + 3r^2 = 0$ の判別式は $-3r^2(q-b)^2 < 0$ となるため, $F\binom{by}{y} = 0$ の実数解は $y = 0$ のみである．故に $F\binom{x}{y} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ の解は $\binom{0}{0}$ のみである．ここで $\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{0}{0} = 3r^2(q-b)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{0}{0} = -6r$ だから, $r \neq 0$ ならば $\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{0}{0}$ と $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{0}{0}$ はともに 0 ではない.

(iv-2) $\underline{c = q^3 - 3bq^2 = b^3 - 3b^2q,\ d = 3q^2r - 6bqr \neq -3b^2r,\ e = 3qr^2 - 3br^2 \text{ の場合}}$ $q^3 - 3bq^2 = b^3 - 3b^2q$ だから $q = b$ であるが, これは仮定 $d = 3q^2r - 6bqr \neq -3b^2r$ と矛盾するため, このような場合はありえない.

(iv-3) $\underline{c = q^3 - 3bq^2 = b^3 - 3b^2q,\ d = 3q^2r - 6bqr = -3b^2r,\ e = 3qr^2 - 3br^2 \text{ の場合}}$ $q^3 - 3bq^2 = b^3 - 3b^2q$ だから $q = b$ である．従って $e = 0$ となるため, $F\binom{x}{y}$ は $F\binom{x}{y} = (x-by)^2(2x - 2by - 3r)$ と因数分解されて可約になる.

23.4 まとめ

第 2 節と第 3 節の考察を以下にまとめておく．なお, (3-i-1) では $k = \left(c + 3bq^2 - q^3\right)^{\frac{1}{3}}$ とおき, (3-ii-1) では $l = \left(d + 6bqr - 3q^2r\right)^{\frac{1}{3}}$, (3-$ii$-2) では $l = \left(d + 3b^2r\right)^{\frac{1}{3}}$ とおいた．

(2-i) b, q を実数, c を $-3b^2q$ と異なる実数とする．α, β は次のいずれかを満たすとする．

(I) α は虚数で, β は α の共役複素数である．

(R) α, β は 0 でない相異なる実数で, $q \neq 0$ ならば, α, β は $-\dfrac{1}{q}$ とも異なる．

このとき y を x の関数とみたときに

$$-3qx^2y + 6bqxy^2 + cy^3 - 3x^2 + 6bxy - (3b^2 + (\alpha + \beta)(c + 3b^2q))y^2 + \alpha\beta(c + 3b^2q)y = 0$$

から定まる陰関数は, 0 で極値 0 をとり, α, β が (R) を満たす場合は, $b\alpha$, $b\beta$ で, それぞれ極値 α, β をとる．

(2-ii) b, q を実数, e を 0 でない実数とし, d を $-3b^2$, $eq - 3b^2$ と異なる実数とする．このとき y を x の関数とみたときに

$$-3qx^2y + 6bqxy^2 - 3b^2qy^3 - 3x^2 + 6bxy + dy^2 + ey = 0$$

から定まる陰関数は, 0, $\dfrac{-be}{d + 3b^2}$ で, それぞれ極値 0, $\dfrac{-e}{d + 3b^2}$ をとる．

(2-iii) b, q を実数, e を 0 でない実数とする．このとき y を x の関数とみたときに

$$-3qx^2y + 6bqxy^2 - 3b^2qy^3 - 3x^2 + 6bxy - 3b^2y^2 + ey = 0$$

から定まる陰関数は, 0 で極値 0 をとる．

(3-i-1) b, q を実数, k を 0, $b - q$ と異なる実数とし, 複素数 λ, μ, ν は次の条件 (1), (2) を満たすとする．

(1) λ, μ, ν は互いに相異なる 0 でない実数か, または λ は 0 でない実数, μ は虚数, ν は μ の共役複素数である．

(2) d, e, r を $d = -k^3(\lambda + \mu + \nu) - 3kq(2b - q)(\lambda\mu\nu)^{\frac{1}{3}}$, $e = k^3(\lambda\mu + \mu\nu + \lambda\nu) - 3k^2(b - q)(\lambda\mu\nu)^{\frac{2}{3}}$, $r = k(\lambda\mu\nu)^{\frac{1}{3}}$ で定めれば, e, $\left(d + 3b^2r\right)^2 - 4e\left(k^3 - (b - q)^3\right)$, $r^2\left(k^3 + q^3 - 3bq^2 + 2b^3\right) + dr(b - q) + e(b - q)^2$ はどれも 0 でない．

y を x の関数とみたとき,

$$2x^3 - 3(b + q)x^2y + 6bqxy^2 + \left(k^3 - 3bq^2 + q^3\right)y^3 - 3rx^2 + 6brxy + dy^2 + ey = 0$$

から定まる陰関数は, 0, $q\lambda + r$ でそれぞれ極値 0, λ をとり, μ が実数の場合は, $q\mu + r$, $q\nu + r$ でそれぞれ極値 μ, ν をとる．また $\left(d + 3b^2r\right)^2 > 4e\left(k^3 - (b - q)^3\right)$ の場合は

$$\alpha = \frac{-d - 3b^2r + \sqrt{\left(d + 3b^2r\right)^2 - 4e\left(k^3 - (b - q)^3\right)}}{2\left(k^3 - (b - q)^3\right)}, \quad \beta = \frac{-d - 3b^2r - \sqrt{\left(d + 3b^2r\right)^2 - 4e\left(k^3 - (b - q)^3\right)}}{2\left(k^3 - (b - q)^3\right)}$$

とおくと, $b\alpha$, $b\beta$ でそれぞれ極値 α, β をとる．

(3-i-2) b, q を相異なる実数とし, 複素数 λ, μ, ν は次の条件 (1), (2) を満たすとする．

(1) λ, μ, ν は互いに相異なる 0 でない実数か, または λ は 0 でない実数, μ は虚数, ν は μ の共役複素数である．

(2) d, e, r を $d = -(b - q)^3(\lambda + \mu + \nu) - 3q(2b - q)(b - q)(\lambda\mu\nu)^{\frac{1}{3}}$, $e = (b - q)^3\left(\lambda\mu + \mu\nu + \lambda\nu - 3(\lambda\mu\nu)^{\frac{2}{3}}\right)$, $r = (b - q)(\lambda\mu\nu)^{\frac{1}{3}}$ で定めたとき, e, $d + 3b^2r$, $3b^3r^2 + dr + e(b - q)$ がどれも 0 でない．

y を x の関数とみたとき,

$$2x^3-3(b+q)x^2y+6bqxy^2+b^2(b-3q)y^3-3rx^2+6brxy+dy^2+ey=0$$

から定まる陰関数は, 0, $\dfrac{-be}{d+3b^2r}$, $p\lambda+r$ でそれぞれ 極値 0, $\dfrac{-e}{d+3b^2r}$, λ をとり, μ が実数の場合は, $p\mu+r$, $p\nu+r$ でそれぞれ極値 μ, ν をとる.

(3-i-3) b, q を相異なる実数とし, 複素数 λ, μ, ν は次の条件 (1), (2) を満たすとする.

(1) λ, μ, ν は互いに相異なる 0 でない実数か, または λ は 0 でない実数, μ は虚数, ν は μ の共役複素数である.

(2) $(\lambda+\mu+\nu)^3=27\lambda\mu\nu$ かつ $(\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\nu)^3\neq 27(\lambda\mu\nu)^2$.

実数 e, r を $e=(b-q)^3\left(\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\nu-3(\lambda\mu\nu)^{\frac{2}{3}}\right)$, $r=(b-q)(\lambda\mu\nu)^{\frac{1}{3}}$ で定め, y を x の関数とみたとき,

$$2x^3-3(b+q)x^2y+6bqxy^2+b^2(b-3q)y^3-3rx^2+6brxy-3b^2ry^2+ey=0$$

から定まる陰関数は, 0, $p\lambda+r$ でそれぞれ 極値 0, λ をとり, μ が実数の場合は, $p\mu+r$, $p\nu+r$ でそれぞれ極値 μ, ν をとる.

(3-ii-1) b, q を相異なる実数, l を 0 でない実数とし, 複素数 μ, ν は次の条件 (1), (2) を満たすとする.

(1) μ, ν は相異なる 0 でない実数か, または μ は虚数, ν は μ の共役複素数である.

(2) $3(b-q)(\mu\nu)^{\frac{2}{3}}+l(\mu+\nu)\neq 0$ かつ $l^4-6l^2(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}(b-q)^2-4l(\mu+\nu)(b-q)^3-3(\mu\nu)^{\frac{2}{3}}(b-q)^4\neq 0$ であり, μ, ν が実数の場合は $l^2(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}+l(\mu+\nu)(b-q)+(\mu\nu)^{\frac{2}{3}}(b-q)^2\neq 0$.

e, r を $e=-l^3(\mu+\nu)-3l^2(b-q)(\mu\nu)^{\frac{2}{3}}$, $r=-l(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}$ で定めれば, y を x の関数とみたとき,

$$2x^3-3(b+q)x^2y+6bqxy^2+q^2(q-3b)y^3-3rx^2+6brxy+\left(l^3-6bqr+3q^2r\right)y^2+ey=0$$

から定まる陰関数は, 0 で極値 0 をとり, μ, ν が実数の場合は, $q\mu+r$, $q\nu+r$ でそれぞれ極値 μ, ν をとる. また $\left(l^3+3r(b-q)^2\right)^2+4e(b-q)^3>0$ の場合は

$$\alpha=\frac{l^3+3r(b-q)^2-\sqrt{\left(l^3+3r(b-q)^2\right)^2+4e(b-q)^3}}{2(b-q)^3},\quad \beta=\frac{l^3+3r(b-q)^2+\sqrt{\left(l^3+3r(b-q)^2\right)^2+4e(b-q)^3}}{2(b-q)^3}$$

とおくと, $b\alpha$, $b\beta$ でそれぞれ極値 α, β をとる.

(3-ii-2) b を実数, l を 0 でない実数とし, 複素数 μ, ν は次の条件 (1), (2) を満たすとする.

(1) μ, ν は相異なる 0 でない実数か, または μ は虚数, ν は μ の共役複素数である.

(2) $\mu+\nu\neq 0$

y を x の関数とみたとき,

$$2x^3-6bx^2y+6b^2xy^2-2b^3y^3+3l(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}x^2-6bl(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}xy+l\left(l^2+3b^2(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}\right)y^2-l^3(\mu+\nu)y=0$$

から定まる陰関数は, 0 で極値 0 をとり, $b(\mu+\nu)$ で極値 $\mu+\nu$ をとる. μ, ν が実数の場合は, $b\mu-l(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}$, $b\nu-l(\mu\nu)^{\frac{1}{3}}$ でそれぞれ極値 μ, ν をとる.

(3-iii-1) b, q を相異なる実数とし, 複素数 α, β は次の条件 (1), (2) を満たすとする.

(1) α, β は相異なる 0 でない実数か, または α は虚数, β は α の共役複素数である.

(2) $\alpha+\beta\neq 0$ であり, α の偏角は $\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}$ と異なる. α, β が実数ならば $\alpha\neq 2\beta$ かつ $\beta\neq 2\alpha$ である. y を x の関数とみたとき,

$$2x^3-3(b+q)x^2y+6bqxy^2+q^2(q-3b)y^3-(\alpha+\beta)(b-q)x^2+2b(\alpha+\beta)(b-q)xy+q(\alpha+\beta)(q-2b)(b-q)y^2-\alpha\beta(b-q)^3y=0$$

から定まる陰関数は, $0, \dfrac{q(\alpha+\beta)^3}{9\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)}+\dfrac{1}{3}(\alpha+\beta)(b-q)$ でそれぞれ極値 $0, \dfrac{(\alpha+\beta)^3}{9\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)}$ をとる. α, β が実数の場合は, $b\alpha, b\beta$ でそれぞれ極値 α, β をとる.

(3-*iii*-3) b を実数とし, e, r を 0 と異なる実数とする. y を x の関数とみたとき,

$$2x^3-6bx^2y+6b^2xy^2-2b^3y^3-3rx^2+6brxy-3b^2ry^2+ey=0$$

から定まる陰関数は, $0, \dfrac{br^3}{e}+r$ でそれぞれ極値 $0, \dfrac{r^3}{e}$ をとる.

(3-*iv*-1) b, q を相異なる実数とし, r を 0 と異なる実数とする. y を x の関数とみたとき,

$$2x^3-3(b+q)x^2y+6bqxy^2+q^2(q-3b)y^3-3rx^2+6brxy+3qr(q-2b)y^2+3r^2(q-b)y=0$$

から定まる陰関数は, 0 で極値 0 をとる.

24 2変数の3次関数の極値について

24.1 2次曲線

$P=ax^2+2bxy+cy^2+2px+2qy+s$ とおくとき, $P=0$ で与えられる $\boldsymbol{R}^2$ 上の曲線 P について考える. b^2-ac の符号によって P は次の様になる.

命題 24.1 *(1)* $b^2-ac<0$ *の場合, 次の 3 つの場合に分かれる.*

(1-1) $a\left(s-\dfrac{aq^2-2bpq+cp^2}{ac-b^2}\right)>0$ *ならば* P *は空集合である.*

(1-2) $s=\dfrac{aq^2-2bpq+cp^2}{ac-b^2}$ *ならば* P *は 1 つの点* $\left(\dfrac{bq-cp}{ac-b^2}, \dfrac{aq-bp}{ac-b^2}\right)$ *からなる集合である.*

(1-3) $a\left(s-\dfrac{aq^2-2bpq+cp^2}{ac-b^2}\right)<0$ *ならば* P *は楕円である.*

(2) $b^2-ac=0$ *の場合, 次の 4 つの場合に分かれる.*

(2-1) $a\neq 0, aq=bp, as>p^2$ *または* $c\neq 0, cp=bq, cs>q^2$ *ならば* P *は空集合である.*

(2-2) $a\neq 0, aq=bp, as=p^2$ *または* $c\neq 0, cp=bq, cs=q^2$ *ならば* P *は 1 本の直線である.*

(2-3) $a\neq 0, aq=bp, as<p^2$ *または* $c\neq 0, cp=bq, cs<q^2$ *ならば* P *は平行な 2 本の直線である.*

(2-4) $a\neq 0, aq\neq bp$ *または* $c\neq 0, cp\neq bq$ *ならば* P *は放物線である.*

(3) $b^2-ac>0$ *の場合, 次の 2 つの場合に分かれる.*

(3-1) $s=\dfrac{aq^2-2bpq+cp^2}{ac-b^2}$ *ならば* P *は交わる 2 本の直線である.*

(3-2) $s\neq\dfrac{aq^2-2bpq+cp^2}{ac-b^2}$ *ならば* P *は双曲線である.*

注意 24.2 $P = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + s$ が実数上可約であるのは *(1.1)* における *(2-2), (2-3), (3-1)* の場合である．また P が複素数上可約であるのはこの *3* つに *(1-2), (2-1)* の場合を加えたものである．

直線 $L = kx + ly + m$ と P との関係は以下の場合がある．

命題 24.3 *(1)* $al^2 - 2bkl + ck^2 \neq 0$ の場合，
$D = (kq - lp)^2 - s(al^2 - 2bkl + ck^2) + m^2(b^2 - ac) + 2lm(aq - bp) + 2km(cp - bq)$ とおく．

(1-1) $D > 0$ ならば P は L と異なる *2* 点で交わる．

(1-2) $D = 0$ ならば L は P に *1* 点で接する．

(1-3) $D < 0$ ならば P と L は交わらない．

(2) $al^2 - 2bkl + ck^2 = 0$ の場合，

(2-1) $ckm - blm - qkl + pl^2 \neq 0$ または $alm - bkm - pkl + qk^2 \neq 0$ ならば P と L は *1* 点で交わる．

(2-2) $ckm - blm - qkl + pl^2 = alm - bkm - pkl + qk^2 = 0$ であり，$l(cm^2 - 2qlm + sl^2)$ か $k(am^2 - 2pkm + sk^2)$ の少なくとも *1* 方が *0* でなければ P と L は交わらない．

(2-3) $ckm - blm - qkl + pl^2 = alm - bkm - pkl + qk^2 = cm^2 - 2qlm + sl^2 = am^2 - 2pkm + sk^2 = 0$ ならば P は L を含む．

注意 24.4 *1)* T を $\boldsymbol{R}^2$ の点 $\left(-\dfrac{ckm - blm - qkl + pl^2}{al^2 - 2bkl + ck^2}, -\dfrac{alm - bkm - pkl + qk^2}{al^2 - 2bkl + ck^2}\right)$ とすると，多項式 P の T における値は $-\dfrac{D}{al^2 - 2bkl + ck^2}$ であり，T は *(1-2)* の場合における P と L の接点である．
2) P の点 (α, β) における接線は，$(a\alpha + b\beta + p)(x - \alpha) + (b\alpha + c\beta + q)(y - \beta) = 0$ で与えられるから，L が (α, β) で P に接するための条件は $(al - bk)\alpha + (bl - ck)\beta + pl - qk = 0$ と $k\alpha + l\beta + m = 0$ が成り立つことである．また，これらの二つの式を α, β に関する連立方程式とみれば，$al^2 - 2bkl + ck^2 \neq 0$ の場合，$(\alpha, \beta) = \mathrm{T}$ である．
3) (2-1) の場合における P と L の交点の座標は次で与えられる．
$ckm - blm - qkl + pl^2 \neq 0$ ならば $\left(-\dfrac{cm^2 - 2qlm + sl^2}{2(ckm - blm - qkl + pl^2)}, \dfrac{2lm(bm - pl) + k(sl^2 - cm^2)}{2l(ckm - blm - qkl + pl^2)}\right)$,
$alm - bkm - pkl + qk^2 \neq 0$ ならば $\left(\dfrac{2km(bm - qk) + l(sk^2 - am^2)}{2k(alm - bkm - pkl + qk^2)}, -\dfrac{am^2 - 2pkm + sk^2}{2(alm - bkm - pkl + qk^2)}\right)$ である．

2 次曲線 $P = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + s$ と $Q = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2p'x + 2q'y + s'$ の交点について調べる．アファイン変換 $T : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, $T(x, y) = (\alpha x + \beta y + \gamma, \lambda x + \mu y + \nu)$ $(\alpha\mu - \beta\lambda \neq 0)$ に対し，$P^T = P(T(x, y))$, $Q^T = Q(T(x, y))$ とおくと，T は P^T と Q^T の交点全体の集合を P の Q の交点全体の集合の上に 1 対 1 に写す．従って，まず P と Q が $(0, 0)$, $(1, 0)$ といった特別な点を交点にもつ場合について調べる．

(i) P と Q が $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ を交点にもつ場合．
このとき $s = s' = 0$, $a = -2p$, $a' = -2p'$, $c = -2q$, $c' = -2q'$ だから $P = -2(px^2 - bxy + qy^2 - px - qy)$, $Q = -2(p'x^2 - b'xy + q'y^2 - p'x - q'y)$ である．従って，

$$p'P - pQ = -2y((pb' - bp')x + (qp' - pq')y - (qp' - pq'))$$

$$q'P - qQ = -2x(-(qp' - pq')x + (qb' - bq')y + (qp' - pq'))$$

より，$\delta = (qp' - pq')^2 + (pb' - bp')(qb' - bq')$ とおき，$(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ をそれぞれ A, B, C で表せば，以下の場合が考えられる．

(i-1) $qp' - pq' \neq 0$, $\delta \neq 0$, $qp' - pq' \neq -qb' + bq'$ かつ $qp' - pq' \neq pb' - bp'$ の場合，P と Q は A, B, C 以外の点 $\mathrm{D}(\delta^{-1}(qp' - pq')(qp' - pq' + qb' - bq'), \delta^{-1}(qp' - pq')(qp' - pq' - pb' + bp'))$ でも交わる．

(*i*-2) $qp'-pq'\neq 0$ の場合, δ, $qp'-pq'+qb'-bq'$, $qp'-pq'-pb'+bp'$ の 3 つのうちに 0 になるものと 0 でないものがある場合, P と Q は A, B, C 以外の点では交わらない.

(*i*-3) $qp'-pq'=pb'-bp'=-qb'+bq'\neq 0$ が成り立つ場合, P と Q は A を通り, B, C を通る直線を共有する.

(*i*-2′) $qp'-pq'=0$ かつ $pb'-bp'\neq 0$ であり, $q\neq 0$ または $q'\neq 0$ が成り立つ場合, P と Q は A, B, C 以外の点では交わらない.

(*i*-3′) $qp'-pq'=0$ かつ $pb'-bp'\neq 0$ であり, $q=q'=0$ の場合, P と Q は B を通り, A, C を通る直線を共有する.

(*i*-2″) $qp'-pq'=0$ かつ $qb'-bq'\neq 0$ であり, $p\neq 0$ または $p'\neq 0$ が成り立つ場合, P と Q は A, B, C 以外の点では交わらない.

(*i*-3″) $qp'-pq'=0$ かつ $qb'-bq'\neq 0$ であり, $p=p'=0$ の場合, P と Q は C を通り, A, B を通る直線を共有する.

(*i*-4) $qp'-pq'=pb'-bp'=qb'-bq'=0$ の場合, P と Q は同一の曲線を表す.

命題 24.5 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$, $\mathrm{Q}(x_1,y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,y_2)$ を同一直線上にない $\boldsymbol{R}^2$ の *3* 点として, これらの点をそれぞれ $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ に写すアファイン変換を $T_{\mathrm{P,Q,R}}:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ とする. A を *2* 次正方行列, $\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^2$ として $T_{\mathrm{P,Q,R}}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$, $\Delta=(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)$ とおくと

$$A=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} y_2-y_0 & -x_2+x_0\\ -y_1+y_0 & x_1-x_0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{c}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}-x_0y_2+x_2y_0\\ x_0y_1-x_1y_0\end{pmatrix}$$

である.

証明 $\boldsymbol{0}=T\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{e}_1=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{e}_2=T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\boldsymbol{c}$ だから

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_2-x_0\\y_2-y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_0\\y_2-y_0\end{pmatrix}$$

である. 従って

$$A=\begin{pmatrix}x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y_1-y_0 & y_2-y_0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} y_2-y_0 & -x_2+x_0\\ -y_1+y_0 & x_1-x_0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=-A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}-x_0y_2+x_2y_0\\ x_0y_1-x_1y_0\end{pmatrix}.$$

□

注意 24.6 A, B, C を同一直線上にない *3* 点とし, A, B, C をそれぞれ $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ に写すアファイン変換を T とする. $R=px^2-bxy+qy^2-px-qy$, $S=p'x^2-b'xy+q'y^2-p'x-q'y$ に対し, $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=RT\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=ST\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおくと, P, Q は A, B, C を交点にもつ *2* 次曲線の対であり, *(i-1)* における D の座標を $T^{-1}(\mathrm{D})$ の座標で置き換えれば, 上の主張はそのまま成り立つ.

(*ii*) P と Q の交点はすべて x-軸上にあり, $(0,0)$, $(1,0)$ を交点にもつ場合.
このとき $s=s'=0$, $a=-2p$, $a'=-2p'$ だから $P=-2px^2+2bxy+cy^2+2px+2qy$, $Q=-2p'x^2+2b'xy+c'y^2+2p'x+2q'y$ であり, $L=2(pb'-bp')x+(pc'-cp')y-2(qp'-pq')$ とおくと, $p'P-pQ=-yL$ が成り立つ.

$p=p'=0$ の場合, P と Q は x-軸を共有し, 2 つの直線 $2bx+cy+2q=0$ と $2b'x+c'y+2q'=0$ が x-軸上以外で交わらないのは次の様な場合である.

(ii-0) $p=p'=0$, $cb'-bc'\neq 0$ かつ $qb'-bq'=0$ の場合, これらの 2 つの直線は x-軸上で交わる.

(ii-0$'$) $p=p'=0$, $cb'-bc'=0$ であり $qb'-bq'\neq 0$ または $qc'-cq'\neq 0$ の場合, これらの 2 つの直線は交わらない.

(ii-0$''$) $p=p'=q=q'=b=b'=0$ の場合, これらの 2 つの直線はともに x-軸に一致する.

以下では, $p\neq 0$ または $p'\neq 0$ である場合を考える.

$(0,0)$, $(1,0)$ をそれぞれ A, B とおくと, $p\neq 0$ ならば P と L の交点と, A, B が P と Q の交点であり, $p'\neq 0$ ならば Q と L の交点と, A, B が P と Q の交点であることに注意すると (1.3) から P と Q が A と B だけで交わるのは以下の場合が考えられる.

(ii-1) $pb'-bp'=pc'-cp'=0$ かつ $qp'-pq'\neq 0$ の場合, 常に $L\neq 0$ である.

(ii-2) $pb'-bp'=qp'-pq'=0$ かつ $pc'-cp'\neq 0$ の場合, L は直線 $y=0$ に一致する.

$\rho=(pc'-cp')^2-2(cb'-bc')(pb'-bp')$ とおき, 以下の (ii-3) から (ii-5$'$) では $\rho\neq 0$ であり, (ii-6) から (ii-8$'$) では $\rho=0$ であるとする.
$D=(pc'-cp')^2+4(qb'-bq')^2-4(qc'-cq')(pb'-bp')-4(cb'-bc')(qp'-pq')+8(qc'-cq')(qp'-pq')$, $E=(pc'-cp')^2-2(pb'-bp')(qc'-cq')-2(cb'-bc')(qp'-pq')$, $F=2(pc'-cp')(qp'-pq')-(pc'-cp')(pb'-bp')+2(pb'-bp')(qb'-bq')$ とおく.

(ii-3) $p\neq 0$, $qp'-pq'=2q(pb'-bp')-p(pc'-cp')=0$ の場合, L は A で P に接する.

(ii-3$'$) $p'\neq 0$, $qp'-pq'=2q'(pb'-bp')-p'(pc'-cp')=0$ の場合, L は A で Q に接する.

(ii-4) $p\neq 0$, $qp'-pq'-pb'+bp'=2(b+q)(pb'-bp')+p(pc'-cp')=0$ の場合, L は B で P に接する.

(ii-4$'$) $p'\neq 0$, $qp'-pq'-pb'+bp'=2(b'+q')(pb'-bp')+p'(pc'-cp')=0$ の場合, L は B で Q に接する.

(ii-5) $p\neq 0$ かつ $D<0$ の場合, P と L は交わらない.

(ii-5$'$) $p'\neq 0$ かつ $D<0$ の場合, Q と L は交わらない.

(ii-6) $p\neq 0$, $qp'-pq'=0$ であり, $E\neq 0$ または $F\neq 0$ が成り立つ場合, P と L は A だけで交わる.

(ii-6$'$) $p'\neq 0$, $qp'-pq'=0$ であり, $E\neq 0$ または $F\neq 0$ が成り立つ場合, Q と L は A だけで交わる.

(ii-7) $p\neq 0$, $qp'-pq'=pb'-bp'$ であり, $E\neq 0$ または $F\neq 0$ が成り立つ場合, P と L は B だけで交わる.

(ii-7$'$) $p'\neq 0$, $qp'-pq'=pb'-bp'$ であり, $E\neq 0$ または $F\neq 0$ が成り立つ場合, Q と L は B だけで交わる.

(ii-8) $p(qp'-pq')(pb'-bp')(pb'-bp'-qp'+pq')\neq 0$ かつ $E=F=0$ の場合, P と L は交わらない.

(ii-8$'$) $p'(qp'-pq')(pb'-bp')(pb'-bp'-qp'+pq')\neq 0$ かつ $E=F=0$ の場合, Q と L は交わらない.

A(a_1,a_2), B(b_1,b_2) を相異なる 2 点とし, $T:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ は A, B をそれぞれ $(0,0)$, $(1,0)$ に写すアファイン変換とする. $R=-2px^2+2bxy+cy^2+2px+2qy$, $S=-2p'x^2+2b'xy+c'y^2+2p'x+2q'y$ に対し, $P=R(T(x,y))$, $Q=S(T(x,y))$ とおくと P と Q は A, B を交点にもつ 2 次曲線の対の一般形であり, 上の主張はそのまま成り立つ.

(iii) P と Q が原点だけで交わる場合.
このとき $s=s'=0$ だから $P=ax^2+2bxy+cy^2+2px+2qy$, $Q=a'x^2+2b'xy+c'y^2+2p'x+2q'y$ である.

L を原点を通る任意の直線とすると, L が $x=0$ の場合, L と P と Q が交わる点の y-座標は $y^2(c,c')+2y(q,q')=(0,0)$ を満たし, L が $y=kx$ の場合, L と P と Q が交わる点の x-座標は $x^2(ck^2+2bk+a,c'k^2+2b'k+a')+2x(qk+p,q'k+p')=(0,0)$ を満たす. L と P と Q が交わるのは原点だけだから, 以下の場合が考えられる.

(*iii*-1) $qc'-cq'\neq 0$ かつ X の 3 次方程式 $(qc'-cq')X^3+(pc'-cp'+2qb'-2bq')X^2+(qa'-aq'+2pb'-2bp')X+pa'-ap'=0$ の任意の実数解 α は "$(q\alpha+p,q'\alpha+p')=(0,0)$ かつ $(c\alpha^2+2b\alpha+a,c'\alpha^2+2b'\alpha+a')\neq(0,0)$" または "$(q\alpha+p,q'\alpha+p')\neq(0,0)$ かつ $(c\alpha^2+2b\alpha+a,c'\alpha^2+2b'\alpha+a')=(0,0)$" を満たす.

(*iii*-2) $p=p'=q=q'=0$, $(c,c')\neq(0,0)$ かつ, すべての実数 α に対して, $(c\alpha^2+2b\alpha+a,c'\alpha^2+2b'\alpha+a')\neq(0,0)$" が成り立つ.

(*iii*-3) $q=q'=0$, $(c,c')\neq(0,0)$, $(p,p')\neq(0,0)$ であり, $(pc'-cp')X^2+2(pb'-bp')X+pa'-ap'=0$ の任意の実数解 α は $(c\alpha^2+2b\alpha+a,c'\alpha^2+2b'\alpha+a')=(0,0)$" を満たす.

(*iii*-4) $c=c'=0$, $(q,q')\neq(0,0)$ であり, $2(qb'-bq')X^2+(qa'-aq'+2pb'-2bp')X+pa'-ap'=0$ の任意の実数解 α は "$(q\alpha+p,q'\alpha+p')=(0,0)$ かつ $(2b\alpha+a,2b'\alpha+a')\neq(0,0)$" または "$(q\alpha+p,q'\alpha+p')\neq(0,0)$ かつ $(2b\alpha+a,2b'\alpha+a')=(0,0)$" を満たす.

24.2 3 次関数の極値の判定法

命題 24.7 *V, W, Z をベクトル空間, X を W の開集合とする. $f:X\to Z$ は連続微分可能な写像, $T:V\to W$ は $T(\boldsymbol{v})=A(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{c}$ ($A:V\to W$ は連続な線型写像, $\boldsymbol{c}\in W$) で与えられるアファイン写像とし, $g:T^{-1}(X)\to Z$ を合成写像 $f\circ T$ とする.*

1) g の微分は $g'(x)=f'(T(x))\circ A$ で与えられるため, $Z=\boldsymbol{R}$ で P が逆写像をもてば T は g の停留点全体の集合を f の停留点全体の集合の上に 1 対 1 に写す.

