

目次

第 I 部	1 変数の微積分	1
第 1 章	関数	1
1.1	関数とそのグラフ	2
1.2	数列と極限	4
1.2.1	実数のことを少し反省 ……	4
	数列の例	4
	実数を要素とする集合について	4
	有界である集合	5
	有界な関数、最大値、最小値	6
1.2.2	数列のことを少し反省 ……	6
1.2.3	定数 e	13
1.2.4	数列の極限例	15
1.3	関数の極限值	19
1.3.1	有界性と単調性	19
1.3.2	連続変数の関数の極限	20
	関数の連続性	22
1.4	中間値の定理および最大値・最小値の存在定理	24
1.4.1	中間値の定理	24
1.4.2	最大値・最小値の存在定理	25

1.5	関数の極限の例	27
1.5.1	三角関数と極限	28
1.6	逆関数	29
1.6.1	一般論	29
1.6.2	指数関数と対数関数	32
	指数関数	32
	対数関数	32
1.6.3	逆三角関数	33
1.7	合成関数	35
第 2 章	微分	41
2.0	ちょっと復習	42
2.1	微分係数, 導関数	43
	高校の復習	45
2.2	種々の関数の導関数	45
2.3	微分法の基本定理	46
2.4	合成関数の微分法	47
2.5	逆関数の微分法	49
2.5.1	逆三角関数	50
2.5.2	媒介変数による関数表示での導関数	51
2.6	高階導関数	52
2.7	極限の例	54
2.8	Newton の方法	56
2.8.1	曲線の追跡	57
	極座標, 極方程式	58
2.9	平均値の定理, 種々の形	60
2.9.1	不定形の極限值	62
2.10	Taylor の定理	63
2.11	関数の無限級数展開, Maclaurin 級数	66
	関数の近似値と誤差	72

2.11.1	曲線の凹凸と変曲点	73
2.11.2	円周率は無理数であることの証明	75
第 3 章	積分	83
3.0	ちょっと復習	84
3.1	定積分とは“面積”である	84
3.1.1	区分求積法	84
3.2	定積分の意味をもう少し詳しく正確に	86
3.2.1	定積分の性質	91
3.3	定積分とその基本的性質	92
3.4	基本定理	93
3.5	不定積分を求める計算	97
3.5.1	置換積分	97
	有理関数	99
	三角関数を含んでいる場合	100
3.5.2	部分積分	101
3.6	定積分を求める計算	103
3.6.1	置換積分	103
3.7	数値としての定積分を計算する、Simpson の公式	106
3.7.1	Simpson の公式	106
3.8	広義積分	108
3.8.1	有限区間の広義積分	109
3.8.2	無限区間での広義積分	115
3.8.3	ガンマ関数	117
3.8.4	Euler の定数	118
3.8.5	応用を少し	119
	こんな事もある... 回転体	119
	曲線の曲率	120
3.9	曲線の長さ	122

第 II 部 多変数の微積分

printout 2008 年 5 月 23 日	133
第 4 章 偏微分	135
4.1 2 変数関数 — 例および極限について	136
4.2 偏微分と全微分	143
4.2.1 偏微分	143
4.2.2 全微分	147
4.2.3 波動方程式	151
4.3 合成関数の偏微分	153
4.4 極値と最大, 最小問題	169
4.5 陰関数	178
4.6 条件付き最大, 最小問題	188
第 5 章 重積分	195
5.1 重積分の話の始まり	196
5.2 累次積分	209
5.3 積分変数の変換 (重積分における置換積分)	217
5.4 広義積分 (重積分の場合)	230
5.5 線積分と Green の定理	239
5.6 重積分の応用	249
5.6.1 剛体の質量と重心	249
5.6.2 曲面の表面積	251
5.6.3 面積分と Gauss の定理	255
5.6.4 Stokes の定理	257
第 6 章 級数	261
6.1 級数とは何か?	262
6.1.1 正項級数	265
6.1.2 交代級数	269
6.2 絶対収束と条件収束	272

6.3	関数項級数	278
6.3.1	関数項数列	279
6.3.2	関数項級数	283
	286
6.4	巾級数	290
6.5	項別積分と項別微分	302
付録 A	数学者たち	315
B	ドイツ文字、ギリシャ文字一覧	316
C	問と演習問題の答	317
	参考文献	333
	索引	334