2) さらに f が 2 回連続微分可能ならば g の $\boldsymbol{x}\in T^{-1}(X)$ における 2 階微分は $g''(\boldsymbol{x})=f''(T(\boldsymbol{x}))\circ(A\times A):V\times V\to Z$ で与えられる V 上の対称な双線型写像である. とくに $V=\boldsymbol{R}^n$, $W=\boldsymbol{R}^m$, $Z=\boldsymbol{R}$ で A が m 行 n 列行列の場合, g の $\boldsymbol{x}$ におけるヘッセ行列 $H(g)(\boldsymbol{x})$ は $H(g)(\boldsymbol{x})={}^tAH(f)(T(\boldsymbol{x}))A$ で与えられる. 従って $m=n$ で P が正則行列ならば $H(g)(\boldsymbol{x})$ と $H(f)(T(\boldsymbol{x}))$ は同値な 2 次形式を与える.

定義 24.8 $\boldsymbol{R}^m$ の開集合で定義された 2 回連続微分可能な実数値関数の停留点におけるヘッセ行列が正則行列であるとき, その停留点は非退化であるといい, そうでなければ, 退化しているという.

$g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を $g(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i x_i^3+\sum\limits_{i\neq j}\gamma_{i,j}x_ix_j^2$ ($m\leqq n$, $\alpha_i,\beta_i,\gamma_{i,j}\in\boldsymbol{R}$, $\alpha_i\neq 0$) で与えられる実数値関数とする.

もし $m<k\leqq n$ で $\beta_k\neq 0$ となるものがあれば, $g(t\boldsymbol{e}_k)=\beta_k t^3$ ($\boldsymbol{e}_k$ は第 k 成分が 1 で他の成分は 0 である基本ベクトル) だから g は原点を通り, $\boldsymbol{e}_k$ を方向ベクトルにもつ直線に沿って単調に増加または減少するため原点において極値をとらない.

$m<j\leqq n$ に対し, $\beta_j=0$ であり, $1\leqq k\leqq n$, $m<l\leqq n$, $k\neq l$ で $\gamma_{k,l}\neq 0$ となるものがあるとする. $m<k\leqq n$ ならば $\alpha_k=0$ とおけば $g(t^3\boldsymbol{e}_k+t\boldsymbol{e}_l)=t^5(\gamma_{k,l}+\alpha_k t+\gamma_{l,k}t^2+\beta_k t^4)$ であり, $|t|<\frac{|\gamma_{k,l}|}{|\alpha_k|+|\beta_k|+|\gamma_{k,l}|+|\gamma_{l,k}|}$ ならば $|t|\leqq 1$ であることに注意すれば,

$$|\alpha_k t+\gamma_{l,k}t^2+\beta_k t^4|\leqq|t|(|\alpha_k|+|\beta_k||t|+|\gamma_{l,k}||t|^3)\leqq|t|(|\alpha_k|+|\beta_k|+|\gamma_{k,l}|+|\gamma_{l,k}|)<|\gamma_{k,l}|$$

だから, $|t|<\frac{|\gamma_{k,l}|}{|\alpha_k|+|\beta_k|+|\gamma_{k,l}|+|\gamma_{l,k}|}$ ならば $\gamma_{k,l}+\alpha_k t+\gamma_{l,k}t^2+\beta_k t^4$ の符号は変わらない. 従って t の符号が変わるとき, 0 の前後で $g(t^3\boldsymbol{e}_k+t\boldsymbol{e}_l)$ の符号が変わるため, g は原点において極値をとらない.

$1\leqq i\leqq n$, $m<j\leqq n$ に対し, $\beta_j=\gamma_{i,j}=0$ の場合, $g_j(\boldsymbol{x})=x_j^2\Big(\alpha_j+\beta_j x_j+\sum\limits_{i\neq j}\gamma_{i,j}x_i\Big)$ とおくと, $g(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^{m}g_j(\boldsymbol{x})$ である. $\alpha_j>0$ ならば $g_j(\boldsymbol{x})$ は原点で極小になり, $\alpha_j<0$ ならば $g_j(\boldsymbol{x})$ は原点で極大になるため, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ がすべて正の場合, g は原点で極小になり, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ がすべて負の場合, g は原点で極大になる.

また $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ のうちに正のものと負のものがある場合, g は原点で極値をとらない.

以上から次の結果を得る.

補題 24.9 $g(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^3 + \sum_{i \neq j} \gamma_{i,j} x_i x_j^2$ *(*$m \leqq n$*,* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_{i,j} \in \boldsymbol{R}$*,* $\alpha_i \neq 0$*)* で与えられる実数値関数 $g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ が原点において極値をとるための必要十分条件は, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ がすべて同じ符号で, $1 \leqq i \leqq n$, $m < j \leqq n$ に対し, $\beta_j = \gamma_{i,j} = 0$ が成り立つことである. このとき $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ がすべて正ならば g は原点で極小になり, すべて負ならば g は原点で極大になる.

$f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を n 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の 3 次式で与えられる実数値関数とし, $\boldsymbol{a}$ を f の停留点とする. このとき $\boldsymbol{a}$ における f の極大・極小の判定は次の様に行う.

まず $\boldsymbol{a}$ における f のヘッセ行列 $H(f)(\boldsymbol{a})$ を対角化する正則行列 A を求め, $g(\boldsymbol{x}) = f(A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})) - f(A\boldsymbol{a})$ により定義される $g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を考える.

Taylor の定理と, (24.7) により, $g(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^3 + \sum_{i \neq j} \gamma_{i,j} x_i x_j^2$ という形になり, 以下の場合が考えられる.

(1) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ がすべて正の場合, g は原点で極小になるため f は $\boldsymbol{a}$ で極小である.

(2) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ がすべて負の場合, g は原点で極大になるため f は $\boldsymbol{a}$ で極大である.

(3) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ のうちに正のものと負のものがある場合, g は原点で極値をとらないため f は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない.

(4) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ のうちに 0 に等しいものがあり, その他はすべて正の場合, $\alpha_i > 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$, $\alpha_i = 0$ $(m < i \leqq n)$ とする.
$1 \leqq i \leqq n$, $m < j \leqq n$ に対し, $\beta_j = \gamma_{i,j} = 0$ が成り立てば (24.9) より g は原点で極小になるため f は $\boldsymbol{a}$ で極小であり, そうでなければ g は原点で極値をとらないため f は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない.

(5) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ のうちに 0 に等しいものがあり, その他はすべて負の場合, $\alpha_i < 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$, $\alpha_i = 0$ $(m < i \leqq n)$ とする.
$1 \leqq i \leqq n$, $m < j \leqq n$ に対し, $\beta_j = \gamma_{i,j} = 0$ が成り立てば (24.9) より g は原点で極大になるため f は $\boldsymbol{a}$ で極大であり, そうでなければ g は原点で極値をとらないため f は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない.

注意 24.10 上の *(1), (2)* の場合*,* $\boldsymbol{a}$ は孤立した f の非退化な停留点で*,* $\boldsymbol{a}$ の近傍 U を十分小さくとれば $\boldsymbol{x} \in U - \{\boldsymbol{a}\}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{a})$ が成り立つようにできる*.*
(4), (5) の場合*,* $\boldsymbol{a}$ は退化した f の停留点で*,* $\boldsymbol{a}$ を含む $(n-m)$*-*次元平面に沿って f は一定の値をとる*.*

24.3 2 変数の 3 次関数

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ が以下のような変数 x, y の 3 次式で与えられるとする.

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + 3px^2 + 6qxy + 3ry^2 + 3sx + 3ty + e$$

(ただし a, b, c, d のいずれかは 0 でない) このとき

$$P = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + s, \quad Q = bx^2 + 2cxy + dy^2 + 2qx + 2ry + t$$

とおくと, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3Q$ であり, f の点 (x, y) におけるヘッセ行列 $H(f)$ は

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6(ax + by + p) & 6(bx + cy + q) \\ 6(bx + cy + q) & 6(cx + dy + r) \end{pmatrix}$$

により与えられる.

(i) f が $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を停留点にもつ場合.
このとき $s=t=0$, $a=-2p$, $b=c=-2q$, $d=-2r$ だから

$$f=-2px^3-6qx^2y-6qxy^2-2ry^3+3px^2+6qxy+3ry^2+e,$$

$$P=-2(px^2+2qxy+qy^2-px-qy),\quad Q=-2(qx^2+2qxy+ry^2-qx-ry),$$
$$H(f)=\begin{pmatrix}6(-2px-2qy+p) & 6q(-2x-2y+1)\\ 6q(-2x-2y+1) & 6(-2qx-2ry+r)\end{pmatrix}$$

であり, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ をそれぞれ A, B, C で表し, $X=pr-q^2$, $Y=2pq-q^2-pr$, $Z=2qr-q^2-pr$, $\delta=(pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r)$ とおくと, 簡単な計算により次の結果が示される.

命題 24.11 以下の等式が成り立つ.

$$\det H(f)(\mathrm{A})=36X,\quad \det H(f)(\mathrm{B})=36Y,\quad \det H(f)(\mathrm{C})=36Z,$$

$$\mathrm{tr}H(f)(\mathrm{A})=6(p+r),\quad \mathrm{tr}H(f)(\mathrm{B})=6(-p-2q+r),\quad \mathrm{tr}H(f)(\mathrm{C})=6(p-2q-r),$$
$$\delta=-(XY+YZ+XZ),\qquad (X+Y)(Y+Z)(X+Z)=-8q^2(p-q)^2(r-q)^2$$

命題 24.12 *1) X, Y, Z, δ のうちの 2 つが 0 ならば残りの 2 つも 0 である.*
2) X, Y, Z, $-\delta$ の少なくとも 1 つは 0 以上であり, X, Y, Z, $-\delta$ のうちの 2 つが正ならば残り 2 つは負である.
3) X, Y, Z, $\dfrac{XYZ}{\delta}$ の少なくとも 1 つは 0 以上であり, X, Y, Z, $\dfrac{XYZ}{\delta}$ のうちの 2 つが正ならば残り 2 つは負である.

証明 1) (24.11) より $\delta=-(XY+YZ+XZ)$ だから X, Y, Z のうちの 2 つが 0 ならば残りの 1 つも 0 であることを示せばよい. $X+Y=2q(p-q)$, $X-Y=2p(r-q)$, $X+Z=2q(r-q)$, $X-Z=2r(p-q)$, $Y+Z=2(q-p)(r-q)$, $Y-Z=2q(p-r)$ より, X, Y, Z のうちの 2 つが 0 ならば $p=q=0$ または $q=r=0$ または $p=q=r$ のいずれかが成り立つが, いずれにしても $X=Y=Z=0$ である.
2) もし, X, Y, Z がすべて負ならば $-\delta>0$ である. $X,Y>0$ とすると, (24.11) より $(X+Y)(Y+Z)(X+Z)=-8q^2(p-q)^2(r-q)^2\leqq 0$ だから $(Y+Z)(X+Z)\leqq 0$ となるため, $Z<0$ である. 従って $-\delta=(Y+Z)(X+Z)-Z^2<0$ が得られる. X, Y, Z の対称性から, X, Y, Z のうちの 2 つが正ならば残り 1 つと $-\delta$ は負である. $X,-\delta>0$ と仮定すると $Y\geqq 0$ ならば $(Y+Z)(X+Z)\leqq 0$ だから, $-\delta=(Y+Z)(X+Z)-Z^2\leqq 0$ となって矛盾が生じる. X, Y, Z の対称性から, X, Y, Z のうちの 1 つと $-\delta$ が正ならば残り 2 つは負である.
3) もし, X, Y, Z がすべて負ならば $\delta<0$ となるため $\dfrac{XYZ}{\delta}>0$ である. $X,Y>0$ とすると, 2) より $Z,-\delta<0$ だから $\dfrac{XYZ}{\delta}<0$ である. X, $\dfrac{XYZ}{\delta}>0$ とすると $YZ(-\delta)<0$ だから, Y, Z $-\delta$ のすべてが負であるか, 1 つだけが負で残り 2 つは正である. 2) により後者の場合はありえないので, Y, Z $-\delta$ はすべて負である. このとき $\dfrac{XYZ}{\delta}>0$ となる. □

$2q^2(Y+Z)=-(X+Y)(X+Z)$ が成り立つから次の結果を得る.

命題 24.13 $(X+Y)(Y+Z)(X+Z)<0$ *(すなわち $q\neq 0,p,r$)* の場合,

$$q=\pm\sqrt{-\frac{(X+Y)(X+Z)}{2(Y+Z)}}$$

である. さらに p, r は X, Y, Z を用いて以下のように表される.

$$p=\begin{cases}\pm(Y-X)\sqrt{-\frac{X+Y}{2(Y+Z)(X+Z)}} & X+Z<0\\ \mp(Y-X)\sqrt{-\frac{X+Y}{2(Y+Z)(X+Z)}} & X+Z>0\end{cases},\qquad r=\begin{cases}\pm(Z-X)\sqrt{-\frac{X+Z}{2(X+Y)(Y+Z)}} & X+Y<0\\ \mp(Z-X)\sqrt{-\frac{X+Z}{2(X+Y)(Y+Z)}} & X+Y>0\end{cases}$$

第 1 節と (24.12) の 1) の結果より, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を停留点にもつときは, 以下の場合が考えられる.

(i-1) δ, $\det H(f)(\mathrm{A})$, $\det H(f)(\mathrm{B})$, $\det H(f)(\mathrm{C})$ がすべて 0 でない場合, f は A, B, C 以外に 点

$$\mathrm{D}\left(\frac{XZ}{XY+YZ+XZ}, \frac{XY}{XY+YZ+XZ}\right)$$

を停留点にもつ. このとき,

$$\det H(f)(\mathrm{D}) = 36\delta^{-1}(pr-q^2)(2pq-q^2-pr)(2pr-q^2-pr) = -\frac{36XYZ}{XY+YZ+XZ}$$

だから A, B, C, D はすべて非退化な停留点である. さらに, 次の等式が成り立つ.

$$\mathrm{tr}H(f)(\mathrm{D}) = 6\delta^{-1}(4q^5-5(p+r)q^4+4(p^2+r^2)q^3-2pr(p+r)q^2+4p^2r^2q-p^2r^2(p+r))$$

(i-2) $\delta=0$ であり, $\det H(f)(\mathrm{A})$, $\det H(f)(\mathrm{B})$, $\det H(f)(\mathrm{C})$ がすべて 0 でない場合, f の停留点は A, B, C だけであり, これらはすべて非退化である.

(i-2$'$) $\det H(f)(\mathrm{A})$, $\det H(f)(\mathrm{B})$, $\det H(f)(\mathrm{C})$ のうちの 1 つだけが 0 である場合, f の停留点は A, B, C だけである. この場合 A, B, C の 1 つだけ退化している.

(i-4) $p=q=r$ の場合, 2 本の平行な直線 $x+y=0$, $x+y=1$ が f の停留点全体を与え, f の各停留点でのヘッセ行列の階数は 1 である.

(i-4$'$) $p=q=0$ の場合, 2 本の平行な直線 $y=0$, $y=1$ が f の停留点全体を与え, f の各停留点でのヘッセ行列の階数は 1 である.

(i-4$''$) $q=r=0$ の場合, 2 本の平行な直線 $x=0$, $x=1$ が f の停留点全体を与え, f の各停留点でのヘッセ行列の階数は 1 である.

(i-2$'$) の場合における退化している停留点について調べる.
$\det H(f)(\mathrm{A})=0$ の場合, $p,q,r\neq 0$ であり, $q\neq p,r$ である. $f(-rt,qt)=4q^2r(q-r)t^3+e$ が成り立つため, f は A を通り, 方向ベクトル $(-r,q)$ の直線に沿って単調に増加または減少する. 従って f は A では極値をとらない.
同様に, $\det H(f)(\mathrm{B})=0$ の場合, $p,q,r\neq 0$ であり, $r\neq p,q$ である. $f(1+qt,-pt)=4pq(q-p)^2t^3+p+e$ が成り立つため, f は B を通り, 方向ベクトル $(q,-p)$ の直線に沿って単調に増加または減少する. 従って f は B では極値をとらない.
また, $\det H(f)(\mathrm{C})=0$ の場合, $p,q,r\neq 0$ であり, $p\neq q,r$ である. $f(-rt,1+qt)=4qr(q-r)^2t^3+r+e$ が成り立つため, f は C を通り, 方向ベクトル $(-r,q)$ の直線に沿って単調に増加または減少する. 従って f は C では極値をとらない.

(i-4), (i-4$'$), (i-4$''$) の場合, f はそれぞれ $-2p(x+y)^3+3p(x+y)^2+e$, $-2ry^3+3ry^2+e$, $-2px^3+3px^2+e$ に等しくなり, $x+y$, x, y のみのに依存する 3 次関数である.

(ii) f の停留点がすべて x-軸上にあり, $(0,0)$, $(1,0)$ を停留点にもつ場合.
このとき $s=t=0$, $a=-2p$, $b=-2q$ だから $f=-2px^3-6qx^2y+3cxy^2+dy^3+3px^2+6qxy+3ry^2+e$, $P=-2px^2-4qxy+cy^2+2px+2qy$, $Q=-2qx^2+2cxy+dy^2+2qx+2ry$,

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6(-2px-2qy+p) & 6(-2qx+cy+q) \\ 6(-2qx+cy+q) & 6(cx+dy+r) \end{pmatrix}$$

であり, $(0,0)$, $(1,0)$ をそれぞれ A, B で表すと, $\det H(f)(\mathrm{A})=-36(q^2-pr)$, $\det H(f)(\mathrm{B})=-36(q^2+pr+cp)$ より, $L=2(cp+2q^2)x+(dp-cq)y-2(q^2-pr)$ とおくと, $L(\mathrm{A})=\dfrac{1}{18}\det H(f)(\mathrm{A})$, $L(\mathrm{B})=-\dfrac{1}{18}\det H(f)(\mathrm{B})$ が成り立つ.

$\rho = 2(c^2+2dq)(cp+2q^2)-(dp-cq)^2$, $D=(dp-cq)^2+4(cp+2q^2)(2r^2+2cr-dq)$ とおく.

(ii-0) $p=q=0$, $c\neq 0$ かつ $r\neq 0$ の場合, $f=3cxy^2+dy^3+3ry^2+e$ となるため x-軸が f の停留点全体の集合になり, (24.9) より x-軸上で f は極値をとる.

(ii-0$'$) $p=q=r=0$ の場合, $f=3cxy^2+dy^3+e$ となるため x-軸が f の停留点全体の集合になり, (24.9) より f は極値をもたない.

(ii-1) $cp+2q^2=dp-cq=0$ かつ $q^2-pr\neq 0$ の場合, 常に $L\neq 0$ だから A, B はともに非退化である.

(ii-2) $c+2r=q^2-pr=0$ かつ $dp+2qr\neq 0$ の場合, 直線 L は A, B を通るため, A, B はともに退化している.

(ii-3) $p\neq 0$, $\rho\neq 0$ かつ $q^2-pr=4qr+3cq-dp=0$ の場合, L は A を通り, B は通らないため, A は退化しており, B は非退化である.

(ii-4) $p\neq 0$, $\rho\neq 0$ かつ $q^2+pr+cp=dp+cq+4qr=0$ の場合, L は B を通り, A は通らないため, A は非退化であり, B は退化している.

(ii-5) $\rho\neq 0$ かつ $D<0$ の場合, L は A も B も通らないため, A, B はともに非退化である.

(ii-6) $p\neq 0$, $c+2r\neq 0$, $\rho=0$ かつ $q^2-pr=0$ が成り立つ場合, L は A を通り, B は通らないため, A は退化しており, B は非退化である.

(ii-7) $p\neq 0$, $c+2r\neq 0$, $\rho=0$ かつ $q^2+pr+cp=0$ が成り立つ場合, L は B を通り, A は通らないため, A は非退化であり, B は退化している.

(ii-8) $p\neq 0$, $\rho=0$ かつ $(q^2-pr)(cp+2q^2)(q^2+pr+cp)\neq 0$ かつ $(c^2+cr+dq)(cp+2q^2)-(c^2+2dq)(q^2-pr)=(c+2r)(4q^3+3cpq-dp^2)=0$ が成り立つ場合, L は A も B も通らないため, A, B はともに非退化である.

$\det H(f)(\mathrm{A})=0$ の場合, $f(-qz+pw,pz+qw)=p(dp^2-4q^3-3cpq)z^3+3(cp^3-2cpq^2+dp^2q+2p^2q^2-2q^4)z^2w+3q(2cp^2-cq^2+dpq+4pq^2)zw^2+(3cpq^2+dq^3-2p^4-6p^2q^2)w^3+\dfrac{3}{p}(p^2+q^2)^2w^2+e$ であり, $\det H(f)(\mathrm{B})=0$ の場合, $f(1-qz+pw,pz+qw)=p(dp^2-4q^3-3cpq)z^3+3(cp^3-2cpq^2+dp^2q+2p^2q^2-2q^4)z^2w+3q(2cp^2-cq^2+dpq+4pq^2)zw^2+(3cpq^2+dq^3-2p^4-6p^2q^2)w^3-\dfrac{3}{p}(p^2+q^2)^2w^2+p+e$ が成り立つことに注意する.

(ii-2) の場合, $dp^2-4q^3-3cpq=p(dp+2qr)\neq 0$ だから上式と (24.9) から f は A, B では極値をとらない.

(ii-3) の場合, $d=\dfrac{4q^3}{p^2}+\dfrac{3cq}{p}$ だから $C=cp+2q^2$, $g(z,w)=3p^2Cz^2w+6pqCzw^2+(3C-2(p^2+q^2)^2)w^3+3p(p^2+q^2)w^2$ とおくと, $f(-qz+pw,pz+qw)=\dfrac{1}{p^2}(p^2+q^2)g(z,w)+e$ である.
$C=0$ とすると, $c=-2r$ となり, $\rho=0$ が得られるため, 仮定に反する. 従って, $C\neq 0$ だから (24.9) により, g は原点において極値をとらないため f は A で極値をとらない.

(ii-4) の場合も同様に, $d=\dfrac{4q^3}{p^2}+\dfrac{3cq}{p}$ だから $C=cp+2q^2$, $g(z,w)=3p^2Cz^2w+6pqCzw^2+(3C-2(p^2+q^2)^2)w^3-3p(p^2+q^2)w^2$ とおくと, $f(1-qz+pw,pz+qw)=\dfrac{1}{p^2}(p^2+q^2)g(z,w)+p+e$ である.
上の場合と同様にして f は B において極値をとらないことがわかる.

$\delta=0$ の場合, $d=\dfrac{1}{p^2}\left(4q^3+3cpq\pm\sqrt{2p^3(c+2r)^3}\right)$ となるため, $dp^2-4q^3-3cpq=0$ であることと, $c+2r=0$ であることは同値である.

(ii-6) の場合, 上のことから (ii-2) の場合と同じ理由で f は A において極値をとらない.

(ii-7) の場合も同様に f は B において極値をとらない.

(iii) f が $(0,0)$ だけを停留点にもつ場合.
$s=t=0$ であり, 原点を中心に回転させることにより, $q=0$ と仮定すると $f=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+3px^2+3ry^2+e$, $P=ax^2+2bxy+cy^2+2px$, $Q=bx^2+2cxy+dy^2+2ry$ である.

(iii-1) $cr\neq 0$ かつ X の 3 次方程式 $crX^3+(2br-dp)X^2+(ar-2cp)X-bp=0$ の任意の実数解 α は "$(p,\alpha)=(0,0)$ かつ $(a,b)\neq(0,0)$" または "$(p,\alpha)\neq(0,0)$ かつ $(c\alpha^2+2b\alpha+a, d\alpha^2+2c\alpha+b)=(0,0)$" を満たす.

(iii-2) $p=r=0$, $(c,d)\neq(0,0)$ かつ, すべての実数 α に対して, $(c\alpha^2+2b\alpha+a, d\alpha^2+2c\alpha+b)\neq(0,0)$" が成り立つ.

(iii-3) $r=0$, $(c,d)\neq(0,0)$, $p\neq 0$ であり, $dX^2+2cX+b=0$ の任意の実数解 α は $c\alpha^2+2b\alpha+a=0$" を満たす.

(iii-4) $c=d=0$, $r\neq 0$ であり, $2brX^2+arX-bp=0$ の任意の実数解 α は "$(p,\alpha)=(0,0)$ かつ $(a,b)\neq(0,0)$" を満たす.

(iii-1) において $p=0$ の場合, $a=b=0$ とはなりえないため, (24.9) より f は原点で極値をとらない.
(iii-2) の場合 $f=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+e$ だから (24.9) より f は原点で極値をとらない.
(iii-3) の場合 $f=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+3px^2+e$ だから (24.9) より f は原点で極値をとらない.
(iii-4) において $p=0$ の場合, $f=ax^3+3bx^2y+3ry^2+e$ だから (24.9) より f は原点で極値をとらない.

24.4 一直線上にない 3 点を停留点にもつ 2 変数の 3 次関数

f が A$(0,0)$, B$(1,0)$, C$(0,1)$ を停留点にもつとすれば

$$f=-2px^3-6qx^2y-6qxy^2-2ry^3+3px^2+6qxy+3ry^2+e$$

の形であった.

P(x_0,y_0), Q(x_1,y_1), R(x_2,y_2) をそれぞれ A$(0,0)$, B$(1,0)$, C$(0,1)$ に写すアフィン変換 $T_{\mathrm{P,Q,R}}:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ ($T_{\mathrm{P,Q,R}}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$) を考える. $\Delta=(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)$ とおくと (24.5) から $\det A=\Delta^{-1}$ だから (24.7) と全節の議論から以下の結果が得られる.

命題 24.14 fT は P(x_0,y_0), Q(x_1,y_1), R(x_2,y_2) を停留点にもち, これらの点におけるヘッセ行列の行列式の値は

$\det H(fT)(\mathrm{P})=36\Delta^{-2}(pr-q^2)$ $\det H(fT)(\mathrm{Q})=36\Delta^{-2}(2pq-q^2-pr)$ $\det H(fT)(\mathrm{R})=36\Delta^{-2}(2qr-q^2-pr)$

$\delta=(pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r)\neq 0$ の場合

$$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}-\delta^{-1}(pr-q^2)(2qr-q^2-pr)\\-\delta^{-1}(pr-q^2)(2pq-q^2-pr)\end{pmatrix}$$

とおけば, S(x_3,y_3) も fT の停留点であり,

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{-(2qr-q^2-pr)(2pq-q^2-pr)x_0-(pr-q^2)(2qr-q^2-pr)x_1-(pr-q^2)(2pq-q^2-pr)x_2}{(pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r)}\\ y_3 &= \frac{-(2qr-q^2-pr)(2pq-q^2-pr)y_0-(pr-q^2)(2qr-q^2-pr)y_1-(pr-q^2)(2pq-q^2-pr)y_2}{(pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r)}\end{aligned}$$

$$\det H(fT)(\mathrm{S})=36\delta^{-1}\Delta^{-2}(pr-q^2)(2pq-q^2-pr)(2qr-q^2-pr)$$

が成り立つ.

注意 24.15 *1)* fT *は 以下の式で与えられる.*

$$\begin{aligned}
fT \;=\;& \Delta^{-3}(-2p((y_2-y_0)x+(-x_2+x_0)y-x_0y_2+x_2y_0)^3\\
&-6q((y_2-y_0)x+(-x_2+x_0)y-x_0y_2+x_2y_0)^2((-y_1+y_0)x+(x_1-x_0)y+x_0y_1-x_1y_0)\\
&-6q((y_2-y_0)x+(-x_2+x_0)y-x_0y_2+x_2y_0)((-y_1+y_0)x+(x_1-x_0)y+x_0y_1-x_1y_0)^2\\
&-2r((-y_1+y_0)x+(x_1-x_0)y+x_0y_1-x_1y_0)^3)\\
&+\Delta^{-2}(3p((y_2-y_0)x+(-x_2+x_0)y-x_0y_2+x_2y_0)^2\\
&+6q((y_2-y_0)x+(-x_2+x_0)y-x_0y_2+x_2y_0)((-y_1+y_0)x+(x_1-x_0)y+x_0y_1-x_1y_0)\\
&+3r((-y_1+y_0)x+(x_1-x_0)y+x_0y_1-x_1y_0)^2)+e
\end{aligned}$$

2) $X=pr-q^2$, $Y=2pq-q^2-pr$, $Z=2qr-q^2-pr$ *とおけば, 次の等式が成り立つ.*

$$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\frac{YZ}{XY+YZ+XZ}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\frac{XZ}{XY+YZ+XZ}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\frac{XY}{XY+YZ+XZ}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

3) $a=\dfrac{1}{\Delta}(y_2-y_0)$, $b=\dfrac{1}{\Delta}(-y_1+y_0)$, $c=\dfrac{1}{\Delta}(-x_2+x_0)$, $d=\dfrac{1}{\Delta}(x_1-x_0)$ *とおくと,*

$$\frac{\partial^2 fT}{\partial x^2}(\mathrm{P})=6(pa^2+2qab+rb^2),\quad \frac{\partial^2 fT}{\partial y^2}(\mathrm{P})=6(pc^2+2qcd+rd^2),$$

$$\frac{\partial^2 fT}{\partial x^2}(\mathrm{Q})=6(-pa^2-2qab+(-2q+r)b^2),\quad \frac{\partial^2 fT}{\partial y^2}(\mathrm{Q})=6(-pc^2-2qcd+(-2q+r)d^2),$$

$$\frac{\partial^2 fT}{\partial x^2}(\mathrm{R})=6((p-2q)a^2-2qab-rb^2),\quad \frac{\partial^2 fT}{\partial y^2}(\mathrm{R})=6((p-2q)c^2-2qcd-rd^2).$$

$\delta\neq 0$ *の場合,* $u=2q^5-5pq^4+4p^2q^3-2p^2rq^2+2p^2r^2q-p^3r^2$, $v=q(q^4-6prq^2+4p^2rq+4pr^2q-3p^2r^2)$, $w=2q^5-5q^4r+4q^3r^2-2pr^2q^2+2p^2r^2q-p^2r^3$ *とおくと*

$$\frac{\partial^2 fT}{\partial x^2}(\mathrm{S})=6\delta^{-1}(ua^2+2vab+wb^2),\quad \frac{\partial^2 fT}{\partial x^2}(\mathrm{S})=6\delta^{-1}(uc^2+2vcd+wd^2)$$

以下では, f が 3 つ以上の非退化な停留点を持つ場合の極値について考える. (24.14) と (24.12) の 3) によりまず次の結果が分かる.

定理 24.16 *2 変数の 3 次関数が 3 つ以上の非退化な停留点をもつ場合, 極値をとる点は 1 つまたは 2 つである.*

ベクトル空間 V の逆写像を持つアフィン変換全体からなる群を $\mathrm{Aff}(V)$ で表すことにする. V を V の平行移動のなす群とみなせば, $\mathrm{Aff}(V)$ の正規部分群であり, $\mathrm{Aff}(V)$ は V と $\mathrm{GL}(V)$ の半直積である. 実際 $A\in\mathrm{GL}(V)$ と $\boldsymbol{c}\in V$ の対 $(A,\boldsymbol{c})$ に対して $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$ で与えられる V のアフィン変換を $T_{A,\boldsymbol{c}}$ で表せば, $T_{A,\boldsymbol{c}}\circ T_{B,\boldsymbol{d}}=T_{AB,\boldsymbol{c}+A\boldsymbol{d}}$ が成り立つ. V が $\boldsymbol{R}$ 上の有限次元ベクトル空間の場合, $\mathrm{Aff}_+(V)=\{T_{A,\boldsymbol{c}}|\,A\in\mathrm{GL}(V),\ \boldsymbol{c}\in V,\ \det(A)>0\}$ $\mathrm{Aff}_-(V)=\{T_{A,\boldsymbol{c}}|\,A\in\mathrm{GL}(V),\ \boldsymbol{c}\in V,\ \det(A)<0\}$ とおくと $\mathrm{Aff}_+(V)$ と $\mathrm{Aff}_-(V)$ は $\mathrm{Aff}(V)$ の連結成分である.

補題 24.17 $\rho:\mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)\to S^1$ *を* $\rho(T_{A,\boldsymbol{c}})=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ *(*$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$*),* $\eta:S^1\to\mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)$ *を* $\eta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T_{X,\mathbf{0}}$ *(*$X=\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix}$*) で定めれば,* $\rho\eta=id_{S^1}$, $\eta\rho\simeq id_{\mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)}$ *rel* $\eta(S^1)$ *である. すなわち* $\eta(S^1)$ *は* $\mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)$ *の強変位レトラクトである.*

証明 $\rho\eta=id_{S^1}$ は明らか. $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $(ad-bc>0)$, $t\in[0,1]$ に対し,

$$C(A,t)=\begin{pmatrix}at+\frac{a(1-t)}{\sqrt{a^2+c^2}} & bt-\frac{c(1-t)}{\sqrt{a^2+c^2}}\\ ct+\frac{c(1-t)}{\sqrt{a^2+c^2}} & dt+\frac{a(1-t)}{\sqrt{a^2+c^2}}\end{pmatrix}$$

とおくと, $\det C(A,t) = t(ad-bc) + (1-t)^2 + \dfrac{t(1-t)(a^2+c^2+ad-bc)}{\sqrt{a^2+c^2}} > 0$ だから $T_{C(A,t),t\boldsymbol{c}} \in \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)$ である. そこで $H : \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2) \times [0,1] \to \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)$ を $H(T_{A,\boldsymbol{c}}, t) = T_{C(A,t),t\boldsymbol{c}}$ で定めれば, H は $\eta(S^1)$ を固定する $\eta\rho$ から $id_{\mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)}$ へのホモトピーである. □

一直線上にない 3 点を停留点にもつ 2 変数の 3 次関数全体からなる集合を $\mathcal{C}$ で表し, さらに, 4 つの非退化な停留点をもつ 2 変数の 3 次関数全体からなる集合を $\mathcal{C}_4$ で表す. $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$, $e \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$f_{\boldsymbol{p},e} = -2px^3 - 6qx^2y - 6qxy^2 - 2ry^3 + 3px^2 + 6qxy + 3ry^2 + e$$

とおく. 写像 $\Phi : (\boldsymbol{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\}) \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2) \longrightarrow \mathcal{C}$ を $\Phi(\boldsymbol{p}, e, T) = f_{\boldsymbol{p},e}T$ で定めると, Φ は全射である. $(\boldsymbol{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\}) \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2)$ と $\mathcal{C}$ には右から $\mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2)$ がそれぞれ $((\boldsymbol{p}, e, T), S) \mapsto (\boldsymbol{p}, e, TS)$, $(f, S) \mapsto fS$ により作用している. このとき $\mathcal{C}_4$ は $\mathcal{C}$ の不変部分空間であり, Φ はこれらの作用に関して同変写像である. さらに

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, pr - q^2 \neq 0,\ 2pq - q^2 - pr \neq 0,\ 2qr - q^2 - pr \neq 0,\ (pr-q^2)^2 - 4q^2(q-p)(q-r) \neq 0 \right\}$$

とおくと, Φ は $U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2)$ を $\mathcal{C}_4$ の上に写し, $\Phi^{-1}(\mathcal{C}_4) = U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2)$ が成り立つ.

補題 24.18 $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in U$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x^2 - x & xy & y^2 - y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 2q & 2q \\ q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立てば, (x, y) は $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $\left(-\dfrac{(pr-q^2)(2qr-q^2-pr)}{(pr-q^2)^2 - 4q^2(q-p)(q-r)}, -\dfrac{(pr-q^2)(2pq-q^2-pr)}{(pr-q^2)^2 - 4q^2(q-p)(q-r)} \right)$ のいずれかである.

注意 24.19 $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in U$ ならば,

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1), \quad \left(-\frac{(pr-q^2)(2qr-q^2-pr)}{(pr-q^2)^2 - 4q^2(q-p)(q-r)}, -\frac{(pr-q^2)(2pq-q^2-pr)}{(pr-q^2)^2 - 4q^2(q-p)(q-r)} \right)$$

のどの *3* 点も同一直線上にはない.

命題 24.20 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^2)$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ とする. $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in U$, $e \in \boldsymbol{R}$ に対して $f_{\boldsymbol{p},e}T_{A,\boldsymbol{c}}$ が $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を停留点にもつとき, (s,t), $(a+s, c+t)$, $(b+s, d+t)$ は

$$\left\{ (0,0), (1,0), (0,1), \left(-\frac{(pr-q^2)(2qr-q^2-pr)}{(pr-q^2)^2 - 4q^2(q-p)(q-r)}, -\frac{(pr-q^2)(2pq-q^2-pr)}{(pr-q^2)^2 - 4q^2(q-p)(q-r)} \right) \right\}$$

の相異なる *3* 点である.

証明 $\dfrac{\partial f_{\boldsymbol{p},e}T_{A,\boldsymbol{c}}}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial f_{\boldsymbol{p},e}T_{A,\boldsymbol{c}}}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ はそれぞれ

$$-6((ap{+}cq)((ax{+}by{+}s)^2{-}ax{-}by{-}s) + 2q(a{+}c)(ax{+}by{+}s)(cx{+}dy{+}t) + (aq{+}cr)((cx{+}dy{+}t)^2{-}cx{-}dy{-}t))$$

$$-6((bp{+}dq)((ax{+}by{+}s)^2{-}ax{-}by{-}s) + 2q(b{+}d)(ax{+}by{+}s)(cx{+}dy{+}t) + (bq{+}dr)((cx{+}dy{+}t)^2{-}cx{-}dy{-}t))$$

となるため,

$$\frac{\partial f_{\boldsymbol{p},e}T_{A,\boldsymbol{c}}}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\frac{\partial f_{\boldsymbol{p},e}T_{A,\boldsymbol{c}}}{\partial x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{\partial f_{\boldsymbol{p},e}T_{A,\boldsymbol{c}}}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{\partial f_{\boldsymbol{p},e}T_{A,\boldsymbol{c}}}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\frac{\partial f_{\boldsymbol{p},e}T_{A,\boldsymbol{c}}}{\partial y}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{\partial f_{\boldsymbol{p},e}T_{A,\boldsymbol{c}}}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$$

から

$$\begin{pmatrix}s^2-s & st & t^2-t\\(a+s)^2-a-s & (a+s)(c+t) & (c+t)^2-c-t\\(b+s)^2-b-s & (b+s)(d+t) & (d+t)^2-d-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\2q & 2q\\q & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

である. $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ は正則だから

$$\begin{pmatrix}s^2-s & st & t^2-t\\(a+s)^2-a-s & (a+s)(c+t) & (c+t)^2-c-t\\(b+s)^2-b-s & (b+s)(d+t) & (d+t)^2-d-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\2q & 2q\\q & r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

が得られる. 従って (24.18) から結果が得られる. □

$$\alpha(\boldsymbol{p})=-\frac{(pr-q^2)(2qr-q^2-pr)}{(pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r)},\qquad \beta(\boldsymbol{p})=-\frac{(pr-q^2)(2pq-q^2-pr)}{(pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r)}$$

とおき,

$$K=\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix},\qquad L=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\qquad G(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\alpha(\boldsymbol{p}) & 1\\\beta(\boldsymbol{p}) & 0\end{pmatrix}$$

とおく.

命題 24.21 *(24.20) の条件を満たす* $(A,\boldsymbol{c})$ *の対は* $(E_2,\boldsymbol{0})$, $(L,\boldsymbol{0})$, $(K,\boldsymbol{e}_1)$, $(KL,\boldsymbol{e}_1)$, $(K^2,\boldsymbol{e}_2)$, $(K^2L,\boldsymbol{e}_2)$, $(G(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{0})$, $(G(\boldsymbol{p})L,\boldsymbol{0})$, $(G(\boldsymbol{p})K,\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right))$, $(G(\boldsymbol{p})KL,\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right))$, $(G(\boldsymbol{p})K^2,\boldsymbol{e}_1)$, $(G(\boldsymbol{p})K^2L,\boldsymbol{e}_1)$, $(LG(N\boldsymbol{p}),\boldsymbol{0})$, $(LG(N\boldsymbol{p})L,\boldsymbol{0})$, $(LG(N\boldsymbol{p})K,\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right))$, $(LG(N\boldsymbol{p})KL,\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right))$, $(LG(N\boldsymbol{p})K^2,\boldsymbol{e}_2)$, $(LG(N\boldsymbol{p})K^2L,\boldsymbol{e}_2)$, $(KG(M\boldsymbol{p}),\boldsymbol{e}_1)$, $(KG(M\boldsymbol{p})L,\boldsymbol{e}_1)$, $(KG(M\boldsymbol{p})K,\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right))$, $(KG(M\boldsymbol{p})KL,\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right))$, $(KG(M\boldsymbol{p})K^2,\boldsymbol{e}_2)$, $(KG(M\boldsymbol{p})K^2L,\boldsymbol{e}_2)$ *の 24 個である.*

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

とおくと $M^3=N^2=E_3$, $NMN=M^2$ が成り立ち, M と N で生成される $\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^3)$ の部分群を Σ とすれば $\Sigma=\{E_3,M,M^2,N,NM,NM^2\}$ であり, $\boldsymbol{p}\in U$ ならば $M\boldsymbol{p},N\boldsymbol{p}\in U$ となることに注意する.

命題 24.22 *$p,q,r\in\boldsymbol{R}$ に対し,*

$$u=-\frac{(pr-q^2)^3(2q^3-3(p+r)q^2+6pqr-pr(p+r))}{((pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r))^2},\quad v=-\frac{(q-p)(pr-q^2)^2}{(pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r)},\quad w=p$$

により $u, v, w \in \boldsymbol{R}$ を定めれば,

$$\begin{aligned}
uw - v^2 &= \frac{(pr-q^2)^3(2pq-q^2-pr)^2}{((pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r))^2} \\
2uv - v^2 - uw &= -\frac{(pr-q^2)^3(2pq-q^2-pr)^3(2qr-q^2-pr)}{((pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r))^3} \\
2vw - v^2 - uw &= \frac{(pr-q^2)^2(2pq-q^2-pr)^3}{((pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r))^2}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in U$ ならば $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in U$ である.

上の結果から, $\varphi : U \to U$ を

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{(pr-q^2)^3(2q^3-3(p+r)q^2+6pqr-pr(p+r))}{((pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r))^2} \\ -\frac{(q-p)(pr-q^2)^2}{(pr-q^2)^2-4q^2(q-p)(q-r)} \\ p \end{pmatrix}$$

で定義する.

命題 24.23 φ は同型写像で, 逆写像 φ^{-1} は $\varphi^{-1} = N\varphi N$ で与えられる.

代数多様体 X から X 自身への同型写像全体からなる群を $\mathrm{Aut}(X)$ で表すことにする. M, N, φ で生成される $\mathrm{Aut}(U)$ の部分群を G とする.

命題 24.24 $G = \{1, M, M^2, N, NM, NM^2, \varphi, M\varphi, M^2\varphi, N\varphi, NM\varphi, NM^2\varphi, \varphi N, M\varphi N, M^2\varphi N, N\varphi N, NM\varphi N, NM^2\varphi N, \varphi M, M\varphi M, M^2\varphi M, N\varphi M, NM\varphi M, NM^2\varphi M\}$ であり, G における関係式は $N^2 = M^3 = \varphi^3 = 1$, $NMN = M^2$, $N\varphi N = \varphi^2$, $M\varphi M^2 = NM\varphi N$ で与えられる.

証明 関係式 $N^2 = M^3 = \varphi^3 = 1$, $NMN = M^2$, $N\varphi N = \varphi^2$, $M\varphi M^2 = NM\varphi N$ は M, N, φ の定義から直接計算で示される. $\varphi^3 = 1$ と $N\varphi N = \varphi^2$ から $\varphi N\varphi = N$ が得られ, これと $M\varphi M^2 = NM\varphi N$ から $\varphi M\varphi = \varphi NM\varphi NM = \varphi M^2 N\varphi NM = \varphi M^2\varphi M^2 M\varphi M = \varphi MNM\varphi NM\varphi M = \varphi N\varphi NM\varphi M = M\varphi M$. さらに, $\varphi M^2\varphi = M^2 M\varphi M^2\varphi = M^2 NM\varphi N\varphi = MN\varphi N\varphi = M$, $NM\varphi NM = NM\varphi M^2 MNM = M\varphi$, $NM^2\varphi NM^2 = NM^2\varphi M^2 NM = \varphi M$, $\varphi NM\varphi = NM^2\varphi^2 = NM^2 N\varphi N = M\varphi N$, $\varphi NM^2\varphi = NM^2\varphi M\varphi = N\varphi M$ が成り立つため, $G = \{1, M, M^2, N, NM, NM^2, \varphi, M\varphi, M^2\varphi, N\varphi, NM\varphi, NM^2\varphi, \varphi N, M\varphi N, M^2\varphi N,$
$N\varphi N, NM\varphi N, NM^2\varphi N, \varphi M, M\varphi M, M^2\varphi M, N\varphi M, NM\varphi M, NM^2\varphi M\}$ が得られる. □

注意 24.25 G_n を G の位数 n の要素全体からなる G の部分集合とすると,

$$\begin{aligned}
G_2 &= \{N, NM, NM^2, M^2\varphi, N\varphi, \varphi N, M\varphi M, NM^2\varphi N, NM\varphi M\} \\
G_3 &= \{M, M^2, \varphi, M\varphi, N\varphi N, NM\varphi N, \varphi M, M^2\varphi M\} \\
G_4 &= \{NM\varphi, NM^2\varphi, M\varphi N, M^2\varphi N, N\varphi M, NM^2\varphi M\}
\end{aligned}$$

である.

系 24.26 Σ_4 を *4* 次対称群として, 準同型写像 $\theta : G \to \Sigma_4$ を $\theta(N) = (1,2)$, $\theta(M) = (1,2,3)$, $\theta(\varphi) = (1,4,2)$ で定めれば, θ は同型写像である.

$\lambda, \mu, \nu : U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2) \to U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2)$ を

$$\lambda(\boldsymbol{p}, e, T) = (N\boldsymbol{p}, e, T_{L,\boldsymbol{0}}T), \quad \mu(\boldsymbol{p}, e, T) = (M\boldsymbol{p}, e + {}^t\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{p}, T_{K^2,\boldsymbol{e}_2}T), \quad \nu(\boldsymbol{p}, e, T) = (\varphi(\boldsymbol{p}), e, T_{G(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{0}}^{-1}T)$$

で定義して, λ, μ, ν で生成される $\mathrm{Aut}(U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2))$ の部分群を $\widetilde{G}$ とする. (24.24) から以下の結果が示される.

命題 24.27 $\widetilde{G} = \{1, \mu, \mu^2, \lambda, \lambda\mu, \lambda\mu^2, \nu, \mu\nu, \mu^2\nu, \lambda\nu, \lambda\mu\nu, \lambda\mu^2\nu, \nu\lambda, \mu\nu\lambda, \mu^2\nu\lambda, \lambda\nu\lambda, \lambda\mu\nu\lambda, \lambda\mu^2\nu\lambda, \nu\mu, \mu\nu\mu, \mu^2\nu\mu, \lambda\nu\mu, \lambda\mu\nu\mu, \lambda\mu^2\nu\mu\}$ であり, $\widetilde{G}$ における関係式は $\lambda^2 = \mu^3 = \nu^3 = 1$, $\lambda\mu\lambda = \mu^2$, $\lambda\nu\lambda = \nu^2$, $\mu\nu\mu^2 = \lambda\mu\nu\lambda$ で与えられる.

系 24.28 準同型写像 $\tilde{\theta} : \widetilde{G} \to \Sigma_4$ を $\tilde{\theta}(\lambda) = (1,2)$, $\theta(\mu) = (1,2,3)$, $\theta(\nu) = (1,4,2)$ で定めれば, $\tilde{\theta}$ は同型写像である.

また, (24.21) を用いて計算すれば次の結果が得られる.

命題 24.29 *(1)* $(\boldsymbol{p}, e, T) \in U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2)$ に対し, $\Phi^{-1}(\Phi(\boldsymbol{p}, e, T)) = \{\gamma(\boldsymbol{p}, e, T) | \gamma \in \widetilde{G}\}$ である.
(2) $\gamma \in \widetilde{G}$, $(\boldsymbol{p}, e, T) \in U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2)$ に対して $\gamma(\boldsymbol{p}, e, T) = (\boldsymbol{p}, e, T)$ となるのは $\gamma = 1$ の場合に限る.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\},\ e \in \boldsymbol{R},\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^2),\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^2) \text{ に対し,}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(\boldsymbol{p}, e, T_{A,\boldsymbol{c}}) \quad = \quad & -2(pa^3 + 3qa^2c + 3qac^2 + rc^3)x^3 - 6(pa^2b + qa^2d + 2qabc + 2qacd + qbc^2 + rc^2d)x^2y \\
& -6(pab^2 + qb^2c + 2qabd + 2qbcd + qad^2 + rcd^2)xy^2 - 2(pb^3 + 3qb^2d + 3qbd^2 + rd^3)y^3 \\
& +3(pa^2 + 2qac + rc^2 - 2pa^2s - 2qa^2t - 4qacs - 4qact - 2qc^2s - 2rc^2t)x^2 \\
& +6(pab + qad + qbc + rcd - 2pabs - 2qabt - 2qads - 2qadt - 2qbcs - 2qbct - 2qcds - 2rcdt)xy \\
& +3(pb^2 + 2qbd + rd^2 - 2pb^2s - 2qb^2t - 4qbds - 4qbdt - 2qd^2s - 2rd^2t)y^2 \\
& +6(pas + qat + qcs + rct - pas^2 - qcs^2 - 2qast - 2qcst - qat^2 - rct^2)x \\
& +6(pbs + qbt + qds + rdt - pbs^2 - qds^2 - 2qbst - 2qdst - qbt^2 - rdt^2)y \\
& -2ps^3 - 6qs^2t - 6qst^2 - 2rt^3 + 3ps^2 + 6qst + 3rt^2 + e
\end{aligned}$$

だから Φ を $\boldsymbol{R}^{10}$ の開集合から $\boldsymbol{R}^{10}$ の開集合への写像とみなせば, Φ の $(\boldsymbol{p}, e, T_{A,\boldsymbol{c}})$ における微分の行列式の値は

$$-6^7(\det(A))^8(pr - q^2)(2pq - q^2 - pr)(2rq - q^2 - pr)$$

となるため, 逆写像定理より $\Phi : U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2) \to \mathcal{C}_4$ は局所同相写像である. このことと, (24.29) から次の結果が得られる.

命題 24.30 $\Phi : U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2) \to \mathcal{C}_4$ は位数 *24* の被覆写像である.

U 上の実数値関数 $X, Y, Z, \delta : U \to \boldsymbol{R}$ を

$$X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xz - y^2,\ Y\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2xy - y^2 - xz,\ Z\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2yz - y^2 - xz,\ \delta\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3y^4 + 4xy^3 + 4y^3z - 6xy^2z + x^2z^2$$

で定める. このとき, (24.11) から $\delta = -(XY + YZ + XZ)$ である.

命題 24.31 次の等式が成り立つ.

$$XM = Y, \quad YM = Z, \quad ZM = X, \quad \delta M = \delta, \quad XN = X, \quad YN = Z, \quad ZN = Y, \quad \delta N = \delta,$$
$$X\varphi = \frac{X^3Y^2}{\delta^2}, \qquad Y\varphi = \frac{X^3Y^3Z}{\delta^3}, \qquad Z\varphi = \frac{X^2Y^3}{\delta^2}, \qquad \delta\varphi = \frac{X^6Y^6}{\delta^5}.$$

U の部分集合を以下のように定め,

$$U_{X,+}=\{\boldsymbol{x}\in U|\,X(\boldsymbol{x})>0\},\quad U_{X,-}=\{\boldsymbol{x}\in U|\,X(\boldsymbol{x})<0\},\quad U_{Y,+}=\{\boldsymbol{x}\in U|\,Y(\boldsymbol{x})>0\},$$

$$U_{Y,-}=\{\boldsymbol{x}\in U|\,Y(\boldsymbol{x})<0\},\quad U_{Z,+}=\{\boldsymbol{x}\in U|\,Z(\boldsymbol{x})>0\},\quad U_{Z,-}=\{\boldsymbol{x}\in U|\,Z(\boldsymbol{x})<0\},$$

$$U_{\delta,+}=\{\boldsymbol{x}\in U|\,\delta(\boldsymbol{x})>0\},\quad U_{\delta,-}=\{\boldsymbol{x}\in U|\,\delta(\boldsymbol{x})<0\}$$

さらに,

$$U_0=U_{X,-}\cap U_{Y,-}\cap U_{Z,-}\cap U_{\delta,-},\quad U_2=U_{X,-}\cap U_{Y,-}\cap U_{Z,+}\cap U_{\delta,-},\quad U_3=U_{X,-}\cap U_{Y,-}\cap U_{Z,+}\cap U_{\delta,+},$$

$$U_4=U_{X,-}\cap U_{Y,+}\cap U_{Z,-}\cap U_{\delta,-},\quad U_5=U_{X,-}\cap U_{Y,+}\cap U_{Z,-}\cap U_{\delta,+},\quad U_7=U_{X,-}\cap U_{Y,+}\cap U_{Z,+}\cap U_{\delta,+},$$

$$U_8=U_{X,+}\cap U_{Y,-}\cap U_{Z,-}\cap U_{\delta,-},\quad U_9=U_{X,+}\cap U_{Y,-}\cap U_{Z,-}\cap U_{\delta,+},\quad U_{11}=U_{X,+}\cap U_{Y,-}\cap U_{Z,+}\cap U_{\delta,+},$$

$$U_{13}=U_{X,+}\cap U_{Y,+}\cap U_{Z,-}\cap U_{\delta,+}$$

とおけば, (24.12) の 3) から U は互いに交わらない開集合 $U_0, U_2, U_3, U_4, U_5, U_7, U_8, U_9, U_{11}, U_{13}$ の合併である. (24.31) から次の結果が得られる.

命題 24.32 同型写像 $M, N, \varphi: U\to U$ により上の部分集合は以下のように写される.

$$M(U_0)=N(U_0)=\varphi(U_2)=U_0,\quad N(U_4)=\varphi(U_4)=M(U_8)=U_2,\quad \varphi(U_0)=M(U_2)=N(U_2)=U_4,$$

$$M(U_4)=N(U_8)=\varphi(U_8)=U_8,\quad N(U_5)=\varphi(U_7)=M(U_9)=U_3,\quad M(U_3)=N(U_3)=\varphi(U_3)=U_5,$$

$$\varphi(U_5)=N(U_7)=M(U_{11})=U_7,\quad M(U_5)=N(U_9)=\varphi(U_{11})=U_9,\quad M(U_{13})=N(U_{13})=\varphi(U_{13})=U_{11},$$

$$M(U_7)=\varphi(U_9)=N(U_{11})=U_{13}.$$

注意 24.33 $\boldsymbol{e}_2\in U_0$, $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3\in U_9$ だから上の結果から U_i $(i=0,2,3,4,5,7,8,9,11,13)$ は空集合でない.

写像 $\psi: U\to\boldsymbol{R}^3$ を $\psi(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}X(\boldsymbol{x})\\Y(\boldsymbol{x})\\Z(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$ で定義する.

命題 24.34 $U_{0,+}=\{\boldsymbol{x}\in U_0|\,{}^t\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{x}>0\}$, $U_{0,-}=\{\boldsymbol{x}\in U_0|\,{}^t\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{x}<0\}$ とおくと, $U_0=U_{0,+}\cup U_{0,-}$ であり, $U_{0,+}$ と $U_{0,+}$ はともに $\boldsymbol{R}^3$ と同相である.

証明 まず, $\delta=-(XY+YZ+XZ)$ だから $U_{X,-}\cap U_{Y,-}\cap U_{Z,-}\subset U_{\delta,-}$ となるため $U_0=U_{X,-}\cap U_{Y,-}\cap U_{Z,-}$ である. 従って $O_8=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\, x,y,z<0\right\}$ とおけば $U_0=\psi^{-1}(O_8)$ であり, O_8 は $\boldsymbol{R}^3$ と同相である. また, U_0 のベクトルで第 2 成分が 0 になるものは存在しないため, $U_0=U_{0,+}\cup U_{0,-}$ である. $\xi: O_8\to\boldsymbol{R}^3$ を

$$\xi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(y-x)\sqrt{-\frac{x+y}{2(y+z)(x+z)}}\\ \sqrt{-\frac{(x+y)(x+z)}{2(y+z)}}\\ (z-x)\sqrt{-\frac{x+z}{2(x+y)(y+z)}}\end{pmatrix}$$

で定めれば, (24.13) から任意の $\boldsymbol{y}\in O_8$ に対して $\psi(\xi(\boldsymbol{y}))=\psi(-\xi(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}\in U_{0,+}$ ならば $\xi(\psi(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\in U_{0,-}$ ならば $\xi(\psi(\boldsymbol{x}))=-\boldsymbol{x}$ である. そこで $\xi_+: O_8\to U_{0,+}$, $\xi_-: O_8\to U_{0,-}$ を $\xi_+(\boldsymbol{y})=\xi(\boldsymbol{y})$, $\xi_-(\boldsymbol{y})=-\xi(\boldsymbol{y})$ で定めればこれらは同相写像になる. □

命題 24.35 $M(U_{0,+})=N(U_{0,+})=U_{0,+}$, $M(U_{0,-})=N(U_{0,-})=U_{0,-}$.

証明 $N(U_{0,+}) = U_{0,+}$, $N(U_{0,-}) = U_{0,-}$ は明らか. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U_0$ のとき, $2y(-x+y) = -X(\boldsymbol{x}) - Y(\boldsymbol{x}) > 0$, $2y(y-z) = -X(\boldsymbol{x}) - Z(\boldsymbol{x}) > 0$ だから $\boldsymbol{x} \in U_{0,+}$ ならば $-x+y, y-z > 0$, $\boldsymbol{x} \in U_{0,-}$ ならば $-x+y, y-z < 0$ となるため, $M(U_{0,+}), M^{-1}(U_{0,+}) \subset U_{0,+}$, $M(U_{0,-}), M^{-1}(U_{0,-}) \subset U_{0,-}$ である. 従って $M(U_{0,+}) = U_{0,+}$, $M(U_{0,-}) = U_{0,-}$ を得る. □

次に U_9 について考える.

命題 24.36 $U_{9,+} = \{\boldsymbol{x} \in U_9 | {}^t\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{x}, {}^t\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{x} > \max\{0, {}^t\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{x}\}\}$, $U_{9,-} = \{\boldsymbol{x} \in U_9 | {}^t\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{x}, {}^t\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{x} < \min\{0, {}^t\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{x}\}\}$ とおくと, $U_9 = U_{9,+} \cup U_{9,-}$ である.

証明 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U_9$ のとき, $2(y-x)(y-z) = -Y(\boldsymbol{x}) - Z(\boldsymbol{x}) > 0$, $2x(z-y) = X(\boldsymbol{z}) - Y(\boldsymbol{x}) > 0$, $2z(x-y) = X(\boldsymbol{z}) - Z(\boldsymbol{x}) > 0$ だから, "$x, z > 0$ かつ $x, z > y$" または "$x, z < 0$ かつ $x, z < y$" が成り立つ. □

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U_{9,+}$ のとき, $X(\boldsymbol{x}) > 0$, $Y(\boldsymbol{x}) < 0$, $Z(\boldsymbol{x}) < 0$, $\delta(\boldsymbol{x}) > 0$ はそれぞれ以下の条件と同値である.

(i) $-\sqrt{xz} < y < \sqrt{xz}$

(ii) $x < z$ または "$x \geqq z$ かつ $y < x - \sqrt{x(x-z)}$"

(iii) $x > z$ または "$x \leqq z$ かつ $y < z - \sqrt{z(z-z)}$"

(iv) $3y^4 - 4(x+z)y^3 + 6xy^2z - x^2z^2 < 0$

x, z を定数とみて, $g(y) = 3y^4 - 4(x+z)y^3 + 6xy^2z - x^2z^2$ とおくと, $g'(y) = 12y(y-x)(y-z)$, $g(0) = -x^2z^2$, $g(x) = -x^2(x-z)^2$, $g(z) = -z^2(x-z)^2$ $g(-\sqrt{xz}) = 4xz\sqrt{xz}(\sqrt{x} + \sqrt{z})^2$ である. 従って, $x, z > 0$ ならば $g(y) = 0$ の解は区間 $(-\sqrt{xz}, 0)$ 1 つだけあり, さらに $x \neq z$ ならば 0 以上の $g(y) = 0$ の解は区間 $(\max\{x, z\}, +\infty)$ に 1 つだけある. そこで $(-\sqrt{xz}, 0)$ に含まれる解を $\sigma(x, z)$ とすると, 連続関数 $\sigma : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (-\infty, 0)$ が定まる. 以上のことから, $\boldsymbol{x} \in U_{9,+}$ のとき, 以下の場合が考えられる.

(1) $x = z > 0$ の場合.
$g(y) = (y-x)^3(3y+x)$ だから上の 4 つの条件は $\sigma(x, x) = -\dfrac{x}{3} < y < x$ と同値である.

(2) $x > z > 0$ の場合.
$x - \sqrt{x(x-z)} < z < \sqrt{xz}$ だから上の 4 つの条件は $\sigma(x, z) < y < x - \sqrt{x(x-z)}$ と同値である.

(3) $z > x > 0$ の場合.
$z - \sqrt{z(z-x)} < x < \sqrt{xz}$ だから上の 4 つの条件は $\sigma(x, z) < y < z - \sqrt{z(z-x)}$ と同値である.

関数 $\tau : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ を $\tau(x, z) = \begin{cases} x - \sqrt{x(x-z)} & x \geqq z > 0 \\ z - \sqrt{z(z-x)} & z \geqq x > 0 \end{cases}$ で定めると, τ は連続である. 上の議論から, 次の結果を得る.

命題 24.37 $U_{9,+} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x, z > 0,\ \sigma(x, z) < y < \tau(x, z) \right\}$ であり, $U_{9,+}$ は $\boldsymbol{R}^3$ と同相である. また $\boldsymbol{x} \mapsto -\boldsymbol{x}$ によって $U_{9,+}$ は $U_{9,-}$ の上に *1* 対 *1* に写される.

命題 24.38 $N(U_{9,+}) = M\varphi M(U_{9,-}) = U_{9,+}$, $N(U_{9,-}) = M\varphi M(U_{9,+}) = U_{9,-}$.