目次

1.1	Leibniz(1646-1716)	1
1.2	$y = \sin x$ のグラフ	2
1.3	$y = e^{-x^2}$ のグラフ	2
1.4	$\sin x < x < \tan x$	28
1.5	$y = 2^x$ のグラフ	32
1.6	$y = \arcsin x$ のグラフ	33
1.7	$y = \arccos x$ のグラフ	34
1.8	$y = \arctan x$ のグラフ	34
2.1	Newton(1642-1727)	41
2.2	二次元極座標	59
2.3	$\sin x$ の Taylor 展開	68
2.4	離れて見た $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$	80
2.5	近くから見た.	80
2.6	ある日の鹿大構内	82
3.1	Cauchy(1789-1857)	83
3.2	区分求積法	89
3.3	$y = e^{-x} x^{s-1}$ のグラフ、 $s = 0.5, 1, 2$ の場合	113
3.4	実線はサイクロイド、点線は問題図	129
3.5	クロソイド (clothoid)	131
4.1	Gauss(1777-1855)	135
4.2	$z = xy$	136
4.3	$z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2)$	136
4.4	Bolzano-Weierstrass の定理の証明	140

4.5	全微分の図	148
4.6	2 回転	160
4.7	Leibniz(1646-1716)	161
4.8	3 次元極座標	163
4.9	$z = x^2 - y^2$ のグラフ	170
4.10	ドラクロア	194
5.1	Euler(1707-1783)	195
5.2	$z = x^2 + 2y^2, D : x \leq 1, y \leq 1$	201
5.3	縦線閉領域	205
5.4	横線閉領域	205
5.5	変数変換、写像	218
5.6	面積要素	219
5.7	1 次写像の面積倍率	222
5.8	極座標への面積要素の変換	222
5.9	円	223
5.10	円環	223
5.11	$\Delta : r \leq \cos \theta$	224
5.12	$D : x^2 + y^2 \leq x$	224
5.13	不等式 (5.7) の図	227
5.14	線積分の積分路	241
5.15	積分路	242
5.16	Möbius の帯	256
6.1	Weierstrass(1815-1897)	261
6.2	$y = x$ の Fourier 展開のグラフ	287

表目次

3.1	不定積分の公式表	94
B.1	ドイツ文字・ギリシャ文字	316

第 I 部

1 変数の微積分

第1章

関数

微分積分学は原理的には関数 (functions) についての学問といえる. 変数 x とともに変動する数 y を x の関数とよび $y = f(x)$ (f は任意の文字) と表したのであった. Leibniz(1646-1716) が用い始めた用語*¹である. Newton 力学での運動の現象が説明できる. 物理学、さらに自然科学へ応用されている.



図 1.1 Leibniz さん、あなたは世界史の教科書では哲学者ということになっている.

*¹ ラテン語で *functio* とよんだ.

1.1 関数とそのグラフ

関数 $y = f(x)$ をいろいろな例を通して見てみよう.

$$y = \sin x, \quad y = e^{-x^2}$$

の場合. 次の図 (1.2) 自然現象でも波動、回転等に現れる大切な関数である.

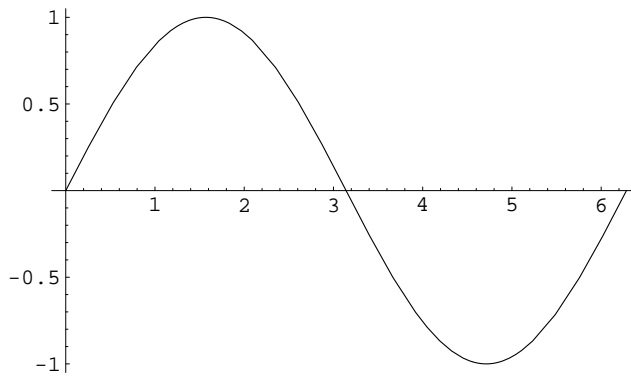


図 1.2 $y = \sin x$ のグラフ

次の図 (1.3) 確率論、統計学に現れる関数である*². 他にも種々な重要な関数

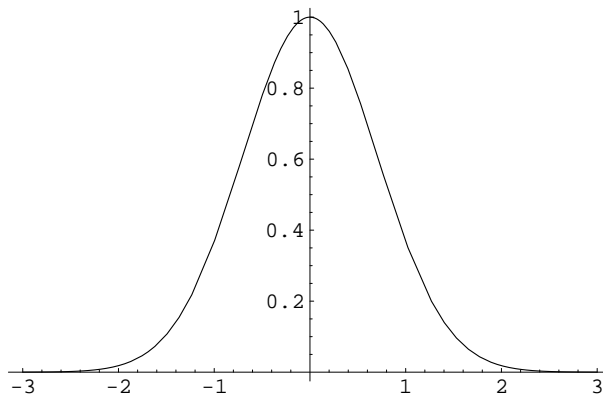


図 1.3 $y = e^{-x^2}$ のグラフ