証明 $N(U_{9,+}) = U_{9,+}$, $N(U_{9,-}) = U_{9,-}$ は明らか. (24.32) から $M\varphi M(U_9) = U_9$ であり, $U_{9,+}$, $U_{9,-}$ は U_9 の連結成分だから, $M\varphi M(U_{9,+}) \subset U_{9,+}$ または $M\varphi M(U_{9,+}) \subset U_{9,-}$ のいずれかが成り立つ. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U$ のとき,

$$M\varphi M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z(\boldsymbol{x})^3(2y^3-3xy^2+x^2z)}{\delta(\boldsymbol{x})^2} \\ \frac{yY(\boldsymbol{x})^2Z(\boldsymbol{x})^2}{\delta(\boldsymbol{x})^2} \\ \frac{Y(\boldsymbol{x})^3(2y^3-3y^2z+xz^2)}{\delta(\boldsymbol{x})^2} \end{pmatrix}$$

である. $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \in U_{9,+}$ は $M\varphi M(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \in U_{9,-}$ と写されるため, $M\varphi M(U_{9,+}) \subset U_{9,-}$ の方が成り立ち, 主張が示される. □

U の部分集合を以下のように定める.

$$U_{2,+} = N\varphi(U_{0,+}),\ U_{2,-} = N\varphi(U_{0,-}),\ U_{4,+} = \varphi(U_{0,+}),\ U_{4,-} = \varphi(U_{0,-}),\ U_{8,+} = M\varphi(U_{0,+}),\ U_{8,-} = M\varphi(U_{0,-}),$$

$$U_{3,+} = M(U_{9,+}),\ U_{3,-} = M(U_{9,-}),\ U_{5,+} = M^2(U_{9,+}),\ U_{5,-} = M^2(U_{9,-}),\ U_{7,+} = M^2\varphi(U_{9,+}),$$

$$U_{7,-} = M^2\varphi(U_{9,-}),\ U_{11,+} = N\varphi(U_{9,+}),\ U_{11,-} = N\varphi(U_{9,-}),\ U_{13,+} = \varphi(U_{9,+}),\ U_{13,-} = \varphi(U_{9,-}).$$

(24.34), (24.36), (24.37) から $U_i = U_{i,+} \cup U_{i,-}$ $(i = 0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13)$ で, $U_{i,+}$, $U_{i,-}$ は $\boldsymbol{R}^3$ と同相な U_i の連結成分である. さらに (24.23), (24.32), (24.35), (24.38) から次の結果が得られる.

命題 24.39

$$M(U_{0,+}) = N(U_{0,+}) = \varphi(U_{2,+}) = U_{0,+}, \quad N(U_{4,+}) = \varphi(U_{4,+}) = M(U_{8,+}) = U_{2,+},$$

$$M(U_{0,-}) = N(U_{0,-}) = \varphi(U_{2,-}) = U_{0,-}, \quad N(U_{4,-}) = \varphi(U_{4,-}) = M(U_{8,-}) = U_{2,-},$$

$$\varphi(U_{0,+}) = M(U_{2,+}) = N(U_{2,+}) = U_{4,+}, \quad M(U_{4,+}) = N(U_{8,+}) = \varphi(U_{8,+}) = U_{8,+},$$

$$\varphi(U_{0,-}) = M(U_{2,-}) = N(U_{2,-}) = U_{4,-}, \quad M(U_{4,-}) = N(U_{8,-}) = \varphi(U_{8,-}) = U_{8,-},$$

$$N(U_{5,+}) = \varphi(U_{7,+}) = M(U_{9,+}) = U_{3,+}, \quad M(U_{3,+}) = N(U_{3,+}) = \varphi(U_{3,-}) = U_{5,+},$$

$$N(U_{5,-}) = \varphi(U_{7,-}) = M(U_{9,-}) = U_{3,-}, \quad M(U_{3,-}) = N(U_{3,-}) = \varphi(U_{3,+}) = U_{5,-},$$

$$\varphi(U_{5,-}) = N(U_{7,-}) = M(U_{11,-}) = U_{7,+}, \quad M(U_{5,+}) = N(U_{9,+}) = \varphi(U_{11,+}) = U_{9,+},$$

$$\varphi(U_{5,+}) = N(U_{7,+}) = M(U_{11,+}) = U_{7,-}, \quad M(U_{5,-}) = N(U_{9,-}) = \varphi(U_{11,-}) = U_{9,-},$$

$$M(U_{13,-}) = N(U_{13,+}) = \varphi(U_{13,+}) = U_{11,+}, \quad M(U_{7,+}) = \varphi(U_{9,+}) = N(U_{11,+}) = U_{13,+},$$

$$M(U_{13,+}) = N(U_{13,-}) = \varphi(U_{13,-}) = U_{11,-}, \quad M(U_{7,-}) = \varphi(U_{9,-}) = N(U_{11,-}) = U_{13,-}.$$

系 24.40

$$U_{ev,+} = U_{0,+} \cup U_{2,+} \cup U_{4,+} \cup U_{8,+}, \qquad U_{ev,-} = U_{0,-} \cup U_{2,-} \cup U_{4,-} \cup U_{8,-},$$

$$U_{od} = U_{3,+} \cup U_{3,-} \cup U_{5,+} \cup U_{5,-} \cup U_{7,+} \cup U_{7,-} \cup U_{9,+} \cup U_{9,-} \cup U_{11,+} \cup U_{11,-} \cup U_{13,+} \cup U_{13,-}$$

とおけば, これらは G の作用で閉じており, $U_{ev,+}$, $U_{ev,-}$, U_{od} の各連結成分に G は推移的に作用する.

$\lambda, \mu : U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2) \to U \times \boldsymbol{R} \times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2)$ の定義と (24.39) から次の結果が得られる.

命題 24.41

$$\lambda(U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2))=U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_-(\boldsymbol{R}^2),\quad \lambda(U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_-(\boldsymbol{R}^2))=U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2),$$
$$\mu(U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2))=U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2),\quad \mu(U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_-(\boldsymbol{R}^2))=U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_-(\boldsymbol{R}^2),$$
$$\lambda(U_{0,-}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2))=U_{0,-}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_-(\boldsymbol{R}^2),\quad \lambda(U_{0,-}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_-(\boldsymbol{R}^2))=U_{0,-}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2),$$
$$\mu(U_{0,-}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2))=U_{0,-}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2),\quad \mu(U_{0,-}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_-(\boldsymbol{R}^2))=U_{0,-}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_-(\boldsymbol{R}^2),$$
$$\lambda(U_{9,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2))=U_{9,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_-(\boldsymbol{R}^2),\quad \lambda(U_{9,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_-(\boldsymbol{R}^2))=U_{9,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2).$$

μ で生成される $\widetilde{G}$ の部分群を $\widetilde{G}_0$ とする.

定理 24.42 *(1)* $\mathcal{C}_4^+=\Phi(U_{ev,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2))$, $\mathcal{C}_4^-=\Phi(U_{ev,-}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2))$, $\mathcal{C}_4^2=\Phi(U_{od}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^2))$ とおけば, $\mathcal{C}_4^+$, $\mathcal{C}_4^-$, $\mathcal{C}_4^2$ は $\mathcal{C}_4$ の連結成分である.

(2) Φ を制限して得られる写像 $\Phi_+:U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)\to \mathcal{C}_4^+$, $\Phi_-:U_{0,-}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)\to \mathcal{C}_4^-$ はともに被覆度が *3* の被覆写像で, Φ_+ と Φ_- の各ファイバーには $\widetilde{G}_0$ が推移的に作用している. また, Φ を制限して得られる写像 $\Phi_2:U_{9,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)\to \mathcal{C}_4^2$ は同相写像である.

$t\in[0,1]$ に対し, $M(t)=\begin{pmatrix}1-t & t\\ -t & 1-2t\end{pmatrix}$, $R(t)=\begin{pmatrix}\cos 2\pi t & -\sin 2\pi t\\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t\end{pmatrix}$ とおけば, $\det M(t)=3t^2-3t+1>0$, $\det R(t)=1$ である. $x_0=(\boldsymbol{e}_2,0,T_{E_2,\boldsymbol{0}})$ とおき, $\zeta,\omega:[0,1]\to U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)$ を $\zeta(t)=(\boldsymbol{e}_2,0,T_{M(t),t\boldsymbol{e}_2})$, $\omega(t)=(\boldsymbol{e}_2,0,T_{R(t),\boldsymbol{0}})$ で定めれば $\zeta(0)=\omega(0)=\omega(1)=x_0$, $\zeta(1)=\mu x_0$ であり, $\pi_1(U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2),x_0)$ は ω のクラス $[\omega]$ で生成される無限巡回群である. $\Phi_+(x_0)=f_0$ とおいて, f_0 を $\mathcal{C}_4^+$ の基点とする.

補題 24.43 $U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)$ の道 ζ, $\mu\zeta$, $\mu^2\zeta$ の和 $\zeta*\mu\zeta*\mu^2\zeta$ は x_0 におけるループとして ω の逆の道 ω^{-1} とホモトピックである.

証明 $t\in[0,1]$ に対して行列 $A(t)$, ベクトル $\boldsymbol{c}(t)$ を

$$A(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1-3t & 3t\\ -3t & 1-6t\end{pmatrix} & 0\leqq t\leqq \dfrac{1}{3}\\ \begin{pmatrix}1-3t & 3-6t\\ -3+6t & -2+3t\end{pmatrix} & \dfrac{1}{3}\leqq t\leqq \dfrac{2}{3}\\ \begin{pmatrix}-5+6t & -3+3t\\ 3-3t & -2+3t\end{pmatrix} & \dfrac{2}{3}\leqq t\leqq 1\end{cases},\quad \boldsymbol{c}(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}0\\ 3t\end{pmatrix} & 0\leqq t\leqq \dfrac{1}{3}\\ \begin{pmatrix}-1+3t\\ 2-3t\end{pmatrix} & \dfrac{1}{3}\leqq t\leqq \dfrac{2}{3}\\ \begin{pmatrix}3-3t\\ 0\end{pmatrix} & \dfrac{2}{3}\leqq t\leqq 1\end{cases}$$

で定めると, $\zeta*\mu\zeta*\mu^2\zeta(t)=(\boldsymbol{e}_2,0,T_{A(t),\boldsymbol{c}(t)})$ である. (24.17) のホモトピー同値写像 $\rho:\mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2)\to S^1$ を考えると,

$$\rho(T_{A(t),\boldsymbol{c}(t)})=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{18t^2-6t+1}}\begin{pmatrix}1-3t\\ -3t\end{pmatrix} & 0\leqq t\leqq \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{\sqrt{45t^2-42t+10}}\begin{pmatrix}1-3t\\ -3+6t\end{pmatrix} & \dfrac{1}{3}\leqq t\leqq \dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{\sqrt{45t^2-78t+34}}\begin{pmatrix}-5+6t\\ 3-3t\end{pmatrix} & \dfrac{2}{3}\leqq t\leqq 1\end{cases}$$

だから, t が 0 から 1 まで動くと $\rho(T_{A(t),\boldsymbol{c}(t)})$ は円周上を時計回りに 1 周する. 従って, 主張が示される. □

定理 24.44 $\pi_1(\mathcal{C}_4^+,f_0)$ は $[\Phi_+\zeta]$ で生成される無限巡回群で, $\Phi_{+*}:\pi_1(U_{0,+}\times \boldsymbol{R}\times \mathrm{Aff}_+(\boldsymbol{R}^2),e_0)\to \pi_1(\mathcal{C}_4^+,f_0)$ は $[\omega]$ を $[\Phi_+\zeta]^{-3}$ に写す.

証明 $\Phi_+\zeta=\Phi_+\mu\zeta=\Phi_+\mu^2\zeta$ だから (24.42), (24.43) により結果が得られる. □

24.5　2次分数式でパラメータ表示される曲線について

t を媒介変数として $\begin{cases} x = \dfrac{at^2+bt+c}{t^2+ut+v} \\ y = \dfrac{pt^2+qt+r}{t^2+ut+v} \end{cases}$ で表される曲線を C とする.

$$\begin{cases} x-a = \dfrac{(b-au)\left(t+\frac{u}{2}\right)+c-av-\frac{u}{2}(b-au)}{\left(t+\frac{u}{2}\right)^2+v-\frac{u^2}{4}} \\ y-p = \dfrac{(q-pu)\left(t+\frac{u}{2}\right)+r-pv-\frac{u}{2}(q-pu)}{\left(t+\frac{u}{2}\right)^2+v-\frac{u^2}{4}} \end{cases}$$

より $s = t+\dfrac{u}{2}$ とおくと

$$\begin{cases} x-a = \dfrac{(b-au)s+c-av-\frac{u}{2}(b-au)}{s^2+v-\frac{u^2}{4}} \\ y-p = \dfrac{(q-pu)s+r-pv-\frac{u}{2}(q-pu)}{s^2+v-\frac{u^2}{4}} \end{cases} \quad \cdots (*)$$

である. まず $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 1 & u & v \end{vmatrix}$ とおくと, $\begin{vmatrix} b-au & c-av-\frac{u}{2}(b-au) \\ q-pu & r-pv-\frac{u}{2}(q-pu) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-au & c-av \\ q-pu & r-pv \end{vmatrix} = D$ が成り立つことに注意する.

$D=0$ の場合は $\alpha(x-a)+\beta(y-p)=0$ を満たす $\alpha,\ \beta\ ((\alpha,\beta)\neq(0,0))$ があるため, C は (a,p) を通る直線の1部である. 以下では $D\neq 0$ と仮定して $(*)$ を s について整理すると

$$\begin{cases} (x-a)s^2-(b-au)s+(x-a)\left(v-\dfrac{u^2}{4}\right)+c-av-\dfrac{u}{2}(b-au)=0 \\ (y-p)s^2-(q-pu)s+(y-p)\left(v-\dfrac{u^2}{4}\right)+r-pv-\dfrac{u}{2}(q-pu)=0 \end{cases} \quad \cdots (**)$$

であり, 一般に $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ かつ $\begin{cases} \alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \\ \lambda x^2+\mu x+\nu=0 \end{cases}$ ならば $(\alpha\nu-\gamma\lambda)^2=(\alpha\mu-\beta\lambda)(\beta\nu-\gamma\mu)$, すなわち $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \lambda & \nu \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \mu & \nu \end{vmatrix}$ が成り立つ. $\alpha=x-a$, $\beta=-(b-au)$, $\gamma=(x-a)\left(v-\dfrac{u^2}{4}\right)+c-av-\dfrac{u}{2}(b-au)$, $\lambda=y-p$, $\mu=-(q-pu)$, $\nu=(y-p)\left(v-\dfrac{u^2}{4}\right)+r-pv-\dfrac{u}{2}(q-pu)$ とすれば,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \lambda & \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & c-av \\ y-p & r-pv \end{vmatrix} + \frac{u}{2}\begin{vmatrix} x-a & -b+au \\ y-p & -q+pu \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \mu & \nu \end{vmatrix} = \left(v-\frac{u^2}{4}\right)\begin{vmatrix} -b+au & x-a \\ -q+pu & y-p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b-au & c-av \\ q-pu & r-pv \end{vmatrix}$$

だから $(**)$ より

$$\left(\begin{vmatrix} x-a & c-av \\ y-p & r-pv \end{vmatrix} + \frac{u}{2}\begin{vmatrix} x-a & -b+au \\ y-p & -q+pu \end{vmatrix}\right)^2 = \begin{vmatrix} x-a & -b+au \\ y-p & -q+pu \end{vmatrix}\left(\left(v-\frac{u^2}{4}\right)\begin{vmatrix} -b+au & x-a \\ -q+pu & y-p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b-au & c-av \\ q-pu & r-pv \end{vmatrix}\right)$$

そこで $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-au & c-av \\ q-pu & r-pv \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x-a \\ y-p \end{pmatrix}$ すなわち

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} x-a & c-av \\ y-p & r-pv \end{vmatrix} = \dfrac{1}{D}((r-pv)(x-a)-(c-av)(y-p)) \\ w = \dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} x-a & -b+au \\ y-p & -q+pu \end{vmatrix} = \dfrac{1}{D}(-(q-pu)(x-a)+(b-au)(y-p)) \end{cases}$$

とおくと, $\left(Dz+\dfrac{Duw}{2}\right)^2 = Dw\left(\left(v-\dfrac{u^2}{4}\right)(-Dw)-D\right)$ が得られるため $\left(z+\dfrac{uw}{2}\right)^2+\left(v-\dfrac{u^2}{4}\right)w^2+w=0$ である.

定理 24.45 $D \neq 0$ の場合, $u^2-4v=0$ ならば C は放物線の一部であり, $u^2-4v>0$ ならば C は 双曲線の一部, $u^2-4v<0$ ならば C は楕円の一部になる.

24.6 一方の偏導関数が可約な 2 変数の 3 次関数

$\mathrm{P}(x_0,y_0)$, $\mathrm{Q}(x_1,y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,y_2)$ を同一直線上にない $\boldsymbol{R}^2$ の三点, $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ とし, (24.5) の $T_{\mathrm{P,Q,R}}$ を考えて, $T_{\mathrm{P,Q,R}}=T_{A,\boldsymbol{c}}$, $F=\Phi(\boldsymbol{p},e,T_{\mathrm{P,Q,R}})=f_{\boldsymbol{p},e}T_{\mathrm{P,Q,R}}$ とおく.

命題 24.46 *(1)* $B=\begin{pmatrix}p & q\\ q & q\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}q & q\\ q & r\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおくと $f'_{\boldsymbol{p},e}(\boldsymbol{x})=(-6{}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}+6{}^t\boldsymbol{e}_1B\boldsymbol{x}, -6{}^t\boldsymbol{x}C\boldsymbol{x}+6{}^t\boldsymbol{e}_2C\boldsymbol{x})$.

(2) $\lambda(\boldsymbol{p},e,T_{\mathrm{P,Q,R}})=(N\boldsymbol{p},e,T_{\mathrm{P,R,Q}})$, $\mu(\boldsymbol{p},e,T_{\mathrm{P,Q,R}})=(M\boldsymbol{p},e+{}^t\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{p},T_{\mathrm{Q,R,P}})$

証明 (1) $f_{\boldsymbol{p},e}=-2px^3-6qx^2y-6qxy^2-2ry^3+3px^2+6qxy+3ry^2+e$ だから $\dfrac{\partial f_{\boldsymbol{p},e}}{\partial x}=-6(px^2+2qxy+qy^2-px-qy)$, $\dfrac{\partial f_{\boldsymbol{p},e}}{\partial y}=-6(qx^2+2qxy+ry^2-qx-ry)$ となるため結果を得る.

(2) 前節の λ, μ の定義からわかる. □

F は P, Q, R を停留点にもつが, 以下で $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ または $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ が可約になるための条件を求める.

命題 24.47 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{x}) &= \frac{-6}{\Delta}({}^t(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})((y_2-y_0)B-(x_2-x_0)C)(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})-((y_2-y_0){}^t\boldsymbol{e}_1B-(x_2-x_0){}^t\boldsymbol{e}_2C)(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}))\\
\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{y}) &= \frac{-6}{\Delta}({}^t(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})((-y_1+y_0)B+(x_1-x_0)C)(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})-((-y_1+y_0){}^t\boldsymbol{e}_1B+(x_1-x_0){}^t\boldsymbol{e}_2C)(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}))
\end{aligned}$$

証明 合成写像の微分法から $(f_{\boldsymbol{p},e}T_{\mathrm{P,Q,R}})'(\boldsymbol{x})=f'_{\boldsymbol{p},e}(T_{\mathrm{P,Q,R}}(\boldsymbol{x}))A$ だから (24.5) から結果が得られる. □

命題 24.48 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *が可約になるのは以下の 3 つの場合のうちのいずれかである.*

$$(i)\ p(y_2-y_0)=q(y_1-y_0)\quad (ii)\ q(y_2-y_0)=r(y_1-y_0)\quad (iii)\ p(y_2-y_0)=q(y_2-y_1)+r(y_1-y_0)$$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}$ *が可約になるのは以下の 3 つの場合のうちのいずれかである.*

$$(iv)\ p(x_2-x_0)=q(x_1-x_0)\quad (v)\ q(x_2-x_0)=r(x_1-x_0)\quad (vi)\ p(x_2-x_0)=q(x_2-x_1)+r(x_1-x_0)$$

証明 $a=\dfrac{1}{\Delta}(y_2-y_0)$, $b=\dfrac{1}{\Delta}(-y_1+y_0)$, $c=\dfrac{1}{\Delta}(-x_2+x_0)$, $d=\dfrac{1}{\Delta}(x_1-x_0)$,

$$\overline{P}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(ap+cq)x^2+2(a+c)qxy+(aq+cr)y^2-(ap+cq)x-(aq+cr)y,$$

$$\overline{Q}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(bp+dq)x^2+2(b+d)qxy+(bq+dr)y^2-(bp+dq)x-(bq+dr)y$$

とおくと, (24.47) から $\dfrac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = -6\overline{P}T_{\mathrm{P,Q,R}}(\boldsymbol{x})$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = -6\overline{Q}T_{\mathrm{P,Q,R}}(\boldsymbol{x})$ である. $T_{\mathrm{P,Q,R}}$ は逆写像をもつため, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ が可約であるためには, $\overline{P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overline{Q}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ がそれぞれ可約であることが必要十分である. (24.2) から $\overline{P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overline{Q}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が可約であるためには

$$(ap+cq)(aq+cr)(q(a+c)-(ap+cr)) = 0, \qquad (bp+dq)(bq+dr)(q(b+d)-(bp+dr)) = 0$$

がそれぞれ成り立つことが必要十分である. 従って, 結果が得られる. □

注意 24.49 *(24.29)* と *(24.46)* の *2)* から $F = \Phi(\boldsymbol{p}, e, T_{\mathrm{P,Q,R}}) = \Phi(N\boldsymbol{p}, e, T_{\mathrm{P,R,Q}}) = \Phi(M\boldsymbol{p}, e + {}^t\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{p}, T_{\mathrm{Q,R,P}})$ であることに注意する. $q(y_2-y_0) = r(y_1-y_0)$ が成り立つ場合は, $\Phi(N\boldsymbol{p}, e, T_{\mathrm{P,R,Q}})$ が上の *1)* の条件を満たしていることになる. 従ってこの場合は, 以下の $p(y_2-y_0) = q(y_1-y_0)$ が成り立つ場合の議論において, p と r を入れ換え, R と Q を入れ換えた場合に他ならない. また, $p(y_2-y_0) = q(y_2-y_1)+r(y_1-y_0)$ が成り立つ場合, $\Phi(M\boldsymbol{p}, e + {}^t\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{p}, T_{\mathrm{Q,R,P}})$ が上の *1)* の条件を満たしていることになる. 従ってこの場合は, 以下の $p(y_2-y_0) = q(y_1-y_0)$ が成り立つ場合の議論において, p, q, r をそれぞれ $-p+r$, $-p+q$, $-p$ で置き換え, さらに P, Q, R をそれぞれ Q, R, P で置き換えた場合に他ならない.

以下で $p(y_2-y_0) = q(y_1-y_0)$ が成り立つ場合を考える.

$\boxed{y_2 = y_0 \text{ の場合}}$

P, Q, R は一直線上にないため $y_1 \neq y_0$ だから $q = 0$ である. このとき $pr \neq 0$ であり, (24.14) から,

$$(x_3, y_3) = (-x_0+x_1+x_2, -y_0+y_1+y_2).$$

$\Delta = -(x_2-x_0)(y_1-y_0)$, $b = \dfrac{1}{x_2-x_1}$ とおくと

$$\det\, H(F)(\mathrm{P}) = \det\, H(F)(\mathrm{S}) = 36\Delta^{-2}pr \quad \det\, H(F)(\mathrm{Q}) = \det\, H(F)(\mathrm{R}) = -36\Delta^{-2}pr$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{P}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{Q}) = 6rb^2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{R}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{S}) = -6rb^2$$

従って F の極大・極小は次の表で与えられる.

	P	Q	R	S
$p>0,\ r>0$	極小	—	—	極大
$p>0,\ r<0$	—	極大	極小	—
$p<0,\ r>0$	—	極小	極大	—
$p<0,\ r<0$	極大	—	—	極小

また, $\rho = \dfrac{x_1-x_0}{x_2-x_0}$ とおけば $T_{\mathrm{P,Q,R}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \\ \frac{x-x_0}{x_2-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \end{pmatrix}$ より

$$F = -2p\left(\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^3 - 2r\left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^3 + 3p\left(\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^2 + 3r\left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^2 + e.$$

$\boxed{y_2 = y_1 \text{ の場合}}$

P, Q, R は一直線上にないため $y_1 \neq y_0$ だから $p = q$ である. このとき $q(q-r) \neq 0$ であり, (24.14) から,

$$(x_3, y_3) = (x_0-x_1+x_2, y_0-y_1+y_2).$$

$\Delta = -(x_2 - x_1)(y_1 - y_0)$, $a = \dfrac{1}{x_1 - x_2}$ とおくと,

$$\det H(F)(\mathrm{P}) = \det H(F)(\mathrm{R}) = -36\Delta^{-2}q(q-r), \quad \det H(F)(\mathrm{Q}) = \det H(F)(\mathrm{S}) = 36\Delta^{-2}q(q-r)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{P}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{Q}) = -6(q-r)a^2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{R}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{S}) = 6(q-r)a^2$$

従って F の極大・極小は次の表で与えられる.

	P	Q	R	S
$q > r$, $q > 0$	—	極大	—	極小
$q > r$, $q < 0$	極大	—	極小	—
$q < r$, $q > 0$	極小	—	極大	—
$q < r$, $q < 0$	—	極小	—	極大

また $\rho = \dfrac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1}$ とおけば $T_{\mathrm{P,Q,R}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \\ \frac{x-x_0}{x_2-x_1} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \end{pmatrix}$ より

$$F = -2p\left(\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^3 - 2(r-p)\left(\frac{x-x_0}{x_2-x_1} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^3 + 3p\left(\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^2 + 3(r-p)\left(\frac{x-x_0}{x_2-x_1} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^2 + e.$$

$\boxed{y_1 = y_0 \text{ の場合}}$

P, Q, R は一直線上にないため $y_2 \neq y_0$ だから $p = 0$ である. このとき $q(4r - 3q) \neq 0$ であり, $u = \dfrac{r}{q}$ とおくと $u \neq \dfrac{3}{4}$ で, (24.14) から

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{(2u-1)x_0 + (2u-1)x_1 - x_2}{4u-3} = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{1}{4u-3}\left(\frac{x_0+x_1}{2} - x_2\right) \\ y_3 &= \frac{(2u-1)y_0 + (2u-1)y_1 - y_2}{4u-3} = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{1}{4u-3}\left(\frac{y_0+y_1}{2} - y_2\right). \end{aligned}$$

従って (x_3, y_3) は P と Q の中点と R を通る直線上で, P と Q の中点を除いた部分にある. $\Delta = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)$, $a = \dfrac{1}{x_1 - x_0}$ とおくと,

$$\det H(F)(\mathrm{P}) = \det H(F)(\mathrm{Q}) = -36\Delta^{-2}q^2, \ \det H(F)(\mathrm{R}) = 36\Delta^{-2}q^2(2u-1), \ \det H(F)(\mathrm{S}) = 36\Delta^{-2}q^2\frac{2u-1}{4u-3}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{P}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{Q}) = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{R}) = -12qa^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{S}) = \frac{12qa^2}{4u-3}$$

以上から P, Q で F は極値をとらず, R, S における F の極大・極小は次の表で与えられる.

	$u < \frac{1}{2}$, $q > 0$	$u < \frac{1}{2}$, $q < 0$	$\frac{1}{2} < u < \frac{3}{4}$, $q > 0$	$\frac{1}{2} < u < \frac{3}{4}$, $q < 0$	$u > \frac{3}{4}$, $q > 0$	$u > \frac{3}{4}$, $q < 0$
R	—	—	極大	極小	極小	極大
S	極大	極小	—	—	極大	極小

また $\rho = \dfrac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}$ とおくと $T_{\mathrm{P,Q,R}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-x_0}{x_1-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_2-y_0} \\ \frac{y-y_0}{y_2-y_0} \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} F = {} & -6q\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_2-y_0}\right)^2\left(\frac{y-y_0}{y_2-y_0}\right) - 6q\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_2-y_0}\right)\left(\frac{y-y_0}{y_2-y_0}\right)^2 - 2qu\left(\frac{y-y_0}{y_2-y_0}\right)^3 \\ & + 6q\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_2-y_0}\right)\left(\frac{y-y_0}{y_2-y_0}\right) + 3qu\left(\frac{y-y_0}{y_2-y_0}\right)^2 + e \end{aligned}$$

$\boxed{y_0, y_1, y_2 \text{ が相異なる場合}}$

$k = \dfrac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0}$ とおくと $k \neq 0, 1$ かつ $q = kp$ であり,

$$\delta = p^2((k^2p - r)^2 - 4k^2(kp - p)(kp - r)) = p^2(r^2 + 2k^2(2k - 3)pr - k^3(3k - 4)p^2)$$

となる. $\delta \neq 0$ ならば $p \neq 0$ だから $u = \dfrac{r}{p}$ とおけば (24.14) から

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{((2k-1)x_0 - (2k-1)x_1 + x_2)u^2 + 2k((k^2-3k+1)x_0 + k^2x_1 - x_2)u - k^3((k-2)x_0 + kx_1 + (k-2)x_2)}{u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4)} \\ y_3 &= \frac{((2k-1)y_0 - (2k-1)y_1 + y_2)u^2 + 2k((k^2-3k+1)y_0 + k^2y_1 - y_2)u - k^3((k-2)y_0 + ky_1 + (k-2)y_2)}{u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4)} \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{vmatrix} (2k-1)x_0 - (2k-1)x_1 + x_2 & 2k((k^2-3k+1)x_0 + k^2x_1 - x_2) & -k^3((k-2)x_0 + kx_1 + (k-2)x_2) \\ (2k-1)y_0 - (2k-1)y_1 + y_2 & 2k((k^2-3k+1)y_0 + k^2y_1 - y_2) & -k^3((k-2)y_0 + ky_1 + (k-2)y_2) \\ 1 & 2k^2(2k-3) & -k^3(3k-4) \end{vmatrix}$$

の値は $-8k^4(k-1)^4 \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ に等しい. P, Q, R は同一直線上にないため, $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ の値は 0 でなく, $k \neq 0, 1$ だから上記の行列式の値は 0 でない. $\Delta = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)$, $b = \dfrac{1}{\Delta}(-y_1 + y_0)$ とおくと,

$$\det H(F)(\mathrm{P}) = 36\Delta^{-2}p^2(u - k^2), \qquad \det H(F)(\mathrm{Q}) = 36\Delta^{-2}p^2(2k - k^2 - u),$$

$$\det H(F)(\mathrm{R}) = 36\Delta^{-2}p^2(2ku - k^2 - u), \qquad \det H(F)(\mathrm{S}) = 36\Delta^{-2}p^2\frac{(u - k^2)(2k - k^2 - u)(2ku - k^2 - u)}{u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4)},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{P}) = 6pb^2(u - k^2), \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{Q}) = 6pb^2(u + k^2 - 2k),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{R}) = 6pb^2(-2k^3 + 3k^2 - u), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathrm{S}) = 6pb^2\frac{(u - k^2)(u + k^2 - 2k)(-2k^3 + 3k^2 - u)}{u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4)}$$

以上から $p > 0$ の場合, F の極大・極小は次の表で与えられる.

	P	Q	R	S
$u > k^2$, $u < 2k - k^2$	極小	極大	—	—
$u < k^2$, $u(2k-1) < k^2$, $k < 0$	—	—	—	極小
$u > k^2$, $u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4) < 0$	極小	—	—	—
$u > 2k - k^2$, $u(2k-1) < k^2$, $u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4) > 0$	極小	—	—	極大
$u > k^2$, $u(2k-1) > k^2$	極小	—	極大	—
$u < k^2$, $u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4) > 0$, $u > 1$	—	—	極大	極小
$u(2k-1) > k^2$, $u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4) < 0$, $u > 1$	—	—	極大	—
$u > 2k - k^2$, $u(2k-1) < k^2$, $k > 1$	—	—	—	極大
$u < 2k - k^2$, $u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4) < 0$	—	極大	—	—
$u < k^2$, $u(2k-1) < k^2$, $u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4) > 0$	—	極大	—	極小
$u < 2k - k^2$, $u(2k-1) > k^2$	—	極大	極小	—
$u > 2k - k^2$, $u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4) > 0$, $u < 0$	—	—	極小	極大
$u(2k-1) > k^2$, $u^2 + 2k^2(2k-3)u - k^3(3k-4) < 0$, $u < 0$	—	—	極小	—

また $\rho = \dfrac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}$ とおくと $T_{\mathrm{P,Q,R}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{k-\rho}\begin{pmatrix} k\frac{x-x_0}{x_1-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \\ -\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \end{pmatrix}$ より

$$
\begin{aligned}
F \;=\; & -\frac{2p}{(k-\rho)^3}\left(\left(k\frac{x-x_0}{x_1-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^3 + 3k\left(k\frac{x-x_0}{x_1-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^2\left(-\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + \frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)\right. \\
& \left. +3k\left(k\frac{x-x_0}{x_1-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)\left(-\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + \frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^2 + u\left(-\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + \frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^3\right) \\
& +\frac{3p}{(k-\rho)^2}\left(\left(k\frac{x-x_0}{x_1-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^2 + 2k\left(k\frac{x-x_0}{x_1-x_0} - \rho\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)\left(-\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + \frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)\right. \\
& \left. +u\left(-\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + \frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)^2\right) + e.
\end{aligned}
$$

例 24.50 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ と他にもう *1* 点非退化な停留点をもつ *2* 変数の *3* 次関数で, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ が可約なものは以下のいずれかの形である.

(i) $f = -6qx^2y - 6qxy^2 - 2ry^3 + 6qxy + 3ry^2$ *(*$q(3q-4r)(q-2r) \neq 0$*)*

(ii) $f = -2px^3 - 2ry^3 + 3px^2 + 3ry^2$ *(*$pr \neq 0$*)*

(iii) $f = -2px^3 - 6px^2y - 6pxy^2 - 2ry^3 + 3px^2 + 6pxy + 3ry^2$ *(*$p(p-r) \neq 0$*)*

(i) の場合, 停留点は $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ と $\left(\dfrac{q-2r}{3q-4r}, \dfrac{q}{3q-4r}\right)$ であり, $\det H(f)(0,0) = \det H(f)(1,0) = -36q^2 < 0$, $\det H(f)(0,1) = -36q(q-2r)$, $\det H(f)\left(\dfrac{q-2r}{3q-4r}, \dfrac{q}{3q-4r}\right) = \dfrac{36q^2(q-2r)}{3q-4r}$ である. さらに, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = -12q$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{q-2r}{3q-4r}, \dfrac{q}{3q-4r}\right) = \dfrac{-12q^2}{3q-4r}$ だから f の極大・極小は次の表で与えられる.

	$(0,1)$	$\left(\dfrac{q-2r}{3q-4r}, \dfrac{q}{3q-4r}\right)$
$q>0,\ q>2r$	—	極大
$3q>4r,\ q<2r$	極大	—
$q>0,\ 3q<4r$	極大	極小
$q<0,\ 3q>4r$	極小	極大
$3q<4r,\ q>2r$	極小	—
$q<0,\ q<2r$	—	極小

$\left(\dfrac{q-2r}{3q-4r}, \dfrac{q}{3q-4r}\right) = (k,l)$ とおくと, $\begin{cases} (3k-1)q - (4k-2)r = 0 \\ (3l-1)q - 4lr = 0 \end{cases}$. これを q, r に関する連立 *1* 次方程式と見て, $q = r = 0$ 以外の解を持つには, $l = -2k+1$. $k = \dfrac{1}{2}$ ならば $q = 0$, $k = 0$ ならば $q = 2r$ となるため, $k \neq 0, \dfrac{1}{2}$. 従って, $r = \dfrac{3k-1}{4k-2}q$ である. このとき, $3q - 4r = \dfrac{-q}{2k-1}$, $q - 2r = \dfrac{-kq}{2k-1}$ となるため, 上の表は以下のように書き直せる.

	$(0,1)$	$(k,-2k+1)$
$q>0,\ 0<k<\dfrac{1}{2}$	—	極大
$q>0,\ k<0$	極大	—
$q>0,\ k>\dfrac{1}{2}$	極大	極小
$q<0,\ k>\dfrac{1}{2}$	極小	極大
$q<0,\ k<0$	極小	—
$q<0,\ 0<k<\dfrac{1}{2}$	—	極小

また, この場合 f は定数倍をのぞけば, k を 0 とも $\dfrac{1}{2}$ とも異なる定数として, 次の形になる.

$$f=12(2k-1)x^2y+12(2k-1)xy^2+2(3k-1)y^3-12(2k-1)xy-3(3k-1)y^2$$

(ii) の場合, 停留点は $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ と $(1,1)$ である. このとき, $\det H(f)(0,0)=\det H(f)(1,1)=36pr$, $\det H(f)(1,0)=\det H(f)(0,1)=-36pr$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)=6p$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=-6p$ だから f の極大・極小は次の表で与えられる.

	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$p>0,\ r>0$	極小	—	—	極大
$p<0,\ r<0$	極大	—	—	極小
$p>0,\ r<0$	—	極大	極小	—
$p<0,\ r>0$	—	極小	極大	—

(iii) の場合, 停留点は $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ と $(-1,1)$ である. このとき, $\det H(f)(0,0)=\det H(f)(0,1)=36p(r-p)$, $\det H(f)(1,0)=\det H(f)(-1,1)=36p(p-r)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1)=6p$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)=-6p$ だから f の極大・極小は次の表で与えられる.

	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,1)$
$p>0,\ p>r$	—	極小	—	極大
$p<0,\ p<r$	—	極大	—	極小
$p>0,\ p<r$	極大	—	極小	—
$p<0,\ p>r$	極小	—	極大	—

(iii) の場合, $f=-2p(x+y)^3-2(r-p)y^3+3p(x+y)^2+3(r-p)y^2$ だから, $x+y$ を x で置き換え, $r-p$ を r で置き換えれば *(ii)* の場合に帰着することに注意する.

24.7 x^2y と xy^2 の項の係数が 0 である 2 変数の 3 次関数の極値

関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=ax^3+by^3+cx^2-xy+dy^2+px+qy$ (ただし $(a,b)\neq(0,0)$) で定義される, x^2y と xy^2 の項の係数が 0 で, xy の項の係数が -1 である 2 変数の 3 次関数とする.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}=3ax^2+2cx-y+p$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=3by^2-x+2dy+q$ より $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}3ax^2+2cx-y+p=0 & \cdots(i)\\ 3by^2-x+2dy+q=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) から $y=3ax^2+2cx+p$ であり, この式を (ii) に代入すれば

$$27a^2bx^4+36abcx^3+6(3abp+2bc^2+ad)x^2+(12bcp+4cd-1)x+3bp^2+2dp+q=0\ \cdots(iii)$$

が得られる. (iii) が実数 α を解にもつならば

$$q = -27a^2b\alpha^4 - 36abc\alpha^3 - 6(3abp + 2bc^2 + ad)\alpha^2 - (12bcp + 4cd - 1)\alpha - 3bp^2 - 2dp \ \cdots (iv)$$

であり, このとき (iii) の左辺は $x - \alpha$ と下記の多項式の積である.

$$(3ax + 3a\alpha + 2c)(9abx^2 + 6bcx + 9a\alpha^2 b + 6bc\alpha + 6bp + 2d) - 1 \ \cdots (v)$$

ab, ad, bc のいずれかが 0 でない場合, (v) が $x - \beta$ を因数にもつためには

$$(3a(\alpha + \beta) + 2c)(9ab(\alpha^2 + \beta^2) + 6bc(\alpha + \beta) + 6bp + 2d) = 1 \ \cdots (vi)$$

が成り立つことが必要十分である. このとき, $3a(\alpha + \beta) + 2c \neq 0$ であり, (vi) より

$$d = \frac{1}{2(3a(\alpha + \beta) + 2c)} - \frac{9}{2}ab(\alpha^2 + \beta^2) - 3bc(\alpha + \beta) - 3bp \ \cdots (vii)$$

である. さらに (v) は下記のように因数分解する.

$$3(x - \beta)\left(9a^2bx^2 + 3ab(3a(\alpha + \beta) + 4c)x + b(3a\alpha + 2c)(3a\beta + 2c) + \frac{a}{3a(\alpha + \beta) + 2c}\right) \ \cdots (viii)$$

また, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6ax + 2c$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$, t $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6by + 2d$ であり, 関数 $H : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を

$$H(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ 3ax^2+2cx+p \end{pmatrix} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ 3ax^2+2cx+p \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ 3ax^2+2cx+p \end{pmatrix} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ 3ax^2+2cx+p \end{pmatrix} \end{vmatrix} = 4(3ax + c)(9abx^2 + 6bcx + 3bp + d) - 1$$

によって定める.

(I) $b = d = 0$ または $a = c = 0$ の場合, (v) は定数 -1 だから, (iii) の解は α のみである. 従って f が極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix}$ のみであるが, $H(\alpha) = -1 < 0$ だから, f は極値をとらない.

(II) $b = 0$, $ad \neq 0$ の場合, (v) は x の 1 次式だから (iii) の解は α と β のみで, (vi) より $\beta = \dfrac{1}{6ad} - \dfrac{2c}{3a} - \alpha$ である. 従って f が極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \frac{1}{6ad} - \frac{2c}{3a} - \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p - \frac{\alpha}{d} - \frac{c}{3ad} + \frac{1}{12ad^2} \end{pmatrix}$ のみである. ここで $H(\alpha) = 4d(3a\alpha + c) - 1$, $H(\beta) = 1 - 4d(3a\alpha + c) = -H(\alpha)$ だから, $4d(3a\alpha + c) > 1$ ならば f は $\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix}$ で極値をとり, $\begin{pmatrix} \frac{1}{6ad} - \frac{2c}{3a} - \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p - \frac{\alpha}{d} - \frac{c}{3ad} + \frac{1}{12ad^2} \end{pmatrix}$ では極値をとらず, $4d(3a\alpha + c) < 1$ ならば f は $\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix}$ で極値をとらず, $\begin{pmatrix} \frac{1}{6ad} - \frac{2c}{3a} - \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p - \frac{\alpha}{d} - \frac{c}{3ad} + \frac{1}{12ad^2} \end{pmatrix}$ で極値をとる. また, $4d(3a\alpha + c) = 1$ ならば $\alpha = \beta = \dfrac{1}{12ad} - \dfrac{c}{3a}$ であり, $f\begin{pmatrix} s+\alpha \\ t+3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix} = as^3 + \dfrac{(2(3a\alpha + c)s - t)^2}{4(3a\alpha + c)}$ だから, s の符号が変わる前後で $f\begin{pmatrix} s+\alpha \\ 2(3a\alpha+c)s+3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix} = as^3$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix}$ で極値をとらない.

(III) $a = 0$, $bc \neq 0$ の場合, (v) は x の 1 次式だから (iii) の解は α と β のみで, (vi) より $\beta = \dfrac{1}{12bc^2} - \dfrac{d}{3bc} - \dfrac{p}{c} - \alpha$ である. 従って f が極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2c\alpha+p \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \frac{1}{12bc^2} - \frac{d}{3bc} - \frac{p}{c} - \alpha \\ \frac{1}{6bc} - \frac{2d}{3b} - 2c\alpha - p \end{pmatrix}$ のみである. ここで $H(\alpha) = 4c(6bc\alpha + 3bp + d) - 1$, $H(\beta) = 1 - 4c(6bc\alpha + 3bp + d) = -H(\alpha)$ だから $4c(6bc\alpha + 3bp + d) > 1$ ならば f は $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2c\alpha+p \end{pmatrix}$ で極値をとり, $\begin{pmatrix} \frac{1}{12bc^2} - \frac{d}{3bc} - \frac{p}{c} - \alpha \\ \frac{1}{6bc} - \frac{2d}{3b} - 2c\alpha - p \end{pmatrix}$ では極値をとらず, $4c(6bc\alpha + 3bp + d) < 1$ ならば f は $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2c\alpha+p \end{pmatrix}$ で極値をとらず, $\begin{pmatrix} \frac{1}{12bc^2} - \frac{d}{3bc} - \frac{p}{c} - \alpha \\ \frac{1}{6bc} - \frac{2d}{3b} - 2c\alpha - p \end{pmatrix}$ で極値をとる. また, $4c(6bc\alpha + 3bp + d) = 1$ ならば $\alpha = \beta = \dfrac{1}{24bc^2} - \dfrac{d}{6bc} - \dfrac{p}{2c}$ であり, $f\begin{pmatrix} s+\alpha \\ t+2c\alpha+p \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \alpha \\ 2c\alpha+p \end{pmatrix} = bt^3 + \dfrac{(2cs - t)^2}{4c}$ だから, s の符号が変わる前後で $f\begin{pmatrix} s+\alpha \\ 2cs+2c\alpha+p \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \alpha \\ 2c\alpha+p \end{pmatrix} = 8bc^3s^3$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2c\alpha+p \end{pmatrix}$ で極値をとらない.

(Ⅳ) $ab \neq 0,\ 9(\alpha-\beta)^2 < \dfrac{4}{ab(3a(\alpha+\beta)+2c)}$ の場合, $(viii)$ より (iii) の実数解は, α, β のみである．従って f が極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \beta \\ 3a\beta^2+2c\beta+p \end{pmatrix}$ のみである．このとき (vii) より下記の等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
H(\alpha) &= \frac{3(\alpha-\beta)(2b(3a\alpha+c)(3a(\alpha+\beta)+2c)^2+a)}{3a(\alpha+\beta)+2c} \\
H(\beta) &= -\frac{3(\alpha-\beta)(2b(3a\beta+c)(3a(\alpha+\beta)+2c)^2+a)}{3a(\alpha+\beta)+2c}
\end{aligned}
$$

$$
f\begin{pmatrix} s+\alpha \\ t+3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix} = as^3+bt^3+(3a\alpha+c)s^2-st+\left(\frac{1+3b(\alpha-\beta)(3a(\alpha+\beta)+2c)^2}{2(3a(\alpha+\beta)+2c)}\right)t^2
$$

$$
f\begin{pmatrix} s+\beta \\ t+3a\beta^2+2c\beta+p \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \beta \\ 3a\beta^2+2c\beta+p \end{pmatrix} = as^3+bt^3+(3a\beta+c)s^2-st+\left(\frac{1-3b(\alpha-\beta)(3a(\alpha+\beta)+2c)^2}{2(3a(\alpha+\beta)+2c)}\right)t^2
$$

上式と補題 24.9 から $H(\alpha)=0$ の場合には f は $\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix}$ で極値をとらず, $H(\beta)=0$ の場合には f は $\begin{pmatrix} \beta \\ 3a\beta^2+2c\beta+p \end{pmatrix}$ で極値をとらない．

(Ⅴ) $ab \neq 0,\ 9(\alpha-\beta)^2 \geqq \dfrac{4}{ab(3a(\alpha+\beta)+2c)}$ の場合, $k = \sqrt{9(\alpha-\beta)^2 - \dfrac{4}{ab(3a(\alpha+\beta)+2c)}} - 3(\alpha-\beta)$ とおけば, $(viii)$ より (iii) の実数解は, α, β, $\alpha + \dfrac{k}{6} + \dfrac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))}$, $\beta - \dfrac{k}{6} + \dfrac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))}$ である．このとき, $c = -\dfrac{3}{2}a(\alpha+\beta) - \dfrac{2}{abk(k+6(\alpha-\beta))}$ であり, f が極値をとる可能性があるのは, 次の 4 点である．

$$
\begin{pmatrix} \alpha \\ p-3a\alpha\beta-\frac{4\alpha}{abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta \\ p-3a\alpha\beta-\frac{4\beta}{abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} \alpha+\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))} \\ p-3a\alpha\beta+\frac{ak(k+6(\alpha-\beta))}{12}-\frac{2(6\beta-k)}{3abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta-\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))} \\ p-3a\alpha\beta+\frac{ak(k+6(\alpha-\beta))}{12}-\frac{2(6\alpha+\mathrm{k})}{3abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix}
$$

このとき (vii) より下記の等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
H(\alpha) &= -\frac{3(\alpha-\beta)(a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))+8)(a^2bk(k+6(\alpha-\beta))^2-8)}{4a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))^2} \\
H(\beta) &= \frac{3(\alpha-\beta)(a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))-8)(a^2bk(k+6(\alpha-\beta))^2+8)}{4a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))^2} \\
H\left(\alpha+\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))}\right) &= \frac{(k+3(\alpha-\beta))(a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))+8)(a^2bk(k+6(\alpha-\beta))^2+8)}{4a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))^2} \\
H\left(\beta-\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))}\right) &= -\frac{(k+3(\alpha-\beta))(a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))-8)(a^2bk(k+6(\alpha-\beta))^2-8)}{4a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} s+\alpha \\ t+p-3a\alpha\beta-\frac{4\alpha}{abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \alpha \\ p-3a\alpha\beta-\frac{4\alpha}{abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix} &= as^3+bt^3+\left(\frac{3a^2bk(\alpha-\beta)(k+6(\alpha-\beta))-4}{2abk(k+6(\alpha-\beta))}\right)s^2-st \\
&\quad -\left(\frac{a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))^2+48(\alpha-\beta)}{8ak(k+6(\alpha-\beta))}\right)t^2 \\
f\begin{pmatrix} s+\beta \\ t+p-3a\alpha\beta-\frac{4\beta}{abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \beta \\ p-3a\alpha\beta-\frac{4\beta}{abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix} &= as^3+bt^3-\left(\frac{3a^2bk(\alpha-\beta)(k+6(\alpha-\beta))+4}{2abk(k+6(\alpha-\beta))}\right)s^2-st \\
&\quad -\left(\frac{a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))^2-48(\alpha-\beta)}{8ak(k+6(\alpha-\beta))}\right)t^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f\begin{pmatrix} s+\alpha+\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))} \\ t+p-3a\alpha\beta+\frac{ak(k+6(\alpha-\beta)}{12}-\frac{2(6\beta-k)}{3abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \alpha+\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))} \\ p-3a\alpha\beta+\frac{ak(k+6(\alpha-\beta)}{12}-\frac{2(6\beta-k)}{3abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix} \\
&\qquad = as^3+bt^3+\left(\frac{a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))(k+3(\alpha-\beta))+4k}{2abk^2(k+6(\alpha-\beta))}\right)s^2-st \\
&\qquad\quad +\left(\frac{a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))^2+16(k+3(\alpha-\beta))}{8ak(k+6(\alpha-\beta)}\right)t^2 \\
&f\begin{pmatrix} s+\beta-\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))} \\ t+p-3a\alpha\beta+\frac{ak(k+6(\alpha-\beta)}{12}-\frac{2(6\alpha+k)}{3abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \beta-\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))} \\ p-3a\alpha\beta+\frac{ak(k+6(\alpha-\beta)}{12}-\frac{2(6\alpha+k)}{3abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix} \\
&\qquad = as^3+bt^3+\left(\frac{-a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))(k+3(\alpha-\beta))+4k}{2abk^2(k+6(\alpha-\beta))}\right)s^2-st \\
&\qquad\quad +\left(\frac{a^2bk^2(k+6(\alpha-\beta))^2-16(k+3(\alpha-\beta))}{8ak(k+6(\alpha-\beta))}\right)t^2
\end{aligned}
$$

上式と補題 24.9 から $H(\alpha)=0$ の場合には f は $\begin{pmatrix} \alpha \\ 3a\alpha^2+2c\alpha+p \end{pmatrix}$ で極値をとらず, $H(\beta)=0$ の場合には f は $\begin{pmatrix} \beta \\ 3a\beta^2+2c\beta+p \end{pmatrix}$ で極値をとらない. さらに, 上式と補題 24.9 から $H\Big(\alpha+\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))}\Big)=0$ の場合には f は $\begin{pmatrix} \alpha+\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))} \\ p-3a\alpha\beta+\frac{ak(k+6(\alpha-\beta)}{12}-\frac{2(6\beta-k)}{3abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix}$ で極値をとらず, $H\Big(\beta-\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))}\Big)=0$ の場合には f は $\begin{pmatrix} \beta-\frac{k}{6}+\frac{4}{3a^2bk(k+6(\alpha-\beta))} \\ p-3a\alpha\beta+\frac{ak(k+6(\alpha-\beta)}{12}-\frac{2(6\alpha+k)}{3abk(k+6(\alpha-\beta))} \end{pmatrix}$ で極値をとらない.

関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=ax^3+by^3+cx^2+dy^2+px+qy$ (ただし $(a,b)\neq(0,0)$) で定義される, x^2y, xy^2 と xy の項の係数が 0 である 2 変数の 3 次関数とする.

24.8 パラメータを含む 2 変数の 3 次関数の例

例 24.51 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が

$$f\binom{x}{y}=x^2y+axy^2+3bxy$$

で与えられるとき, f の停留点は次の表で与えられる.

a, b の条件	$a\neq0,\ b\neq0$	$a=0,\ b\neq0$	$a=b=0$
停留点	$\binom{0}{0}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3b}{a} \end{pmatrix}$, $\binom{-3b}{0}$, $\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$	$\binom{0}{0}$, $\binom{-3b}{0}$	$\binom{0}{0}$

$ab>0$ ならば $\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{b^3}{a}$ をとり, $ab<0$ ならば $\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{b^3}{a}$ をとる.

例 24.52 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が

$$f\binom{x}{y}=x^2y+axy^2+3bx^2$$

で与えられるとき, f の停留点は次の表で与えられる.

a, b の条件	$a\neq0,\ b\neq0$	$a\neq0,\ b=0$	$a=0$
停留点	$\binom{0}{0}$, $\binom{6ab}{-4b}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{p}$ $(p\in\boldsymbol{R})$

$a=0$ ならば $p<-3b$ である任意の実数 p に対して f は $\binom{0}{p}$ で極小値 0 をとり, $p>-3b$ である任意の実数 p に対して f は $\binom{0}{p}$ で極大値 0 をとる.

例 24.53 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が

$$f\binom{x}{y}=ax^3+3xy^2-6bxy-3cx$$

で与えられるとき, f の停留点は次の表で与えられる.

a,b,c の条件	$a>0,\ b^2+c\geqq0$	$a\leqq0,\ b^2+c\geqq0,\ (a,b^2+c)\neq(0,0)$	$a<0,\ b^2+c<0$	$a=b^2+c=0$
停留点	$\begin{pmatrix} 0 \\ b\pm\sqrt{b^2+c} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{b^2+c}{a}} \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ b\pm\sqrt{b^2+c} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{b^2+c}{a}} \\ b \end{pmatrix}$	$\binom{p}{b}$ $(p\in\boldsymbol{R})$

$a>0$ かつ $b^2+c>0$ ならば $\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{b^2+c}{a}} \\ b \end{pmatrix}$ で f は極小値 $-\frac{2(b^2+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{b^2+c}{a}} \\ b \end{pmatrix}$ で f は極大値 $\frac{2(b^2+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$ をとる. $a=b^2+c=0$ ならば, $p>0$ に対し, f は $\binom{p}{b}$ で極小値 0 をとり, $p<0$ に対し, f は $\binom{p}{b}$ で極大値 0 をとる.

例 24.54 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が

$$f\binom{x}{y}=x^3+a^3y^3+3bxy$$

で与えられるとき, f の停留点は次の表で与えられる.

a,b の条件	$a=b=0$	a, b の一方だけ 0	$a,b\neq 0$
停留点	$\binom{0}{p}$ $(p\in\boldsymbol{R})$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{0}$, $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix}$

$ab>0$ ならば $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{b^3}{a}$ をとり, $ab<0$ ならば $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{b^3}{a}$ をとる.

例 24.55 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が

$$f\binom{x}{y}=x^3-3xy-3ax+3by$$

で与えられるとき, f の停留点は $\begin{pmatrix} b \\ b^2-a \end{pmatrix}$ のみであるが, f はこの点で極値をとらない.

例 24.56 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が

$$f\binom{x}{y}=x^3-6bxy+3y^2+3\bigl(b^4-a\bigr)x$$

で与えられるとき, f の停留点は次の表で与えられる.

a,b の条件	$a>0$	$a=0$
停留点	$\begin{pmatrix} b^2-\sqrt{a} \\ b^3-b\sqrt{a} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b^2+\sqrt{a} \\ b^3+b\sqrt{a} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$

$a>0$ の場合, f は $\begin{pmatrix} b^2+\sqrt{a} \\ b^3+b \end{pmatrix}$ で極小値 $\bigl(b^2-2\sqrt{a}\bigr)\bigl(b^2+\sqrt{a}\bigr)^2$ をとり, $\begin{pmatrix} b^2-\sqrt{a} \\ b^3-b\sqrt{a} \end{pmatrix}$ では極値をとらない.

例 24.57 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が

$$f\binom{x}{y}=3ax^3+bxy^2+xy$$

で与えられるとき, f の停留点は次の表で与えられる.

a,b の条件	$ab>0$	$b\neq 0$, $ab\leqq 0$	$b=0$
停留点	$\binom{0}{0}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$	$\binom{0}{0}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$	$\binom{0}{0}$

$a>0$ かつ $b>0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $-\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $a<0$ かつ $b<0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $-\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとる.

例 24.58 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が

$$f\binom{x}{y}=2x^3-3ax^2y+2b^2y^3-3cx^2-3b(\alpha+\beta)y^2+6\alpha\beta y$$

で与えられるとき, $D=b^2(\alpha-\beta)^2+2a(a\alpha+bc)(a\beta+bc)$ とおくと, f の停留点は次の表で与えられる.

a,b,c,α,β の条件	$b\neq 0$	$b=\alpha\beta=0$	$a^2\neq 2b^2$, $D\geqq 0$	$a^2=2b^2$, $a^2c\neq -b(\alpha+\beta)$
停留点	$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{b} \end{pmatrix}$	$\binom{0}{p}$ $(p\in\boldsymbol{R})$	$\begin{pmatrix} \frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c\pm a\sqrt{D}}{2b^2-a^3} \\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c\pm\sqrt{D}}{2b^2-a^3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)} \\ \frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)} \end{pmatrix}$

a,b,c,α,β の条件	$a^3=2b^2$, $a^2c=-b(\alpha+\beta)$, $ac^2=2\alpha\beta$
停留点	$\binom{ap+c}{p}$ $(p\in\boldsymbol{R})$

$b \neq 0$ の場合, $(a\alpha+bc)(\beta-\alpha)>0$ かつ $b(a\alpha+bc)<0$ ならば f は $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{3\alpha^2\beta-\alpha^3}{b}$ をとり, $(a\alpha+bc)(\beta-\alpha)>0$ かつ $b(a\alpha+bc)>0$ ならば f は $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{3\alpha^2\beta-\alpha^3}{b}$ をとる. $(a\beta+bc)(\alpha-\beta)>0$ かつ $b(a\beta+bc)<0$ ならば f は $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{3\alpha\beta^2-\beta^3}{b}$ をとり, $(a\beta+bc)(\alpha-\beta)>0$ かつ $b(a\beta+bc)>0$ ならば f は $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{3\alpha\beta^2-\beta^3}{b}$ をとる. $\alpha=\beta$ のとき, $f\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b}+t \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix}=2b^2t^3$ だから, $\binom{x}{y}$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\binom{0}{1}$ である直線上を動くとき, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix}$ の前後で $f\binom{x}{y}-f\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix}$ で極値をとらない.

$b=\alpha\beta=0$ の場合, $a=0$ かつ $c<0$ ならば任意の実数 p に対して $\binom{c}{p}$ で極大値 $-c^3$, $\binom{0}{p}$ で極小値 0 をとり, $a=0$ かつ $c>0$ ならば $\binom{0}{p}$ で極大値 0, $\binom{c}{p}$ で極小値 $-c^3$ をとる. $a\neq 0$ ならば, p が $ap+c<0$ を満たす場合, f は $\binom{0}{p}$ で極小値 0 をとる. p が $ap+c>0$ を満たす場合, f は $\binom{0}{p}$ で極大値 0 をとる.

$a^3 \neq 2b^2$ かつ $D>0$ の場合, $ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}$ が $2b^2-a^3$ と同符号ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}}{2b^2-a^3} \\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c+\sqrt{D}}{2b^2-a^3} \end{pmatrix}$ において極小値

$$\frac{2\alpha\beta(b(\alpha+\beta)+a^2c)-c^2(ab(\alpha+\beta)+2b^2c)}{2b^2-a^3}-\frac{2D\Big(b(\alpha+\beta)+a^2c+\sqrt{D}\Big)}{(2b^2-a^3)^2}$$

をとり, $ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}$ が $2b^2-a^3$ と異符号ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}}{2b^2-a^3} \\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c-\sqrt{D}}{2b^2-a^3} \end{pmatrix}$ において極大値

$$\frac{2\alpha\beta(b(\alpha+\beta)+a^2c)-c^2(ab(\alpha+\beta)+2b^2c)}{2b^2-a^3}-\frac{2D\Big(b(\alpha+\beta)+a^2c-\sqrt{D}\Big)}{(2b^2-a^3)^2}$$

をとる.

$a^3=2b^2$ かつ $a^2c \neq -b(\alpha+\beta)$ の場合, $(a\alpha+bc)(a\beta+bc)<0$ かつ $b(\alpha+\beta)+a^2c<0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)} \\ \frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)} \end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{12\alpha^2\beta^2-12ac^2\alpha\beta-4bc^3(\alpha+\beta)-a^2c^4}{4(b(\alpha+\beta)+a^2c)}$ をとり, $(a\alpha+bc)(a\beta+bc)<0$ かつ $b(\alpha+\beta)+a^2c>0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)} \\ \frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)} \end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{12\alpha^2\beta^2-12ac^2\alpha\beta-4bc^3(\alpha+\beta)-a^2c^4}{4(b(\alpha+\beta)+a^2c)}$ をとる.

例 24.59 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が

$$f\binom{x}{y}=12(2a-1)x^2y+12(2a-1)xy^2+2(3a-1)y^3-12(2a-1)xy-3(3a-1)y^2$$

で与えられるとき, f の停留点は次の表で与えられる.

a の条件	$a=\frac{1}{2}$	$a\neq\frac{1}{2}$
停留点	$\binom{p}{0}$ $(p\in\boldsymbol{R})$	$\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$, $\binom{a}{1-2a}$

$a=\frac{1}{2}$ の場合, p を任意の実数とするとき, $\binom{p}{0}$ で f は極大値 0 をとり, $\binom{p}{1}$ で f は極小値 $-\frac{1}{2}$ をとる.
$a<0$ の場合, f は $\binom{0}{1}$ で極大値 $1-3a$ をとる. $0<a<\frac{1}{2}$ の場合, f は $\binom{a}{1-2a}$ で極大値 $(a+1)(2a-1)^2$ をとり, $a>\frac{1}{2}$ の場合, f は $\binom{0}{1}$ で 極小値 $1-3a$ をとり, $\binom{a}{1-2a}$ で極大値 $(a+1)(2a-1)^2$ をとる.

例 24.60 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が

$$f\binom{x}{y}=2x^2y+2xy^2+2(3a-2)y^3-2x^2-6xy-(27a-20)y^2+4x+4(9a-8)y$$

で与えられるとき, f の停留点は次の表で与えられる.

a の条件	$a=\frac{3}{4}$	$a\neq\frac{3}{4}$
停留点	$\binom{-1}{1}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{0}{2}$	$\binom{-1}{1}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{0}{2}$, $\begin{pmatrix} \frac{2a-1}{4a-3} \\ \frac{4a-4}{4a-3} \end{pmatrix}$

$a<\frac{1}{2}$ の場合は, $\begin{pmatrix} \frac{2a-1}{4a-3} \\ \frac{4a-4}{4a-3} \end{pmatrix}$ で f は極小値 $\frac{240a^3-616a^2+528a-150}{(4a-3)^2}$ をとり, $\frac{1}{2}<a\leqq\frac{3}{4}$ の場合は, $\binom{0}{2}$ で極小値 $12a-16$ をとり, $a>\frac{3}{4}$ の場合は $\binom{0}{2}$ で f は極小値 $12a-16$ をとり, $\begin{pmatrix} \frac{2a-1}{4a-3} \\ \frac{4a-4}{4a-3} \end{pmatrix}$ で極大値 $\frac{240a^3-616a^2+528a-150}{(4a-3)^2}$ をとる.

例 24.61 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ が

$$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 12x^2y + 12axy^2 + (3a^2 - b^2 + c^2)y^3 - 12(\alpha + \beta)xy - 3(2a(\alpha + \beta) - b(\alpha - \beta))y^2 + 12\alpha\beta y$$

(ただし $bc \geqq 0$) で与えられるとき, f の停留点は次の表で与えられる.

a,b,c,α,β の条件	$b \neq c$	$b = c \neq 0$	$b = c = 0$, $\alpha = \beta$
停留点	$\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \beta \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}$	$\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \beta \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{a(\alpha-\beta)}{2b} \\ \frac{\alpha-\beta}{2b} \end{pmatrix}$	$\left(\begin{smallmatrix} \alpha - ap \\ 2p \end{smallmatrix}\right)$ $(p \in \boldsymbol{R})$

$c(b+c) > 0$ かつ $c(\alpha - \beta) > 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{(\alpha-\beta)^3(b+2c)}{(b+c)^2}$ をとり, $c(b+c) > 0$ かつ $c(\alpha - \beta) < 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}$ において極大値 $-\frac{(\alpha-\beta)^3(b+2c)}{(b+c)^2}$ をとる. $c(b-c) < 0$ かつ $c(\alpha - \beta) < 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{(\alpha-\beta)^3(b-2c)}{(b-c)^2}$ をとり, $c(b-c) < 0$ かつ $c(\alpha - \beta) > 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}$ において極大値 $-\frac{(\alpha-\beta)^3(b-2c)}{(b-c)^2}$ をとる. $b = c = 0$ かつ $\alpha = \beta$ の場合, $p > 0$ ならば f は $\left(\begin{smallmatrix} \alpha - ap \\ 2p \end{smallmatrix}\right)$ において極小値 0 をとり, $p < 0$ ならば f は $\left(\begin{smallmatrix} \alpha - ap \\ 2p \end{smallmatrix}\right)$ において極大値 0 をとる.

例 24.62 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ が

$$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2x^3 + 3(a^2b - \alpha - \beta)x^2 + 6abxy + 3by^2 + 6(abc + \alpha\beta)x + 6bcy$$

(ただし $b \neq 0$) で与えられるとき, f の停留点は $\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ -a\alpha - c \end{smallmatrix}\right)$ と $\begin{pmatrix} \beta \\ -a\beta - c \end{pmatrix}$ である. $b(\alpha - \beta) > 0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ -a\alpha - c \end{smallmatrix}\right)$ で f は極小値 $-\alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 3bc^2$ をとり, $b(\alpha - \beta) < 0$ ならば $\begin{pmatrix} \beta \\ -a\beta - c \end{pmatrix}$ で f は極小値 $-\beta^3 + 3\alpha\beta^2 - 3bc^2$ をとる.

例 24.63 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ が

$$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2x^3 - 6a^2(b^2 - c^2)^2xy^2 + 2a(d^2 - 2a^2(b^2 - c^2)^2(b^2 + c^2))y^3 - 6ad(b^2 - c^2)y^2 + 6a(b^2 - c^2)^2y$$

(ただし $a \neq 0$, $b \neq 0, \pm c$) で与えられるとき, f の停留点は次の表で与えられる.

a,b,c,d の条件	$d \neq 2ab(b^2 - c^2)$	$d \neq -2ab(b^2 - c^2)$	$d \neq 2ac(b^2 - c^2)$	$d \neq -2ac(b^2 - c^2)$
停留点	$\begin{pmatrix} \frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$

$a(d + 2ab(b^2 - c^2)) < 0$ かつ $b > 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{2a(b^2-c^2)^3(d+4ab(b^2-c^2))}{(d+2ab(b^2-c^2))^2}$ をとり,

$a(d + 2ab(b^2 - c^2)) > 0$ かつ $b < 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{2a(b^2-c^2)^3(d+4ab(b^2-c^2))}{(d+2ab(b^2-c^2))^2}$ をとる.

$a(d - 2ab(b^2 - c^2)) < 0$ かつ $b < 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{2a(b^2-c^2)^3(d-4ab(b^2-c^2))}{(d-2ab(b^2-c^2))^2}$ をとり,

$a(d - 2ab(b^2 - c^2)) > 0$ かつ $b > 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{2a(b^2-c^2)^3(d-4ab(b^2-c^2))}{(d-2ab(b^2-c^2))^2}$ をとる.

$a(d + 2ac(b^2 - c^2)) > 0$ かつ $c > 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{2a(b^2-c^2)^3(d+4ac(b^2-c^2))}{(d+2ac(b^2-c^2))^2}$ をとり,

$a(d + 2ac(b^2 - c^2)) < 0$ かつ $c < 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{2a(b^2-c^2)^3(d+4ac(b^2-c^2))}{(d+2ac(b^2-c^2))^2}$ をとる.

$a(d - 2ac(b^2 - c^2)) > 0$ かつ $c < 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{2a(b^2-c^2)^3(d+4ac(b^2-c^2))}{(d-2ac(b^2-c^2))^2}$ をとり,

$a(d - 2ac(b^2 - c^2)) < 0$ かつ $c > 0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{2a(b^2-c^2)^3(d+4ac(b^2-c^2))}{(d-2ac(b^2-c^2))^2}$ をとる.

例 24.64 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ が

$$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2axy^2 - 8a^2by^3 - x^2 - 8acxy + 2a^2dy^2 - 2a(3\alpha^2 - 6(b+c)\alpha - 9(b+c)^2 + 8c^2 + d + r^2)x$$
$$- 8a^2(\alpha^3 - 3(2b+c)\alpha^2 + (9b^2 + 12bc + 3c^2 - r^2)\alpha - 9b^2c - 18bc^2 - c^3 + cd + cr^2)y$$

で与えられるとき, f の停留点は $\left(\begin{smallmatrix} a(\alpha^2+2(3b-c)\alpha+9b^2+18bc+c^2-d-r^2) \\ 2\alpha \end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix} -a(2\alpha^2-4c\alpha-18b^2-24bc+2c^2+d\pm 2r(\alpha-3b-c)) \\ 3b+3c-\alpha\pm r \end{smallmatrix}\right)$ *(複号同順)* である. $\boldsymbol{p}_0 = \left(\begin{smallmatrix} a(\alpha^2+2(3b-c)\alpha+9b^2+18bc+c^2-d-r^2) \\ 2\alpha \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{p}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -a(2\alpha^2-4c\alpha-18b^2-24bc+2c^2+d+2r(\alpha-3b-c)) \\ 3b+3c-\alpha+r \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{p}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -a(2\alpha^2-4c\alpha-18b^2-24bc+2c^2+d-2r(\alpha-3b-c)) \\ 3b+3c-\alpha-r \end{smallmatrix}\right)$ とおく.
$|r| > 3|b+c-\alpha|$ ならば f は $\boldsymbol{p}_0$ で極大値 $-a^2(15\alpha^4 - 44(b+c)\alpha^3 + (90b^2 + 180bc + 42c^2 - 6d - 14r^2)\alpha^2 - 12(b+c)(9b^2 + 18bc + c^2 - d - r^2)\alpha - (9b^2 + 18bc + c^2 - d - r^2)^2)$ をとる.
$r(r + 3b + 3c - 3\alpha) < 0$ ならば f は $\boldsymbol{p}_1$ で極大値 $a^2(12\alpha^4 - 64(b+c)\alpha^3 + (72b^2 + 144bc + 120c^2 - 4r^2 + 6d)\alpha^2 - 12(b+c)(8c^2 + d - 2r^2)\alpha + 108b^4 + 432b^3c + 504b^2c^2 + 144bc^3 + 28c^4 - 4r^2(3b+c)(3b+5c) - 2d(9b^2 + 18bc + c^2 - r^2) + d^2 + 8r^3(\alpha - b - c))$ をとる.
$r(r - 3b - 3c + 3\alpha) < 0$ ならば f は $\boldsymbol{p}_2$ で極大値 $a^2(12\alpha^4 - 64(b+c)\alpha^3 + (72b^2 + 144bc + 120c^2 - 4r^2 + 6d)\alpha^2 - 12(b+c)(8c^2 + d - 2r^2)\alpha + 108b^4 + 432b^3c + 504b^2c^2 + 144bc^3 + 28c^4 - 4r^2(3b+c)(3b+5c) - 2d(9b^2 + 18bc + c^2 - r^2) + d^2 - 8r^3(\alpha - b - c))$ をとる.

25 回転体の体積・回転面の面積

命題 25.1 $\boldsymbol{R}^3$ において, xz 平面上の $x \geqq 0$ の部分に含まれる領域 D を z 軸のまわりに回転させて得られる領域を E とする. このとき E の体積は $\displaystyle\iint_D 2\pi x\,dxdy$ で与えられる.

証明 z 軸を軸とした角度 θ の回転は, 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換で, $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \in D$ に対し, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta \\ x\sin\theta \\ y \end{pmatrix}$ だから, E は $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x\cos\theta \\ x\sin\theta \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in D,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \right\}$ で与えられる領域である. そこで, 写像 $\varphi : D \times [0, 2\pi] \to E$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x\cos\theta \\ x\sin\theta \\ y \end{smallmatrix}\right)$ で定めれば φ は全射であり, φ の定義域 $D \times [0, 2\pi]$ から体積が 0 の部分 $D \times \{2\pi\}$ と $(D \cap (z\text{ 軸})) \times [0, 2\pi]$ を除いた部分では φ は単射である. また, $\det\varphi'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = x$ だから, E の体積は $\displaystyle\iiint_E dxdydz = \iiint_{D\times[0,2\pi]} x\,dxdyd\theta = \iint_D 2\pi x\,dxdy$ である. □

定義 25.2 D を $\boldsymbol{R}^n$ の体積を持つ領域, $\rho : D \to [0, \infty)$ を連続関数とする.

$$m(D) = \iint \cdots \int_D \rho\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right) dx_1dx_2\cdots dx_n, \quad b_i(D) = \iint \cdots \int_D x_i\rho\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right) dx_1dx_2\cdots dx_n \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

とおき, $\dfrac{b_i(D)}{m(D)}$ を第 i 成分とする $\boldsymbol{R}^n$ の点を, ρ を密度関数とする D の重心という.

次の結果は「パップス=ギュルダンの定理」と呼ばれる定理である.

系 25.3 $\boldsymbol{R}^3$ において, xz 平面上の $x \geqq 0$ の部分に含まれる領域 D を z 軸のまわりに回転させて得られる領域を E とすれば, E の体積は, つねに値が 1 である定数値関数を密度関数とする D の重心が z 軸の回りに *1* 周する間に動いた距離と, D の面積の積に等しい.

証明 D の面積を A とおくと, 定義 25.2 より $m(D)=\iint_D dxdz=A$, $b_1(D)=\iint_D x\,dxdz$ であり, D の重心は z 軸の回りに半径 $\dfrac{b_1(D)}{m(D)}$ の円周上を 1 周するため, その移動距離は $\dfrac{2\pi b_1(D)}{m(D)}=\dfrac{1}{A}\iint_D 2\pi x\,dxdz$ である. 従って, 命題 25.1 から結果が得られる. □

命題 25.1 の D が縦線集合の場合には, D を z 軸の回りに回転させて得られる回転体の体積は以下で与えられる.

系 25.4 閉区間 $[a,b]$ で定義され, 0 以上の値をとる連続関数 $f,g:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ に対し, xz 平面の領域 D_x, D_z を

$$D_z=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\0\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,a\leqq y\leqq b,\,f(y)\leqq x\leqq g(y)\right\},\qquad D_x=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\0\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,a\leqq x\leqq b,\,f(x)\leqq y\leqq g(x)\right\}$$

で定義する. D_z を z 軸の回りに回転させて得られる回転体を E_z とし, $a\geqq 0$ のとき, D_x を z 軸の回りに回転させて得られる回転体を E_x とすれば, E_z, E_x の体積はそれぞれ $\displaystyle\int_a^b\pi(g(x)^2-f(x)^2)\,dx$, $\displaystyle\int_a^b 2\pi x(g(x)-f(x))\,dx$ で与えられる.

証明 命題 25.1 から, E_z, E_x の体積はそれぞれ

$$\iint_{D_z}2\pi x\,dxdy=\int_a^b\left(\int_{f(y)}^{g(y)}2\pi x\,dx\right)dy=\int_a^b\left[\pi x^2\right]_{x=f(y)}^{x=g(y)}dy=\int_a^b\pi(g(y)^2-f(y)^2)\,dy=\int_a^b\pi(g(x)^2-f(x)^2)\,dx$$

$$\iint_{D_x}2\pi x\,dxdy=\int_a^b\left(\int_{f(x)}^{g(x)}2\pi x\,dy\right)dx=\int_a^b\left[\pi xy\right]_{y=f(x)}^{y=g(x)}dx=\int_a^b 2\pi x(g(x)-f(x))\,dx$$

で与えられる. □

D を $\boldsymbol{R}^2$ の領域とし, $\boldsymbol{\psi}:D\to\boldsymbol{R}^3$ を曲面 S のパラメータ表示とする. $\boldsymbol{\psi}$ の x 成分, y 成分, z 成分の関数をそれぞれ f, g, h として, 写像 $\boldsymbol{\psi}_x,\boldsymbol{\psi}_y:D\to\boldsymbol{R}^3$ を

$$\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\\\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{x})\\\frac{\partial h}{\partial x}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{\psi}_y(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x})\\\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{x})\\\frac{\partial h}{\partial y}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$$

で定義する. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in D$ とし ε, δ は「微小な」実数で, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x+\varepsilon\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x\\y+\delta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x+\varepsilon\\y+\delta\end{pmatrix}$ を 4 つの頂点とする長方形は D に含まれるとする. この長方形を $R(\boldsymbol{x};\varepsilon,\delta)$ で表し, $\boldsymbol{\psi}$ による $R(\boldsymbol{x};\varepsilon,\delta)$ の像 $\boldsymbol{\psi}(R(\boldsymbol{x};\varepsilon,\delta))$ を考えれば, この面積 (が定義されるとすれば) は, $\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\psi}_y(\boldsymbol{x})$ が曲面 S の $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ における接ベクトルであることから, ε と δ の絶対値が小さいとき, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})+\delta\boldsymbol{\psi}_y(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x})+\delta\boldsymbol{\psi}_y(\boldsymbol{x})$ を 4 つの頂点とする S の $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ における接平面上の平行四辺形の面積で近似され, ε と δ を小さくすればするほど, 近似の誤差は 0 に近づくと考えられる. 一方, この平行四辺形の面積は $\|\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{\psi}_y(\boldsymbol{x})\||\varepsilon||\delta|$ に等しいため, この「微小な」面積を足し合わせて, ε, δ を 0 に近づけたときの極限値

$$\iint_D\|\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{\psi}_y(\boldsymbol{x})\|\,dxdy$$

が曲面 S の面積であると定義するのは, 上の議論 (言い訳) から妥当である. そこで, 次のように定義する.

定義 25.5 $\boldsymbol{\psi}:D\to\boldsymbol{R}^3$ を曲面 S のパラメータ表示とするとき, S の面積は

$$\iint_D\|\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{\psi}_y(\boldsymbol{x})\|\,dxdy$$

であると定義する.

上の定義を, S をパラメータ表示する写像 $\boldsymbol{\psi}: D \to \boldsymbol{R}^3$ の成分の関数を用いて書き直すと, S の面積は次の重積分で与えられる.

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \tag{25.1}$$

$\boldsymbol{R}^3$ において, xz 平面上の曲線 C が写像 $\boldsymbol{\varphi}: [a,b] \to \boldsymbol{R}^3$ によってパラメータ表示されているとき, C を z 軸のまわりに回転させて得られる曲面のパラメータ表示を考える. 曲線上の点 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ を z 軸のまわりに角度 θ だけ回転させた点は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t)$ であることから, 次のことがわかる.

命題 25.6 $\boldsymbol{R}^3$ において, xz 平面上の曲線 C が写像 $\boldsymbol{\varphi}: [a,b] \to \boldsymbol{R}^3$ によってパラメータ表示されており, $t \in [a,b]$ に対し, $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の成分が, 関数 $p, q: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を用いて $\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$ と表されているとき, C を z 軸のまわりに回転させて得られる曲面のパラメータ表示は, $\boldsymbol{\psi}\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} p(t)\cos\theta \\ p(t)\sin\theta \\ q(t) \end{pmatrix}$ で定義される写像 $\boldsymbol{\psi}: [a,b] \times [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ によって与えられる.

上の命題と曲面の面積の定義から, 回転面の面積は次のように与えられる.

命題 25.7 $\boldsymbol{R}^3$ において, xz 平面上の曲線 C が写像 $\boldsymbol{\varphi}: [a,b] \to \boldsymbol{R}^3$ によってパラメータ表示されており, $t \in [a,b]$ に対し, $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の成分が, 関数 $p, q: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を用いて $\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$ と表されているとき, C を z 軸の回りに回転させて得られる曲面を S とすれば, S の面積は $2\pi \displaystyle\int_a^b |p(s)|\sqrt{p'(s)^2 + q'(s)^2}\, ds$ で与えられる

証明 命題 25.6 から, $\boldsymbol{\psi}\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t)\cos\theta \\ p(t)\sin\theta \\ q(t) \end{pmatrix}$ で定義される写像 $\boldsymbol{\psi}: [a,b] \times [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ によって S はパラメータ表示される. このとき,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} p(t)\cos\theta = p'(t)\cos\theta, \quad && \frac{\partial}{\partial t} p(t)\sin\theta = p'(t)\sin\theta, \quad && \frac{\partial}{\partial t} q(t) = q'(t), \\ &\frac{\partial}{\partial \theta} p(t)\cos\theta = -p(t)\sin\theta, \quad && \frac{\partial}{\partial \theta} p(t)\sin\theta = p(t)\cos\theta, \quad && \frac{\partial}{\partial \theta} q(t) = 0 \end{aligned}$$

だから,

$$\boldsymbol{\psi}_x\left(\begin{smallmatrix} t \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \times \boldsymbol{\psi}_y\left(\begin{smallmatrix} t \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} p'(t)\cos\theta \\ p'(t)\sin\theta \\ q'(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -p(t)\sin\theta \\ p(t)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p(t)q'(t)\cos\theta \\ -p(t)q'(t)\sin\theta \\ p(t)p'(t) \end{pmatrix}$$

である. 従って $\left\|\boldsymbol{\psi}_x\left(\begin{smallmatrix} t \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \times \boldsymbol{\psi}_y\left(\begin{smallmatrix} t \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\right\| = |p(t)|\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}$ となるため, S の面積は

$$\begin{aligned} \iint_D \left\|\boldsymbol{\psi}_x\left(\begin{smallmatrix} t \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \times \boldsymbol{\psi}_y\left(\begin{smallmatrix} t \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\right\| dtd\theta &= \iint_D |p(t)|\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}\, dtd\theta = \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} |p(t)|\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}\, d\theta\right) dt \\ &= 2\pi \int_a^b |p(t)|\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}\, dt \end{aligned}$$

で与えられる. □

定義 25.8 X を $\boldsymbol{R}^2$ の開集合とし, $\rho : X \to [0,\infty)$ を連続関数とする. C を C^1 級写像 $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to X$ によってパラメータ表示される曲線とし, $t \in [a,b]$ に対して $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の第 i 成分 $(i = 1,2)$ を $\varphi_i(t)$ で表す. 実数 $m(S)$, $g_i(S)$ $(i = 1,2)$ を

$$m(S) = \int_a^b \rho(\boldsymbol{\varphi}(t))\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|\,dt, \qquad g_i(S) = \int_a^b \varphi_i(t)\rho(\boldsymbol{\varphi}(t))\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|\,dt$$

で定める. このとき $\dfrac{g_i(S)}{m(S)}$ を第 i 成分とする $\boldsymbol{R}^2$ の点を, ρ を密度関数とする S の重心という.

系 25.3 と類似の次の結果が成り立つ.

系 25.9 $\boldsymbol{R}^3$ において, xz 平面上の $x \geqq 0$ の部分に含まれる曲線 C を z 軸のまわりに回転させて得られる曲面を S とすれば, S の面積は, つねに値が 1 である定数値関数を密度関数とする C の重心が z 軸の回りに 1 周する間に動いた距離と, C の長さの積に等しい.

証明 xz 平面上の曲線 C が $x \geqq 0$ の部分に含まれ, 命題 25.6 のようにパラメータ表示されるとき,

$$m(S) = \int_a^b \sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}\,dt, \quad g_1(S) = \int_a^b p(t)\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}\,dt$$

だから $m(S)$ は C の長さであり, D の重心は z 軸の回りに半径 $\dfrac{g_1(S)}{m(S)}$ の円周上を 1 周するため, その移動距離は $\dfrac{2\pi g_1(S)}{m(S)} = \dfrac{2\pi}{m(S)}\displaystyle\int_a^b p(t)\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}\,dt$ である. 従って, 命題 25.7 から結果が得られる. □

定義 25.10 D を $\boldsymbol{R}^2$ の領域, X を $\boldsymbol{R}^3$ の開集合とし, $\rho : X \to [0,\infty)$ を連続関数とする. S を C^1 級写像 $\boldsymbol{\psi} : D \to X$ によってパラメータ表示される曲面とし, $\boldsymbol{p} \in D$ に対して $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{p})$ の第 i 成分 $(i = 1,2,3)$ を $\psi_i(\boldsymbol{p})$ で表し, $\boldsymbol{\psi}'(\boldsymbol{p})$ の第 1 列, 第 2 列をそれぞれ $\boldsymbol{\psi}_x(\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{\psi}_y(\boldsymbol{p})$ によって表す. 実数 $m(S)$, $g_i(S)$ $(i = 1,2,3)$ を

$$m(S) = \iint_D \rho(\boldsymbol{\psi}(\tbinom{s}{t}))\left\|\boldsymbol{\psi}_x(\tbinom{s}{t}) \times \boldsymbol{\psi}_y(\tbinom{s}{t})\right\| dsdt, \qquad g_i(S) = \iint_D \psi_i(\tbinom{s}{t})\,\rho(\boldsymbol{\psi}(\tbinom{s}{t}))\left\|\boldsymbol{\psi}_x(\tbinom{s}{t}) \times \boldsymbol{\psi}_y(\tbinom{s}{t})\right\| dsdt$$

で定める. このとき $\dfrac{g_i(S)}{m(S)}$ を第 i 成分とする $\boldsymbol{R}^3$ の点を, ρ を密度関数とする S の重心という.

xz 平面上の曲線 C が $x \geqq 0$ の部分に含まれ, 命題 25.6 のようにパラメータ表示されるとき, C を z 軸のまわりに回転させて得られる曲面を S とすれば, $t \in [a,b]$ に対して $p(t) \geqq 0$ だから, 命題 25.6 と, 命題 25.7 の証明から $\left\|\boldsymbol{\psi}_x(\tbinom{t}{\theta}) \times \boldsymbol{\psi}_y(\tbinom{t}{\theta})\right\| = p(t)\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}$ である. 従って, この場合は

$$\begin{aligned}
m(S) &= \iint_D \rho(\boldsymbol{\psi}(\tbinom{t}{\theta}))\left\|\boldsymbol{\psi}_x(\tbinom{t}{\theta}) \times \boldsymbol{\psi}_y(\tbinom{t}{\theta})\right\| dtd\theta = \iint_D \rho\begin{pmatrix} p(t)\cos\theta \\ p(t)\sin\theta \\ q(t) \end{pmatrix} p(t)\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}\,dtd\theta \\
g_1(S) &= \iint_D \psi_1(\tbinom{t}{\theta})\,\rho(\boldsymbol{\psi}(\tbinom{t}{\theta}))\left\|\boldsymbol{\psi}_x(\tbinom{t}{\theta}) \times \boldsymbol{\psi}_y(\tbinom{t}{\theta})\right\| dtd\theta = \iint_D \cos\theta\,\rho\begin{pmatrix} p(t)\cos\theta \\ p(t)\sin\theta \\ q(t) \end{pmatrix} p(t)^2\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}\,dtd\theta \\
g_2(S) &= \iint_D \psi_2(\tbinom{t}{\theta})\,\rho(\boldsymbol{\psi}(\tbinom{t}{\theta}))\left\|\boldsymbol{\psi}_x(\tbinom{t}{\theta}) \times \boldsymbol{\psi}_y(\tbinom{t}{\theta})\right\| dtd\theta = \iint_D \sin\theta\,\rho\begin{pmatrix} p(t)\cos\theta \\ p(t)\sin\theta \\ q(t) \end{pmatrix} p(t)^2\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}\,dtd\theta \\
g_3(S) &= \iint_D \psi_3(\tbinom{t}{\theta})\,\rho(\boldsymbol{\psi}(\tbinom{t}{\theta}))\left\|\boldsymbol{\psi}_x(\tbinom{t}{\theta}) \times \boldsymbol{\psi}_y(\tbinom{t}{\theta})\right\| dtd\theta = \iint_D \rho\begin{pmatrix} p(t)\cos\theta \\ p(t)\sin\theta \\ q(t) \end{pmatrix} q(t)p(t)\sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2}\,dtd\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ. とくに, $t \in [a,b]$ を固定したとき, $\theta \in [0,2\pi]$ を $\rho\begin{pmatrix} p(t)\cos\theta \\ p(t)\sin\theta \\ q(t) \end{pmatrix}$ に対応させる関数が定数値関数ならば,

$$
\begin{aligned}
m(S) &= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} \rho\begin{pmatrix} p(t) \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix} p(t)\sqrt{p'(t)^2+q'(t)^2}\,d\theta \right) dt = 2\pi \int_a^b \rho\begin{pmatrix} p(t) \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix} p(t)\sqrt{p'(t)^2+q'(t)^2}\,dt \\
g_1(S) &= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\rho\begin{pmatrix} p(t) \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix} p(t)^2\sqrt{p'(t)^2+q'(t)^2}\,d\theta \right) dt = 0 \\
g_2(S) &= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\rho\begin{pmatrix} p(t) \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix} p(t)^2\sqrt{p'(t)^2+q'(t)^2}\,d\theta \right) dt = 0 \\
g_3(S) &= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} \rho\begin{pmatrix} p(t) \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix} q(t)p(t)\sqrt{p'(t)^2+q'(t)^2}\,d\theta \right) dt = 2\pi \int_a^b \rho\begin{pmatrix} p(t) \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix} q(t)p(t)\sqrt{p'(t)^2+q'(t)^2}\,dt
\end{aligned}
$$

となり, S の重心は z 軸上にあることがわかる.

26 縮閉線と伸開線

26.1 曲率中心

φ, ψ を区間 I で定義された 2 回連続微分可能な関数とし, $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ でパラメータ表示される曲線を C とする. C 上の点 $(\varphi(t), \psi(t))$ における C の法線を ℓ_t で表す.

命題 26.1 *(1) I に属する相異なる s, t に対し, ℓ_s と ℓ_t が一点で交わるとき, その交点の座標は*

$$
\left(\varphi(t) + \frac{\varphi'(s)(\varphi(s)-\varphi(t)) + \psi'(s)(\psi(s)-\psi(t))}{\varphi'(s)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi'(s)}\psi'(t),\ \psi(t) - \frac{\varphi'(s)(\varphi(s)-\varphi(t)) + \psi'(s)(\psi(s)-\psi(t))}{\varphi'(s)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi'(s)}\varphi'(t) \right)
$$

で与えられる.

(2) t を固定して s を t に近づけるとき, ℓ_s と ℓ_t の交点は以下の座標の点に近づく.

$$
\left(\varphi(t) - \frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)},\ \psi(t) + \frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)} \right)
$$

証明 (1) $(\varphi(t), \psi(t))$ における C の接線の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix}$ であり, $\begin{pmatrix} \psi'(t) \\ -\varphi'(t) \end{pmatrix}$ はこのベクトルに垂直なベクトルだから, ℓ_t は u をパラメータとして, $\begin{cases} x = \varphi(t) + u\psi'(t) \\ y = \psi(t) - u\varphi'(t) \end{cases}$ とパラメータ表示される. ℓ_s と ℓ_t の交点を求めるために, u, v に関する連立 1 次方程式 $\begin{cases} \varphi(t) + u\psi'(t) = \varphi(s) + v\psi'(s) & \cdots(i) \\ \psi(t) - u\varphi'(t) = \psi(s) - v\varphi'(s) & \cdots(ii) \end{cases}$ を考える. (i) の両辺に $\varphi'(s)$ をかけた式と, (ii) の両辺に $\psi'(s)$ をかけた式を辺々加えて v を消去し, u について解けば,

$$
u = \frac{\varphi'(s)(\varphi(s)-\varphi(t)) + \psi'(s)(\psi(s)-\psi(t))}{\varphi'(s)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi'(s)}
$$

が得られる. この u に対して ℓ_s と ℓ_t の交点の座標は $(\varphi(t)+u\psi'(t), \psi(t)-u\varphi'(t))$ だから, 主張が成り立つ.

(2) 微分の定義から以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to t} \frac{\varphi'(s)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi'(s)}{s-t} &= \lim_{s\to t} \frac{\psi'(t)(\varphi'(s)-\varphi'(t)) - \varphi'(t)(\psi'(s)-\psi'(t))}{s-t} \\
&= \varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t) \\
\lim_{s\to t} \frac{\varphi'(s)(\varphi(s)-\varphi(t)) + \psi'(s)(\psi(s)-\psi(t))}{s-t} &= \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2
\end{aligned}
$$

従って (1) の結果から, t を固定して s を t に近づけるとき, ℓ_s と ℓ_t の交点が近づく点の座標は上記のように与えられる. □

注意 26.2 *(1)* とくに $\varphi(t)=t$, $\psi(t)=f(t)$ の場合は, 上の命題の *(2)* の座標は次のようになる.

$$\left(t-\frac{f'(t)(1+f'(t)^2)}{f''(t)},\ f(t)+\frac{1+f'(t)^2}{f''(t)}\right)$$

(2) また, 区間 I で定義された *2* 回微分可能な関数 r を用いて $\varphi(t)=r(t)\cos t$, $\psi(t)=r(t)\sin t$ と表されている場合は, 上の命題の *(2)* の座標は次のようになる.

$$\left(\frac{r(t)\cos t(r'(t)^2-r(t)r''(t))-r'(t)\sin t(r'(t)^2+r(t)^2)}{r(t)^2-r(t)r''(t)+2r'(t)^2},\frac{r(t)\sin t(r'(t)^2-r(t)r''(t))+r'(t)\cos t(r'(t)^2+r(t)^2)}{r(t)^2-r(t)r''(t)+2r'(t)^2}\right)$$

定義 26.3 命題 *26.1* の *(2)* の座標で与えられる点を, 曲線 C の点 $(\varphi(t),\psi(t))$ における曲率中心といい, $(\varphi(t),\psi(t))$ と $(\varphi(t),\psi(t))$ における曲率中心の距離 $\dfrac{(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}$ を, 点 $(\varphi(t),\psi(t))$ における C の曲率半径という. また t が区間 I を動いたときの, 曲線 C の点 $(\varphi(t),\psi(t))$ における曲率中心の軌跡を C の縮閉線という.

0 でない実数 a に対し, 曲線 C の点 $(\varphi(t),\psi(t))$ における法線 ℓ_t 上の点 $(\varphi(t)-a\psi'(t),\ \psi(t)+a\varphi'(t))$ を中心として, $(\varphi(t),\psi(t))$ を通る円を $C(a)$ とする. $(\varphi(t)-a\psi'(t),\ \psi(t)+a\varphi'(t))$ を始点として C の点 $(\varphi(s),\psi(s))$ を通る半直線と $C(a)$ との交点を $\mathrm{P}(s,t;a)$ とすれば $\mathrm{P}(s,t;a)$ の座標は $((1-k)(\varphi(t)-a\psi'(t))+k\varphi(s),\ (1-k)(\psi(t)+a\varphi'(t))+k\psi(s))$ $(k\geqq 0)$ とおける. $\mathrm{P}(s,t;a)$ と $C(a)$ の中心との距離が $|a|\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}$ であることから, k は以下で与えられる.

$$k=\frac{|a|\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}{\sqrt{(\varphi(s)-\varphi(t)+a\psi'(t))^2+(\psi(s)-\psi(t)-a\varphi'(t))^2}}$$

命題 26.4 $\mathrm{P}(s,t;a)$ と $(\varphi(s),\psi(s))$ の距離を $\delta(s,t;a)$ とすれば

$$\lim_{s\to t}\frac{\delta(s,t;a)}{(s-t)^2}=\frac{\left|\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2-a(\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t))\right|}{2|a|\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}$$

が成り立つ. 従って $\displaystyle\lim_{s\to t}\frac{\delta(s,t;a)}{(s-t)^2}=0$ であるためには, $a=\dfrac{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}$, すなわち $C(a)$ の中心が曲率中心であることが必要十分である. さらに, φ, ψ が *3* 回連続微分可能であり, $a=\dfrac{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}$ の場合は次の等式が成り立つ.

$$\lim_{s\to t}\frac{\delta(s,t;a)}{(s-t)^3}=\left|\frac{(\varphi''(t)\varphi'(t)+\psi'(t)\psi''(t))(\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t))}{2(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\varphi'(t)\psi'''(t)-\varphi'''(t)\psi'(t)}{6\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}\right|$$

証明 $\delta(s,t;a)$ は

$$\delta(s,t;a)=\left|\sqrt{(\varphi(s)-\varphi(t)+a\psi'(t))^2+(\psi(s)-\psi(t)-a\varphi'(t))^2}-|a|\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\right|$$

で与えられる. ロピタルの定理から

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to t}\frac{(\varphi(s)-\varphi(t)+a\psi'(t))^2+(\psi(s)-\psi(t)-a\varphi'(t))^2-a^2(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{(s-t)^2}\\
&=\lim_{s\to t}\frac{(\varphi(s)-\varphi(t))^2+2a\psi'(t)(\varphi(s)-\varphi(t))+(\psi(s)-\psi(t))^2-2a\varphi'(t)(\psi(s)-\psi(t))}{(s-t)^2}\\
&=\lim_{s\to t}\frac{\varphi'(s)(\varphi(s)-\varphi(t))+a\varphi'(s)\psi'(t)+\psi'(s)(\psi(s)-\psi(t))-a\varphi'(t)\psi'(s)}{s-t}\\
&=\lim_{s\to t}\left(\varphi'(s)\frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t}+\psi'(s)\frac{\psi(s)-\psi(t)}{s-t}+a\psi'(t)\frac{\varphi'(s)-\varphi'(t)}{s-t}-a\varphi'(t)\frac{\psi'(s)-\psi'(t)}{s-t}\right)\\
&=\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2-a(\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t))
\end{aligned}$$

だから

$$\lim_{s\to t}\frac{\delta(s,t;a)}{(s-t)^2}=\lim_{s\to t}\frac{\left|(\varphi(s)-\varphi(t)+a\psi'(t))^2+(\psi(s)-\psi(t)-a\varphi'(t))^2-a^2(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)\right|}{(s-t)^2\left(\sqrt{(\varphi(s)-\varphi(t)+a\psi'(t))^2+(\psi(s)-\psi(t)-a\varphi'(t))^2}+|a|\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\right)}$$
$$=\frac{\left|\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2-a(\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t))\right|}{2|a|\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}$$

が得られる. $a=\dfrac{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}$ の場合, ロピタルの定理から

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to t}\frac{(\varphi(s)-\varphi(t)+a\psi'(t))^2+(\psi(s)-\psi(t)-a\varphi'(t))^2-a^2(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{(s-t)^3}\\
&=\lim_{s\to t}\frac{2(\varphi'(s)(\varphi(s)-\varphi(t))+a\varphi'(s)\psi'(t)+\psi'(s)(\psi(s)-\psi(t))-a\varphi'(t)\psi'(s))}{3(s-t)^2}\\
&=\lim_{s\to t}\frac{\varphi'(s)^2+\varphi''(s)(\varphi(s)-\varphi(t))+a\varphi''(s)\psi'(t)+\psi'(s)^2+\psi''(s)(\psi(s)-\psi(t))-a\varphi'(t)\psi''(s)}{3(s-t)}\\
&=\lim_{s\to t}\frac{\varphi''(s)(\varphi(s)-\varphi(t))+\psi''(s)(\psi(s)-\psi(t))+\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2-a(\varphi'(t)\psi''(s)-\varphi''(s)\psi'(t))}{3(s-t)}\\
&=\lim_{s\to t}\frac{\varphi'''(s)(\varphi(s)-\varphi(t))+\psi'''(s)(\psi(s)-\psi(t))+3\varphi''(s)\varphi'(s)+3\psi''(s)\psi'(s)-a(\varphi'(t)\psi'''(s)-\varphi'''(s)\psi'(t))}{3}\\
&=\varphi''(t)\varphi'(t)+\psi'(t)\psi''(t)-\frac{(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)(\varphi'(t)\psi'''(t)-\varphi'''(t)\psi'(t))}{3(\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t))}
\end{aligned}$$

だから

$$\lim_{s\to t}\frac{\delta(s,t;a)}{(s-t)^3}=\lim_{s\to t}\frac{\left|(\varphi(s)-\varphi(t)+a\psi'(t))^2+(\psi(s)-\psi(t)-a\varphi'(t))^2-a^2(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)\right|}{(s-t)^3\left(\sqrt{(\varphi(s)-\varphi(t)+a\psi'(t))^2+(\psi(s)-\psi(t)-a\varphi'(t))^2}+|a|\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\right)}$$
$$=\left|\frac{(\varphi''(t)\varphi'(t)+\psi'(t)\psi''(t))(\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t))}{2(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\varphi'(t)\psi'''(t)-\varphi'''(t)\psi'(t)}{6\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}\right|$$

が得られる. □

26.2 伸開線

定義 26.5 φ,ψ を区間 I で定義された連続微分可能な関数で, $c\in I$ に対し, $\varphi'(t)=\psi'(t)=0$ を満たす $t\in I-\{c\}$ は存在しないとする. $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ でパラメータ表示される曲線を C とする. $L>0$ に対し, $I\cap[c,\infty)$ を定義域とする関数 $\bar{\varphi}_+,\ \bar{\psi}_+$ と $I\cap(-\infty,c]$ を定義域とする関数 $\bar{\varphi}_-,\ \bar{\psi}_-$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_+(t)&=\varphi(t)+\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}\left(L-\int_c^t\sqrt{\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2}\,ds\right)\\
\bar{\psi}_+(t)&=\psi(t)+\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}\left(L-\int_c^t\sqrt{\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2}\,ds\right)\\
\bar{\varphi}_-(t)&=\varphi(t)+\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}\left(\int_t^c\sqrt{\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2}\,ds-L\right)\\
\bar{\psi}_-(t)&=\psi(t)+\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}\left(\int_t^c\sqrt{\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2}\,ds-L\right)
\end{aligned}$$

このとき, $\begin{cases}x=\bar{\varphi}_+(t)\\ y=\bar{\psi}_+(t)\end{cases}$ および $\begin{cases}x=\bar{\varphi}_-(t)\\ y=\bar{\psi}_-(t)\end{cases}$ でパラメータ表示される曲線を C の伸開線という.

注意 26.6 $t \in I$ が $t > c$ かつ $\displaystyle\int_c^t \sqrt{\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2}\,ds \leqq L$ を満たすとき, 長さが L の糸の一方の端点を C 上の点 $\mathrm{P}_0(\varphi(c),\psi(c))$ に固定して, 糸の一部を曲線 C に貼り付け, 糸が C 上の点 $\mathrm{P}(\varphi(t),\psi(t))$ で C から離れて, C の P における接線の P_0 と反対側の部分に重なったときの, 糸のもう一方の端点の座標が $(\bar{\varphi}_+(t),\bar{\psi}_+(t))$ である. また, $t \in I$ が $t < c$ かつ $\displaystyle\int_t^c \sqrt{\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2}\,ds \leqq L$ を満たすとき, 長さが L の糸の一方の端点を点 $\mathrm{P}_0(\varphi(c),\psi(c))$ に固定して, 糸の一部を曲線 C に貼り付け, 糸が点 $\mathrm{P}(\varphi(t),\psi(t))$ で C から離れて, C の P における接線の P_0 と反対側の部分に重なったときの, 糸のもう一方の端点の座標が $(\bar{\varphi}_-(t),\bar{\psi}_-(t))$ である.

φ, ψ を区間 I で定義された 3 回連続微分可能な関数とし, $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ でパラメータ表示される曲線を C とする. $\kappa(t) = \varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)$, $v(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}$ とおき, 各 $t \in I$ に対し, $\kappa(t) \neq 0$ と仮定する.

このとき, 中間値の定理によって $\kappa(t)$ の符号は区間 I で変わらないが, κ が I においてつねに負の値をとるときは, $\bar{I} = \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, -x \in I\}$ おき, $\bar{\varphi}(t) = \varphi(-t)$, $\bar{\psi}(t) = \psi(-t)$ で定義される関数 $\bar{\varphi}, \bar{\psi} : \bar{I} \to \boldsymbol{R}$ を考える. このとき, 各 $t \in \bar{I}$ に対して $\bar{\varphi}'(t)\bar{\psi}''(t) - \bar{\varphi}''(t)\bar{\psi}'(t) = (-\varphi'(-t))((-1)^2\psi''(-t)) - ((-1)^2\varphi''(-t))(-\psi'(-t)) = -\kappa(-t) > 0$ だから, I, φ, ψ をそれぞれ $\bar{I}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}$ で置き換えることによって κ は I においてつねに正の値をとると仮定してよい.

$$F(t) = \varphi(t) - \frac{\psi'(t)v(t)^2}{\kappa(t)}, \qquad G(t) = \psi(t) + \frac{\varphi'(t)v(t)^2}{\kappa(t)}$$

によって I 上の関数 F, G を定義して, $\begin{cases} x = F(t) \\ y = G(t) \end{cases}$ でパラメータ表示される曲線は C の縮閉線であるが, この曲線を $\bar{C}$ とする. C 上の点 $\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ における C の法線を ℓ_t とすれば, $\begin{pmatrix} -\psi'(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$ は ℓ_t の方向ベクトルであり, $\begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} + \dfrac{v(t)^2}{\kappa(t)}\begin{pmatrix} -\psi'(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ は, ℓ_t 上の点である.

ここで, 等式 $\kappa'(t) = \varphi'(t)\psi'''(t) - \varphi'''(t)\psi'(t)$ と $v'(t)v(t) = \dfrac{1}{2}(v(t)^2)' = \varphi''(t)\varphi'(t) + \psi''(t)\psi'(t)$ が成り立つことに注意すれば

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -\frac{3\psi'(t)v'(t)v(t)}{\kappa(t)} + \frac{\psi'(t)v(t)^2\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} = -\frac{\psi'(t)v(t)}{\kappa(t)^2}(3v'(t)\kappa(t) - v(t)\kappa'(t)) \\
G'(t) &= \frac{3\varphi'(t)v'(t)v(t)}{\kappa(t)} - \frac{\varphi'(t)v(t)^2\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} = \frac{\varphi'(t)v(t)}{\kappa(t)^2}(3v'(t)\kappa(t) - v(t)\kappa'(t)) \\
\sqrt{F'(t)^2+G'(t)^2} &= \sqrt{\frac{v(t)^4}{\kappa(t)^4}(3\kappa(t)v'(t) - v(t)\kappa'(t))^2} = \frac{\left|3v'(t)v(t)^2\kappa(t) - v(t)^3\kappa'(t)\right|}{\kappa(t)^2} = \left|\left(\frac{v(t)^3}{\kappa(t)}\right)'\right|
\end{aligned}$$

が得られる. 従って, $\bar{C}$ 上の点 $\begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ における $\bar{C}$ の接線の方向ベクトルは ℓ_t の方向ベクトルと一致して, $\begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ は ℓ_t 上の点だから, ℓ_t は $\begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ における $\bar{C}$ の接線でもある. ℓ_t のパラメータ表示 $\boldsymbol{x}_t(s) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\psi'(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$ を考える. $\boldsymbol{x}_t\left(\frac{v(t)^2}{\kappa(t)}\right) = \begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ から $\boldsymbol{x}_t(s)$ までの距離は $v(t)\left|s - \dfrac{v(t)^2}{\kappa(t)}\right|$ で, とくに $\begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ までの距離は $\dfrac{v(t)^3}{\kappa(t)}$ である.

以後 $t \in I$ を $\dfrac{v(t)^3}{\kappa(t)}$ に対応させる関数を ρ で表し, ρ は単調であると仮定する. この仮定のもとで, $t_1, t_2 \in I$ に対し, t が t_1 から t_2 まで動いたときの $\bar{C}$ の弧の長さは, 以下で与えられる.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{F'(t)^2+G'(t)^2}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left|\left(\frac{v(t)^3}{\kappa(t)}\right)'\right| dt = \left|\frac{v(t_2)^3}{\kappa(t_2)} - \frac{v(t_1)^3}{\kappa(t_1)}\right|$$

$c \in I$ に対し, 長さが L の糸の一方の端点を点 $\begin{pmatrix} F(c) \\ G(c) \end{pmatrix}$ に固定して, 糸の一部を曲線 $\bar{C}$ に貼り付け, 糸が点 $\begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ で $\bar{C}$ から離れて, ℓ_t に重なるとする. この状態での糸のもう一方の端点の位置ベクトルを $\boldsymbol{v}(t)$ とおけば, $\boldsymbol{v}(t)$ は ℓ_t 上にあるため, 実数 $s(t)$ で $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{x}_t(s(t))$ を満たすものがある. $\bar{C}$ の点 $\begin{pmatrix} F(c) \\ G(c) \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ までの $\bar{C}$ の弧の長さ $\left| \dfrac{v(t)^3}{\kappa(t)} - \dfrac{v(c)^3}{\kappa(c)} \right|$ と, $\boldsymbol{v}(t)$ と $\begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ の距離 $v(t)\left| s(t) - \dfrac{v(t)^2}{\kappa(t)} \right|$ との和が L に等しいため, 次の等式が成り立つ.

$$v(t)\left| s(t) - \frac{v(t)^2}{\kappa(t)} \right| = L - \left| \frac{v(t)^3}{\kappa(t)} - \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} \right| \quad \cdots (*)$$

$\boldsymbol{v}(t)$ が ℓ_t と $\bar{C}$ との接点 $\boldsymbol{x}_t\Bigl(\frac{v(t)^2}{\kappa(t)}\Bigr) = \begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ に関して $\boldsymbol{x}_t(0) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ と同じ側にある場合は $s(t) \leqq \dfrac{v(t)^2}{\kappa(t)}$ だから, $(*)$ より

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{v(t)}\Bigl(\frac{v(c)^3}{\kappa(c)} - L\Bigr) & \frac{v(t)^3}{\kappa(t)} \leqq \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} \\ \frac{1}{v(t)}\Bigl(\frac{2v(t)^3}{\kappa(t)} - \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} - L\Bigr) & \frac{v(t)^3}{\kappa(t)} \geqq \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} \end{cases}$$

が得られる. 従って「$t \leqq c$ かつ ρ が単調増加関数」または「$t \geqq c$ かつ ρ が単調減少関数」ならば $\bar{C}$ の伸開線は $\begin{cases} x = \varphi(t) - \psi'(t)\Bigl(\frac{v(c)^3}{\kappa(c)} - L\Bigr) \\ y = \psi(t) + \varphi'(t)\Bigl(\frac{v(c)^3}{\kappa(c)} - L\Bigr) \end{cases}$ でパラメータ表示され, 「$t \leqq c$ かつ ρ が単調減少関数」または「$t \geqq c$ かつ ρ が単調増加関数」ならば $\bar{C}$ の伸開線は $\begin{cases} x = \varphi(t) - \psi'(t)\Bigl(\frac{2v(t)^3}{\kappa(t)} - \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} - L\Bigr) \\ y = \psi(t) + \varphi'(t)\Bigl(\frac{2v(t)^3}{\kappa(t)} - \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} - L\Bigr) \end{cases}$ でパラメータ表示される.

$\boldsymbol{v}(t)$ が ℓ_t と $\bar{C}$ との接点 $\boldsymbol{x}_t\Bigl(\frac{v(t)^2}{\kappa(t)}\Bigr) = \begin{pmatrix} F(t) \\ G(t) \end{pmatrix}$ に関して $\boldsymbol{x}_t(0) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ と反対側にある場合は $s(t) \geqq \dfrac{v(t)^2}{\kappa(t)}$ だから, $(*)$ より

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{v(t)}\Bigl(L - \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} + \frac{2v(t)^3}{\kappa(t)}\Bigr) & \frac{v(t)^3}{\kappa(t)} \leqq \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} \\ \frac{1}{v(t)}\Bigl(L - \frac{v(c)^3}{\kappa(c)}\Bigr) & \frac{v(t)^3}{\kappa(t)} \geqq \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} \end{cases}$$

が得られる. 従って「$t \leqq c$ かつ ρ が単調増加関数」または「$t \geqq c$ かつ ρ が単調減少関数」ならば $\bar{C}$ の伸開線は $\begin{cases} x = \varphi(t) - \psi'(t)\Bigl(L - \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} + \frac{2v(t)^3}{\kappa(t)}\Bigr) \\ y = \psi(t) + \varphi'(t)\Bigl(L - \frac{v(c)^3}{\kappa(c)} + \frac{2v(t)^3}{\kappa(t)}\Bigr) \end{cases}$ でパラメータ表示され, 「$t \leqq c$ かつ ρ が単調減少関数」または「$t \geqq c$ かつ ρ が単調増加関数」ならば $\bar{C}$ の伸開線は $\begin{cases} x = \varphi(t) - \psi'(t)\Bigl(L - \frac{v(c)^3}{\kappa(c)}\Bigr) \\ y = \psi(t) + \varphi'(t)\Bigl(L - \frac{v(c)^3}{\kappa(c)}\Bigr) \end{cases}$ でパラメータ表示される.

26.3 伸開線の例

例 26.7 中心が原点で, 半径が a の円は $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ でパラメータ表示されるため, 定義 *26.5* において $\varphi(t) = a\cos t$, $\psi(t) = a\sin t$, $c = -2\pi n$, $L = 2\pi a n$ *(*n は正の整数*)* とすれば, $\bar{\varphi}_+(t) = a(\cos t + t\sin t)$, $\bar{\psi}_+(t) = a(\sin t - t\cos t)$ だから, この円の伸開線は $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ によってパラメータ表示される.

例 26.8 懸垂線 $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ は $\begin{cases}x=t\\ y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{t}{a}}+e^{-\frac{t}{a}}\right)\end{cases}$ でパラメータ表示されるため, 定義 *26.5* において $\varphi(t)=t$, $\psi(t)=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $c>0$, $L=\displaystyle\int_0^c\sqrt{\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2}\,ds$ とすれば,

$$\int_t^c\sqrt{\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2}\,ds-L=-\int_0^t\frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{a}}+e^{-\frac{t}{a}}\right)\,ds=-\left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{a}}\right)\right]_0^t=-\frac{a}{2}\left(e^{\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{a}}\right)$$

より, $\bar{\varphi}_-(t)=t-\dfrac{a\left(e^{\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{a}}\right)}{e^{\frac{t}{a}}+e^{-\frac{t}{a}}}$, $\bar{\psi}_-(t)=\dfrac{2a}{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}$ である. $u=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{a}}\right)$ とおけば, $t=a\log\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$, $\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{a}}+e^{-\frac{t}{a}}\right)=\sqrt{u^2+1}$ であり, さらに $u=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおけば $\sqrt{u^2+1}=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $u+\sqrt{u^2+1}=\dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta}=\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{2-\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}+1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より

$$x=a\log\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)-\frac{au}{\sqrt{u^2+1}}=a\log\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-a\sin\theta,\quad y=\frac{a}{\sqrt{u^2+1}}=a\cos\theta$$

だから, この懸垂線の伸開線は $\begin{cases}x=a\log\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-a\sin\theta\\ y=a\cos\theta\end{cases}$ によってパラメータ表示される.

例 26.9 $p,\ q$ を正の実数とし, 方程式 $\left(\dfrac{x}{p}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{q}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ で定義される曲線の y 座標が 0 以下の部分を C とする. C は $\begin{cases}x=p\cos^3 t\\ y=-q\sin^3 t\end{cases}$ *(*$0\leqq t\leqq\pi$*)* によってパラメータ表示されるため, 定義 *26.5* において $\varphi(t)=p\cos^3 t$, $\psi(t)=-q\sin^3 t$, $c=\dfrac{\pi}{2}$ とすれば, $\varphi'(t)=-3p\sin t\cos^2 t$, $\psi'(t)=-3q\cos t\sin^2 t$ より

$$\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}=3|\cos t\sin t|\sqrt{p^2\cos^2 t+q^2\sin^2 t}=\frac{3}{2\sqrt{2}}|\sin 2t|\sqrt{p^2+q^2+(p^2-q^2)\cos 2s}$$

だから $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ の場合は

$$\begin{aligned}\int_t^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2}\,ds&=\frac{3}{2\sqrt{2}}\int_t^{\frac{\pi}{2}}\sin 2s\sqrt{p^2+q^2+(p^2-q^2)\cos 2s}\,ds=\frac{3}{4\sqrt{2}}\int_{-1}^{\cos 2t}\sqrt{p^2+q^2+(p^2-q^2)z}\,dz\\&=\cos^2 t\left(q+\frac{p^2\cos^2 t+q^2\sin^2 t}{q+\sqrt{p^2\cos^2 t+q^2\sin^2 t}}\right)\end{aligned}$$

であり, $t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ の場合は

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^t\sqrt{\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2}\,ds&=\frac{3}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^t(-\sin 2s)\sqrt{p^2+q^2+(p^2-q^2)\cos 2s}\,ds=\frac{3}{4\sqrt{2}}\int_{-1}^{\cos 2t}\sqrt{p^2+q^2+(p^2-q^2)z}\,dz\\&=\cos^2 t\left(q+\frac{p^2\cos^2 t+q^2\sin^2 t}{q+\sqrt{p^2\cos^2 t+q^2\sin^2 t}}\right)\end{aligned}$$

である. 従って, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ の場合は

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_-(t) &= p\cos^3 t - \frac{p\cos t}{\sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}}\left(\cos^2 t\left(q + \frac{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}{q + \sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}}\right) - L\right) \\
&= \frac{p\cos t(L - q\cos^2 t)}{\sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} + \frac{pq\cos^3 t}{q + \sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} \\
\bar{\psi}_-(t) &= -q\sin^3 t - \frac{q\sin t}{\sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}}\left(\cos^2 t\left(q + \frac{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}{q + \sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}}\right) - L\right) \\
&= \frac{q\sin t(L - q\cos^2 t)}{\sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} + \frac{q^2\cos^2 t\sin t}{q + \sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} - q\sin t
\end{aligned}$$

であり, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ の場合は

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_+(t) &= p\cos^3 t + \frac{p\cos t}{\sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}}\left(L - \cos^2 t\left(q + \frac{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}{q + \sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}}\right)\right) \\
&= \frac{p\cos t(L - q\cos^2 t)}{\sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} + \frac{pq\cos^3 t}{q + \sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} \\
\bar{\psi}_+(t) &= -q\sin^3 t + \frac{q\sin t}{\sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}}\left(L - \cos^2 t\left(q + \frac{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}{q + \sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}}\right)\right) \\
&= \frac{q\sin t(L - q\cos^2 t)}{\sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} + \frac{q^2\cos^2 t\sin t}{q + \sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} - q\sin t
\end{aligned}$$

である. $L \geqq \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}\,ds = \frac{p^2 + pq + q^2}{p + q}$ ならば $t_0 = 0$ とおき, $L < \dfrac{p^2 + pq + q^2}{p + q}$ ならば t_0 は $L = \displaystyle\int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}\,ds$ を満たす正の実数とする. 以上から, 曲線 C の伸開線は閉区間 $[t_0, \pi - t_0]$ を定義域として, 次のようにパラメータ表示される曲線である.

$$\begin{cases}
x = \dfrac{p\cos t(L - q\cos^2 t)}{\sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} + \dfrac{pq\cos^3 t}{q + \sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} \\
y = \dfrac{q\sin t(L - q\cos^2 t)}{\sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} + \dfrac{q^2\cos^2 t\sin t}{q + \sqrt{p^2\cos^2 t + q^2\sin^2 t}} - q\sin t
\end{cases}$$

$p < q$ の場合, $a = \dfrac{pq^2}{q^2 - p^2}$, $b = \dfrac{p^2 q}{q^2 - p^2}$ とおけば, $p = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$, $q = \dfrac{a^2 - b^2}{b}$ だから上記のパラメータ表示は

$$\begin{cases}
x = a\cos t + \dfrac{b\cos t\left(L - \frac{a^2}{b}\right)}{\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}} \\
y = b\sin t + \dfrac{a\sin t\left(L - \frac{a^2}{b}\right)}{\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}}
\end{cases}$$

となり, $L = \dfrac{a^2}{b}$ ならば楕円を表す. $p = q$ の場合, アステロイド $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}}$ の $y \leqq 0$ の部分の伸開線のパラメータ表示は $\begin{cases} x = L\cos t - \frac{p}{2}\cos^3 t \\ y = \left(L - \frac{3p}{2}\right)\sin t + \frac{p}{2}\sin^3 t \end{cases}$ で与えられる. とくに $L = \dfrac{3p}{4}$ で, t が区間 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ を動くとき, こ

の曲線を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる曲線は

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3p}{4}\cos t - \frac{p}{2}\cos^3 t \\ -\frac{3p}{4}\sin t + \frac{p}{2}\sin^3 t \end{pmatrix} &= \frac{p}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3\cos t - 2\cos^3 t + 3\sin t - 2\sin^3 t \\ 3\cos t - 2\cos^3 t - 3\sin t + 2\sin^3 t \end{pmatrix} \\
&= \frac{p}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3(\cos t + \sin t) - 2(\cos t + \sin t)(1 - \cos t \sin t) \\ 3(\cos t - \sin t) - 2(\cos t - \sin t)(1 + \cos t \sin t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{p}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos t + \sin t + (\cos t + \sin t)((\cos t + \sin t)^2 - 1) \\ \cos t - \sin t + (\cos t - \sin t)((\cos t - \sin t)^2 - 1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{p}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (\cos t + \sin t)^3 \\ (\cos t - \sin t)^3 \end{pmatrix} = \frac{p}{2}\begin{pmatrix} \cos^3\bigl(t - \frac{\pi}{4}\bigr) \\ -\sin^3\bigl(t - \frac{\pi}{4}\bigr) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より, $\begin{cases} x = \frac{p}{2}\cos^3\bigl(t - \frac{\pi}{4}\bigr) \\ y = -\frac{p}{2}\sin^3\bigl(t - \frac{\pi}{4}\bigr) \end{cases}$ によってパラメータ表示されるため, アステロイド $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{p}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ の第 4 象限の部分である.

26.4 輪転曲線の縮閉線

定義 26.10 一定の半径をもつ円 O が曲線 C に接しながら滑らないで転がるとき, O に対して固定された点 P の軌跡を, 円 O を転曲線, P を極とする輪転曲線という. このとき C をこの輪転曲線の底曲線という.

φ, ψ を区間 I で定義された連続微分可能な関数で, $\varphi'(t) = \psi'(t) = 0$ を満たす $t \in I$ は存在しないとする. $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ でパラメータ表示される曲線を C とする. 以下で $t \in I$ に対して, $v(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$ とおく.

0 でない実数 r に対し, O を半径 $|r|$ の円とし, O に対する定点 P と O の中心との距離を a とする. $t \in I$ に対し, O の中心は, C 点 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ における法線 ℓ_t 上の点 $\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) - \frac{r}{v(t)}\psi'(t) \\ \psi(t) + \frac{r}{v(t)}\varphi'(t) \end{pmatrix}$ にあるとする. このときの点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}(t)$ とすれば, $\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{c}(t)$ は $\dfrac{a}{r}(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{c}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{a}{v(t)}\psi'(t) \\ -\frac{a}{v(t)}\varphi'(t) \end{pmatrix}$ を回転させて得られるベクトルだから, t の関数 θ が存在して, $\boldsymbol{p}(t)$ は

$$
\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{c}(t) + \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & \sin\theta(t) \\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{v(t)}\psi'(t) \\ -\frac{a}{v(t)}\varphi'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) - \frac{a\sin\theta(t)}{v(t)}\varphi'(t) - \frac{r - a\cos\theta(t)}{v(t)}\psi'(t) \\ \psi(t) + \frac{r - a\cos\theta(t)}{v(t)}\varphi'(t) - \frac{a\sin\theta(t)}{v(t)}\psi'(t) \end{pmatrix}
$$

と表される. $t_0, t \in I$ $(t_0 \leqq t)$ に対し, O が C に接しながら C 上を転がり, O の中心が $\boldsymbol{c}(t_0)$ から $\boldsymbol{c}(t)$ まで移動するとき, O と C との接点は $\displaystyle\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds$ だけ C 上を移動するため, $\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{c}(t)$ は $\dfrac{a}{r}(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{c}(t))$ を $\displaystyle -\theta(t_0) - \frac{1}{r}\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds$ だけ回転させて得られるベクトルである. 従って $\theta_0 = \theta(t_0)$ とおけば θ は $\displaystyle\theta(t) = \theta_0 + \frac{1}{r}\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds$ で与えられる.

以上から, C を底曲線, 半径 $|r|$ の円 O を転曲線, O の中心からの距離が a の点を極とする輪転曲線を $R(C)$ で表せば, $R(C)$ のパラメータ表示 $\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ は以下で与えられる.

$$
\begin{cases}
x(t) = \varphi(t) - \dfrac{r\psi'(t)}{v(t)} + \dfrac{a\psi'(t)}{v(t)}\cos\left(\theta_0 + \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right) - \dfrac{a\varphi'(t)}{v(t)}\sin\left(\theta_0 + \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right) \\
y(t) = \psi(t) + \dfrac{r\varphi'(t)}{v(t)} - \dfrac{a\varphi'(t)}{v(t)}\cos\left(\theta_0 + \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right) - \dfrac{a\psi'(t)}{v(t)}\sin\left(\theta_0 + \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right)
\end{cases}
$$

例 26.11 底曲線 C が x 軸の場合, C は $\varphi(t)=t$, $\psi(t)=0$ によってパラメータ表示され, このとき $v(t)=1$ であり, $t_0=\theta_0=0$ とすれば, $\theta(t)=\dfrac{t}{r}$ となるため, x 軸を底曲線, 半径 $|r|$ の円 O を転曲線, O の中心からの距離が a の点を極とする輪転曲線は $\begin{cases} x=t-a\sin\dfrac{t}{r} \\ y=r-a\cos\dfrac{t}{r} \end{cases}$ でパラメータ表示される. パラメータ t を rt で置き換えれば, $\begin{cases} x=rt-a\sin t \\ y=r-a\cos t \end{cases}$ という別のパラメータ表示が得られる.

例 26.12 底曲線 C が原点を中心とする半径が R の円の場合, C は $\varphi(t)=R\cos\dfrac{t}{R}$, $\psi(t)=R\sin\dfrac{t}{R}$ によってパラメータ表示され, このとき $v(t)=1$ であり, $t_0=0$ とすれば, $\theta(t)=\theta_0+\dfrac{t}{r}$ となるため, 原点を中心とする半径が R の円を底曲線, 半径 $|r|$ の円 O を転曲線, O の中心からの距離が a の点を極とする輪転曲線は $\begin{cases} x(t)=(R-r)\cos\dfrac{t}{R}+a\cos\left(\theta_0+\dfrac{R-r}{rR}t\right) \\ y(t)=(R-r)\sin\dfrac{t}{R}-a\sin\left(\theta_0+\dfrac{R-r}{rR}t\right) \end{cases}$ でパラメータ表示される. パラメータ t を rt で置き換えれば, $\begin{cases} x(t)=(R-r)\cos t+a\cos\left(\theta_0+\dfrac{R-r}{r}t\right) \\ y(t)=(R-r)\sin t-a\sin\left(\theta_0+\dfrac{R-r}{r}t\right) \end{cases}$ という別のパラメータ表示が得られる. ここで, $r<0$ ならば転曲線である円 O は, 底曲線である円に外接しながら転がり, $0<r<R$ ならば O は底曲線に内接しながら転がる. また, $r>R$ の場合は, 底曲線が O に内接した状態で O が転がることに注意する. とくに $a=-r$, $r<0$, $\theta_0=\pi$ の場合, r を $-r$ で置き換えて得られる

$$\begin{cases} x(t)=(R+r)\cos t-r\cos\left(\dfrac{R+r}{r}t\right) \\ y(t)=(R+r)\sin t-r\sin\left(\dfrac{R+r}{r}t\right) \end{cases}$$

は, 半径が R の円に, 半径が r の円を外接させながら転がして得られる外サイクロイドのパラメータ表示であり, $R>a=r>0$, $\theta_0=0$ の場合,

$$\begin{cases} x(t)=(R-r)\cos t+r\cos\left(\dfrac{R-r}{r}t\right) \\ y(t)=(R-r)\sin t-r\sin\left(\dfrac{R-r}{r}t\right) \end{cases}$$

は, 半径が R の円に, 半径が r の円を内接させながら転がして得られる内サイクロイドのパラメータ表示である.

φ, ψ が 2 回連続微分可能であるとき, I を定義域とする関数 κ, ξ, ζ を

$$\kappa(t)=\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t),\quad \xi(t)=\varphi'(t)-\frac{r\psi''(t)}{v(t)}+\frac{r\psi'(t)v'(t)}{v(t)^2},\quad \zeta(t)=\psi'(t)+\frac{r\varphi''(t)}{v(t)}-\frac{r\varphi'(t)v'(t)}{v(t)^2}$$

で定めれば, 以下の等式が成り立つ.

$$\xi(t)^2+\zeta(t)^2=\frac{1}{v(t)^4}\left(v(t)^3-r\kappa(t)\right)^2,\quad \xi(t)\zeta'(t)-\xi'(t)\zeta(t)=\frac{\kappa(t)}{v(t)^6}\left(v(t)^3-r\kappa(t)\right)^2$$

$$\begin{aligned}
x'(t)&=\xi(t)-\frac{a}{r}\left(\xi(t)\cos\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^t v(s)\,ds\right)+\zeta(t)\sin\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^t v(s)\,ds\right)\right)\\
y'(t)&=\zeta(t)-\frac{a}{r}\left(\zeta(t)\cos\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^t v(s)\,ds\right)-\xi(t)\sin\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^t v(s)\,ds\right)\right)\\
x'(t)^2+y'(t)^2&=\left(\xi(t)^2+\zeta(t)^2\right)\left(1-\frac{2a}{r}\cos\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^t v(s)\,ds\right)+\frac{a^2}{r^2}\right)\\
&=\frac{1}{v(t)^4}\left(v(t)^3-r\kappa(t)\right)^2\left(1-\frac{2a}{r}\cos\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^t v(s)\,ds\right)+\frac{a^2}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

従って

$$x''(t)=\xi'(t)-\frac{a}{r}\left(\left(\xi'(t)+\frac{\zeta(t)v(t)}{r}\right)\cos\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^{t}v(s)\,ds\right)-\left(\frac{\xi(t)v(t)}{r}-\zeta'(t)\right)\sin\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^{t}v(s)\,ds\right)\right)$$
$$y''(t)=\zeta'(t)+\frac{a}{r}\left(\left(\frac{\xi(t)v(t)}{r}-\zeta'(t)\right)\cos\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^{t}v(s)\,ds\right)+\left(\xi'(t)+\frac{\zeta(t)v(t)}{r}\right)\sin\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^{t}v(s)\,ds\right)\right)$$

が得られ, さらに

$$x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)=\frac{\left(v(t)^3-r\kappa(t)\right)^2}{r^3v(t)^6}\left(r(a^2+r^2)\kappa(t)-a^2v(t)^3+ar\left(v(t)^3-2r\kappa(t)\right)\cos\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^{t}v(s)\,ds\right)\right)$$

$$\frac{x'(t)^2+y'(t)^2}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}=\frac{rv(t)^2\left(r^2-2ar\cos\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^{t}v(s)\,ds\right)+a^2\right)}{r\kappa(t)\left(r^2-2ar\cos\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^{t}v(s)\,ds\right)+a^2\right)-av(t)^3\left(a-r\cos\left(\theta_0+\frac{1}{r}\int_{t_0}^{t}v(s)\,ds\right)\right)}$$

が得られる. 以上から, $R(C)$ の縮閉線のパラメータ表示 $\boldsymbol{q}(t)=\begin{pmatrix}z(t)\\w(t)\end{pmatrix}$ は

$$\begin{cases}z(t)=\varphi(t)-\dfrac{rv(t)^2\left(\psi'(t)(a^2-2ar\cos\theta(t)+r^2)+a\sin\theta(t)(r\varphi'(t)-a\varphi'(t)\cos\theta(t)-a\psi'(t)\sin\theta(t))\right)}{r\kappa(t)(a^2-2ar\cos\theta(t)+r^2)-av(t)^3(a-r\cos\theta(t))}\\ w(t)=\psi(t)+\dfrac{rv(t)^2\left(\varphi'(t)(a^2-2ar\cos\theta(t)+r^2)-a\sin\theta(t)(r\psi'(t)-a\psi'(t)\cos\theta(t)+a\varphi'(t)\sin\theta(t))\right)}{r\kappa(t)(a^2-2ar\cos\theta(t)+r^2)-av(t)^3(a-r\cos\theta(t))}\end{cases}$$

で与えられる. とくに $a=r$ の場合は

$$\begin{cases}z(t)=\varphi(t)-\dfrac{rv(t)^2\psi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}+\dfrac{rv(t)^2\psi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\cos\theta(t)-\dfrac{rv(t)^2\varphi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\sin\theta(t)\\ w(t)=\psi(t)+\dfrac{rv(t)^2\varphi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}-\dfrac{rv(t)^2\varphi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\cos\theta(t)-\dfrac{rv(t)^2\psi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\sin\theta(t)\end{cases}$$

となるため, $R(C)$ のパラメータ表示を与える関数 x, y を用いれば, $z(t)$, $w(t)$ は

$$\begin{cases}z(t)=\dfrac{2(r\kappa(t)-v(t)^3)\varphi(t)+v(t)^3x(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\\ w(t)=\dfrac{2(r\kappa(t)-v(t)^3)\psi(t)+v(t)^3y(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\end{cases}$$

と表される. このことから, $\begin{pmatrix}z(t)\\w(t)\end{pmatrix}$ は点 $\begin{pmatrix}\varphi(t)\\\psi(t)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ を $v(t)^3:2(r\kappa(t)-v(t)^3)$ に内分する点であることがわかる. また, $a=-r$ の場合は

$$\begin{cases}z(t)=\varphi(t)-\dfrac{rv(t)^2\psi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}-\dfrac{rv(t)^2\psi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\cos\theta(t)+\dfrac{rv(t)^2\varphi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\sin\theta(t)\\ w(t)=\psi(t)+\dfrac{rv(t)^2\varphi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}+\dfrac{rv(t)^2\varphi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\cos\theta(t)+\dfrac{rv(t)^2\psi'(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\sin\theta(t)\end{cases}$$

となるため, $R(C)$ のパラメータ表示を与える関数 x, y を用いれば, $z(t)$, $w(t)$ は

$$\begin{cases}z(t)=\dfrac{2(r\kappa(t)-v(t)^3)\varphi(t)+v(t)^3x(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\\ w(t)=\dfrac{2(r\kappa(t)-v(t)^3)\psi(t)+v(t)^3x(t)}{2r\kappa(t)-v(t)^3}\end{cases}$$

と表される. このことから, $\begin{pmatrix}z(t)\\w(t)\end{pmatrix}$ は点 $\begin{pmatrix}\varphi(t)\\\psi(t)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ を $v(t)^3:2(r\kappa(t)-v(t)^3)$ に内分する点であることがわかる.

26.5　縮閉線の例

例 **26.13** $\varphi(t)=t,\ \psi(t)=\dfrac{a^3}{2}t^2\ (a>0)$ の場合

$$\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=t-\frac{a^3t(1+(a^3t)^2)}{a^3}=-a^6t^3$$
$$\psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=\frac{a^3}{2}t^2+\frac{1+(a^3t)^2}{a^3}=\frac{3a^3}{2}t^2+\frac{1}{a^3}$$

より，$\begin{cases}x=-a^6t^3\\ y=\frac{3a^3}{2}t^2+\frac{1}{a^3}\end{cases}$ が放物線 $y=\dfrac{a^3}{2}x^2$ の縮閉線のパラメータ表示である．$t=-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{a^2}$ だから，縮閉線は x の関数 $y=\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}}{2a}+\dfrac{1}{a^3}$ のグラフである．

放物線 $y=\dfrac{a^3}{2}x^2$ と曲線 $y=\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}}{2a}+\dfrac{1}{a^3}$ との交点の x 座標を求める．$\dfrac{a^3}{2}x^2=\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}}{2a}+\dfrac{1}{a^3}$ とおき，両辺に $2a^3$ をかけて，右辺を左辺に移項すれば $a^6x^2-3a^2x^{\frac{2}{3}}-2=0$ が得られる．この左辺は $\left(a^2x^{\frac{2}{3}}-2\right)\left(a^2x^{\frac{2}{3}}+1\right)^2$ に等しいが，x は実数だから，$a^2x^{\frac{2}{3}}+1>0$ となるため，求める交点の x 座標は $x=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{a^3}$ である．$-\dfrac{2\sqrt{2}}{a^3}\leqq x\leqq\dfrac{2\sqrt{2}}{a^3}$ ならば $\dfrac{a^3}{2}x^2\leqq\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}}{2a}+\dfrac{1}{a^3}$ だから，放物線 $y=\dfrac{a^3}{2}x^2$ と曲線 $y=\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}}{2a}+\dfrac{1}{a^3}$ で囲まれた部分の面積は次で与えられる．

$$\int_{-\frac{2\sqrt{2}}{a^3}}^{\frac{2\sqrt{2}}{a^3}}\left(\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2a}+\frac{1}{a^3}-\frac{a^3}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{9x^{\frac{5}{3}}}{10a}+\frac{x}{a^3}-\frac{a^3}{6}x^3\right]_{-\frac{2\sqrt{2}}{a^3}}^{\frac{2\sqrt{2}}{a^3}}=\frac{88\sqrt{2}}{15a^6}$$

例 **26.14** $\varphi(t)=a\cos t,\ \psi(t)=b\sin t\ (a>b>0)$ の場合

$$\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=a\cos t-\frac{\cos t(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)}{a}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3t$$
$$\psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=b\sin t-\frac{\sin t(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)}{b}=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3t$$

より，$\begin{cases}x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3t\\ y=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3t\end{cases}$ が楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の縮閉線のパラメータ表示である．この曲線は，方程式 $\left(\dfrac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{by}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ で表される閉曲線で，x 軸と y 軸に関して対称である．

例 **26.15** $\varphi(t)=\dfrac{a(e^t+e^{-t})}{2}=a\cosh t,\ \psi(t)=\dfrac{b(e^t-e^{-t})}{2}=b\sinh t\ (a,b>0)$ の場合

$$\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=a\cosh t+\frac{\cosh t((a^2+b^2)\cosh^2t-a^2)}{a}=\frac{a^2+b^2}{a}\cosh^3t$$
$$\psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=b\sinh t-\frac{\sinh t((a^2+b^2)\sinh^2t+b^2)}{b}=-\frac{a^2+b^2}{b}\sinh^3t$$

より，$\begin{cases}x=\frac{a^2+b^2}{a}\cosh^3t\\ y=-\frac{a^2+b^2}{b}\sinh^3t\end{cases}$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の x 座標が正である部分の縮閉線のパラメータ表示である．$\cosh^2t-\sinh^2t=1$ を用いて，上のパラメータ表示から t を消去して得られる方程式 $\left(\dfrac{ax}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\dfrac{by}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 全体の縮閉線の方程式である．$a>b$ ならば 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とその縮閉線は 4 点 $\left(\pm a^2\sqrt{\frac{(a^2+2b^2)^3}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)^3}},\ \pm b^2\sqrt{\frac{(2a^2+b^2)^3}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)^3}}\right)$ (複号任意) で交わり，$a\leqq b$ ならば，これらの曲線は交わらない．

例 26.16 $\varphi(t)=at-b\sin t,\ \psi(t)=a-b\cos t$ の場合

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=at-b\sin t+\frac{\sin t(a^2+b^2-2ab\cos t)}{b-a\cos t}=at+\frac{a\sin t(a-b\cos t)}{b-a\cos t}\\ \psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=a-b\cos t-\frac{(a-b\cos t)(a^2+b^2-2ab\cos t)}{b(b-a\cos t)}=-\frac{a(a-b\cos t)^2}{b(b-a\cos t)}\end{aligned}$$

より, $\begin{cases}x=at+\frac{a\sin t(a-b\cos t)}{b-a\cos t}\\ y=-\frac{a(a-b\cos t)^2}{b(b-a\cos t)}\end{cases}$ が与えられたトコロイドの縮閉線のパラメータ表示である. とくに $b=a$ ならば $\begin{cases}x=a(t+\sin t)\\ y=-a(1-\cos t)\end{cases}$ がサイクロイド $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ の縮閉線のパラメータ表示である. この曲線はもとのサイクロイドを x 軸方向に π, y 軸方向に -2 だけ平行移動して得られる曲線に一致する.

例 26.17 $\varphi(t)=(a+b)\cos t-b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right),\ \psi(t)=(a+b)\sin t-b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)$ の場合

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=\frac{a}{a+2b}\left((a+b)\cos t+b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right)\right)\\ \psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=\frac{a}{a+2b}\left((a+b)\sin t+b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)\right)\end{aligned}$$

より, $\begin{cases}x=\frac{a}{a+2b}\left((a+b)\cos t+b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right)\right)\\ y=\frac{a}{a+2b}\left((a+b)\sin t+b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)\right)\end{cases}$ が半径 a の円に半径 b の円を外接させながら転がして得られる外サイクロイドの縮閉線のパラメータ表示である.

$$\begin{aligned}&\frac{a}{a+2b}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi b}{a}\right)&-\sin\left(\frac{\pi b}{a}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi b}{a}\right)&\cos\left(\frac{\pi b}{a}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(a+b)\cos t-b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right)\\ (a+b)\sin t-b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{a+2b}\left((a+b)\cos\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-b\cos\left(\frac{a+b}{b}t+\frac{\pi b}{a}\right)\right)\\ \frac{a}{a+2b}\left((a+b)\sin\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-b\sin\left(\frac{a+b}{b}t+\frac{\pi b}{a}\right)\right)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{a}{a+2b}\left((a+b)\cos\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-b\cos\left(\frac{a+b}{b}\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-\pi\right)\right)\\ \frac{a}{a+2b}\left((a+b)\sin\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-b\sin\left(\frac{a+b}{b}\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-\pi\right)\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{a+2b}\left((a+b)\cos\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)+b\cos\left(\frac{a+b}{b}\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)\right)\right)\\ \frac{a}{a+2b}\left((a+b)\sin\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)+b\sin\left(\frac{a+b}{b}\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)\right)\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

だから, 上記の縮閉線はもとの曲線を, 原点を中心として $\dfrac{\pi b}{a}$ だけ回転させ, さらに原点を中心に $\dfrac{a}{a+2b}$ 倍に縮小したものである.

例 26.18 $\varphi(t)=(a-b)\cos t+b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right),\ \psi(t)=(a-b)\sin t-b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)$ の場合;

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=\frac{a}{a-2b}\left((a-b)\cos t-b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right)\right)\\ \psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=\frac{a}{a-2b}\left((a-b)\sin t+b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)\right)\end{aligned}$$

より, $\begin{cases}x=\frac{a}{a-2b}\left((a-b)\cos t-b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right)\right)\\ y=\frac{a}{a-2b}\left((a-b)\sin t+b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)\right)\end{cases}$ が半径 a の円に半径 b の円を内接させながら転がして得られる内サイクロイドの縮閉線のパラメータ表示である.

$$\begin{aligned}&\frac{a}{a-2b}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi b}{a}\right)&-\sin\left(\frac{\pi b}{a}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi b}{a}\right)&\cos\left(\frac{\pi b}{a}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(a-b)\cos t+b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right)\\ (a-b)\sin t-b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{a-2b}\left((a-b)\cos\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)+b\cos\left(\frac{a-b}{b}t-\frac{\pi b}{a}\right)\right)\\ \frac{a}{a-2b}\left((a-b)\sin\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-b\sin\left(\frac{a-b}{b}t-\frac{\pi b}{a}\right)\right)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{a}{a-2b}\left((a-b)\cos\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)+b\cos\left(\frac{a-b}{b}\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-\pi\right)\right)\\ \frac{a}{a-2b}\left((a-b)\sin\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-b\sin\left(\frac{a-b}{b}\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-\pi\right)\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{a-2b}\left((a-b)\cos\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)-b\cos\left(\frac{a-b}{b}\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)\right)\right)\\ \frac{a}{a-2b}\left((a-b)\sin\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)+b\sin\left(\frac{a-b}{b}\left(t+\frac{\pi b}{a}\right)\right)\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

だから, 上記の縮閉線はもとの曲線を, 原点を中心として $\dfrac{\pi b}{a}$ だけ回転させ, さらに原点を中心に $\dfrac{a}{a-2b}$ 倍に拡大したものである.

例 **26.19** $\varphi(t)=\cos t(a\cos t+b)$, $\psi(t)=\sin t(a\cos t+b)$ $(a>0)$ の場合

$$\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=\frac{a(a^2+b^2+3ab\cos t-ab\cos^3 t)}{2a^2+b^2+3ab\cos t}$$
$$\psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=\frac{a^2b\sin^3 t}{2a^2+b^2+3ab\cos t}$$

より, $\begin{cases} x=\frac{a(a^2+b^2+3ab\cos t-ab\cos^3 t)}{2a^2+b^2+3ab\cos t} \\ y=\frac{a^2b\sin^3 t}{2a^2+b^2+3ab\cos t}\end{cases}$ がリマソン $r=a\cos t+b$ の縮閉線のパラメータ表示である. とくに $b=a$ ならば $\begin{cases} x=\frac{a}{3}(1+\cos t)(2-\cos t) \\ y=\frac{a}{3}\sin t(1-\cos t)\end{cases}$ がカージオイド $r=a(1+\cos t)$ の縮閉線のパラメータ表示である. この曲線はもとのカージオイドを, 原点を中心に 3 分の 1 に縮小して, さらに点 $\begin{pmatrix}\frac{a}{3}\\0\end{pmatrix}$ を中心に 180 度回転したものである.

例 **26.20** $\varphi(t)=a\sqrt{\cos 2t}\cos t$, $\psi(t)=a\sqrt{\cos 2t}\sin t$ の場合

$$\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=\frac{2a\cos^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}}$$
$$\psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=-\frac{2a\sin^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}}$$

より, $\begin{cases} x=\frac{2a\cos^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}} \\ y=-\frac{2a\sin^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}}\end{cases}$ $(-\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{4})$ がレムニスケート $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ の x 座標が正の部分の縮閉線のパラメータ表示である.

例 **26.21** $\varphi(t)=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $\psi(t)=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$ の場合

$$\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=\frac{3at^3(3t(5-2t^3+2t^6)+(t^3-2)^3)}{2(1+t^3)^4}$$
$$\psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=\frac{3a(3t^2(2-2t^3+5t^6)-(2t^3-1)^3)}{2(1+t^3)^4}$$

より, $\begin{cases} x=\frac{3at^3(3t(5-2t^3+2t^6)+(t^3-2)^3)}{2(1+t^3)^4} \\ y=\frac{3a(3t^2(2-2t^3+5t^6)-(2t^3-1)^3)}{2(1+t^3)^4}\end{cases}$ $(t\neq -1)$ が正葉線 $x^3-axy+y^3=0$ の縮閉線のパラメータ表示である.

例 **26.22** $\varphi(t)=t$, $\psi(t)=\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2a}$ の場合

$$\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=t-\frac{e^{2at}-e^{-2at}}{4a}$$
$$\psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=\frac{e^{at}+e^{-at}}{a}$$

より, $\begin{cases} x=t-\frac{e^{2at}-e^{-2at}}{4a} \\ y=\frac{e^{at}+e^{-at}}{a}\end{cases}$ が懸垂線 $y=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$ の縮閉線のパラメータ表示である.

例 **26.23** $\varphi(t)=a\log\dfrac{1+t}{1-t}-\dfrac{2at}{1+t^2}$, $\psi(t)=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ の場合

$$\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=a\log\frac{1+t}{1-t}$$
$$\psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$$

より，$\begin{cases} x = a\log\frac{1+t}{1-t} \\ y = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} \end{cases}$ $(|t|<1)$ すなわち懸垂線 $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ がトラクトリックス $x = a\log\dfrac{a \pm \sqrt{a^2-y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2-y^2}$ (複号同順) の縮閉線のパラメータ表示である．

例 26.24 $\varphi(t) = a\sin^2 t$, $\psi(t) = \dfrac{a\sin^3 t}{\cos t}$ の場合;

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)} &= -\frac{a}{6}\tan^2 t(6+\tan^2 t) \\ \psi(t) + \frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)} &= \frac{4a}{3}\tan t \end{aligned}$$

より，$\begin{cases} x = -\frac{a}{6}\tan^2 t(6+\tan^2 t) \\ y = \frac{4a}{3}\tan t \end{cases}$ がシッソイド $y^2 = -\dfrac{x^3}{x-a}$ の縮閉線のパラメータ表示である．

例 26.25 $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = \dfrac{a^3}{t^2+a}$ $(a>0)$ の場合

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)} &= \frac{4t^3(t^2+a^2+a)(t^4-(a^2-2a)t^2+a^4-a^3+a^2)}{(t^2+a)^3(3t^2-a)} \\ \psi(t) + \frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)} &= -\frac{t^8+4at^6+6a^2t^4-(2a^6-4a^3)t^2+2a^7+a^4}{2a^3(t^2+a)(3t^2-a)} \end{aligned}$$

より，$\begin{cases} x = \frac{4t^3(t^2+a^2+a)(t^4-(a^2-2a)t^2+a^4-a^3+a^2)}{(t^2+a)^3(3t^2-a)} \\ y = -\frac{t^8+4at^6+6a^2t^4-(2a^6-4a^3)t^2+2a^7+a^4}{2a^3(t^2+a)(3t^2-a)} \end{cases}$ がウィッチ $(x^2+a)y = a^3$ の縮閉線のパラメータ表示である．

例 26.26 $\varphi(t) = a + b\cos t$, $\psi(t) = a\tan t + b\sin t$ の場合

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)} &= -\frac{a(a^2+5ab\cos^3 t+3b^2\cos^4 t-3ab\cos^5 t-2b^2\cos^6 t)}{b\cos^3 t(3a\cos^2 t+b\cos^3 t-2a)} \\ \psi(t) + \frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)} &= -\frac{a\sin^3 t(3a+2b\cos t)}{\cos t(3a\cos^2 t+b\cos^3 t-2a)} \end{aligned}$$

より，$\begin{cases} x = -\frac{a(a^2+5ab\cos^3 t+3b^2\cos^4 t-3ab\cos^5 t-2b^2\cos^6 t)}{b\cos^3 t(3a\cos^2 t+b\cos^3 t-2a)} \\ y = -\frac{a\sin^3 t(3a+2b\cos t)}{\cos t(3a\cos^2 t+b\cos^3 t-2a)} \end{cases}$ が Nicomedes のコンコイド $b^2x^2 = (x-a)^2(x^2+y^2)$ の縮閉線のパラメータ表示である．

例 26.27 $\varphi(t) = e^{at}\cos t$, $\psi(t) = e^{at}\sin t$ $(a>0)$ の場合

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)} &= -ae^{at}\sin t \\ \psi(t) + \frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)} &= ae^{at}\cos t \end{aligned}$$

だから，$\begin{cases} x = -ae^{at}\sin t \\ y = ae^{at}\cos t \end{cases}$ が対数螺線 $r = e^{at}$ の縮閉線のパラメータ表示である．$c = \dfrac{\log a}{a}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\log a}{a}$ とおけば，$e^{ac} = a$, $\alpha + c = \dfrac{\pi}{2}$ だから

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{a(t+c)}\cos(t+c) \\ e^{a(t+c)}\sin(t+c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ac}e^{at}\cos(t+\alpha+c) \\ e^{ac}e^{at}\sin(t+\alpha+c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ae^{at}\sin t \\ ae^{at}\cos t \end{pmatrix}$$

が成り立つ．従って，この曲線はもとの対数螺旋を原点の回りに $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\log a}{a}$ だけ回転させた曲線である．

例 **26.28** $\varphi(t)=at^\alpha\cos t,\ \psi(t)=at^\alpha\sin t$ の場合

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=\frac{a\alpha t^{\alpha-1}(t\cos t-(t^2+\alpha^2)\sin t)}{t^2+\alpha^2+\alpha}\\ \psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=\frac{a\alpha t^{\alpha-1}((t^2+\alpha^2)\cos t+t\sin t)}{t^2+\alpha^2+\alpha}\end{aligned}$$

だから，$\begin{cases}x=\frac{a\alpha t^{\alpha-1}(t\cos t-(t^2+\alpha^2)\sin t)}{t^2+\alpha^2+\alpha}\\ y=\frac{a\alpha t^{\alpha-1}((t^2+\alpha^2)\cos t+t\sin t)}{t^2+\alpha^2+\alpha}\end{cases}$ が螺線 $r=at^\alpha$ の縮閉線のパラメータ表示である．

$$\begin{aligned}x'&=-\frac{a\alpha t^{\alpha-2}(t^4+2(\alpha^2+1)t^2+\alpha^4-\alpha^2)(t\cos t+\alpha\sin t)}{(t^2+\alpha^2+\alpha)^2}\\ y'&=\frac{a\alpha t^{\alpha-2}(t^4+2(\alpha^2+1)t^2+\alpha^4-\alpha^2)(\alpha\cos t-t\sin t)}{(t^2+\alpha^2+\alpha)^2}\end{aligned}$$

だから，$|\alpha|\geqq 1$ ならば，この縮閉線は特異点を持たず，$|\alpha|<1$ ならば $t=\sqrt{\sqrt{3\alpha^2+1}-\alpha^2-1}$ に対応する点は特異点である．

例 **26.29** $\varphi(t)=p\cos(at),\ \psi(t)=q\cos(bt+c)$ の場合

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=\frac{2a^2p^2\cos(2at)\sin(bt+c)-abp^2\sin(2at)\cos(bt+c)-2b^2q^2\sin^3(bt+c)}{2ap(a\cos(at)\sin(bt+c)-b\sin(at)\cos(bt+c))}\\ \psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=\frac{-2b^2q^2\sin(at)\cos(2bt+2c)+abq^2\cos(at)\sin(2bt+2c)+2a^2p^2\sin^3(at)}{2bq(a\cos(at)\sin(bt+c)-b\sin(at)\cos(bt+c))}\end{aligned}$$

だから，$\begin{cases}x=\frac{2a^2p^2\cos(2at)\sin(bt+c)-abp^2\sin(2at)\cos(bt+c)-2b^2q^2\sin^3(bt+c)}{2ap(a\cos(at)\sin(bt+c)-b\sin(at)\cos(bt+c))}\\ y=\frac{-2b^2q^2\sin(at)\cos(2bt+2c)+abq^2\cos(at)\sin(2bt+2c)+2a^2p^2\sin^3(at)}{2bq(a\cos(at)\sin(bt+c)-b\sin(at)\cos(bt+c))}\end{cases}$ が与えられたリサージュ曲線の縮閉線のパラメータ表示である．

例 **26.30** $\varphi(t)=a\sin(nt)\cos t,\ \psi(t)=a\sin(nt)\sin t$ の場合

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\frac{\psi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=\frac{an(n\cos t\sin(nt)+\cos(nt)\sin t((n^2-1)\sin^2(nt)-n^2)}{(3n^2+1)\sin^2(nt)-2n^2}\\ \psi(t)+\frac{\varphi'(t)(\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2)}{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}&=\frac{an(n\sin t\sin(nt)-\cos t\cos(nt)((n^2-1)\sin^2(nt)-n^2)}{(3n^2+1)\sin^2(nt)-2n^2}\end{aligned}$$

だから，$\begin{cases}x=\frac{an(n\cos t\sin(nt)+\cos(nt)\sin t((n^2-1)\sin^2(nt)-n^2)}{(3n^2+1)\sin^2(nt)-2n^2}\\ y=\frac{an(n\sin t\sin(nt)-\cos t\cos(nt)((n^2-1)\sin^2(nt)-n^2)}{(3n^2+1)\sin^2(nt)-2n^2}\end{cases}$ がバラ曲線 $r=a\sin(n\theta)$ の縮閉線のパラメータ表示である．