- $X;\mathrm{set}$
  $P(X)\supset S$
  - ⊛ S は、包含関係に関し Totally Ordered Set[T.O.] $:\Leftrightarrow\quad \forall A,B\in S(A\subset B\vee A\supset B)$
  - $P(X)\ni C$
    - ⊛ C は､S の Supremum $:\Leftrightarrow\quad \forall A\in S\; A\subset C$
  - $S\ni A$
    - ⊛ A は､S の Maximal Element[M.E.] $:\Leftrightarrow\quad \neg(\exists B\in S\; A\subsetneq B)$
  - ⊛ S は、包含関係に関し Inductively Ordered Set[I.O.] $:\Leftrightarrow$

    $\phi\neq\forall T\in P(S)(T;\mathrm{T.O.}\Rightarrow\exists A\in S\; A;T$ の Sup$)$

Zorn's Lemma$^{\mathrm{AC}}$

- X;set
  $P(X)\supset S;$包含関係に関し I.O
- $\boxed{\forall A\in S\;\exists C\in S\; A\subset C;S\text{ の M.E.}}$
  - $A\in S$
    $\mathcal{T}:=\{T\in P(S)|A\in T;$包含関係に関し T.O.$\}$
  - $\mathcal{T}$ の定義から明らかに $\{A\}\in\mathcal{T}$
    $\to\mathcal{T}\neq\phi$
  - $\mathcal{C}:\mathcal{T}\to P(S),T\mapsto\{C\in S|C\notin T\wedge C;T$ の Sup$\}$
  - $\boxed{\phi\in\mathrm{Im}\,\mathcal{C}\Rightarrow\exists C\in S\; A\subset C;S\text{ の M.E.}}_1$
    - の仮定 $\to\exists T\in\mathcal{T}\;\mathcal{C}(T)=\phi$
    - $\mathcal{T}$ の定義 $\to A\in T$
    - $\to T\neq\phi$ $\xrightarrow{\text{前提 }S}\exists C\in S\; C;T$ の Sup
      $T;$包含関係に関し T.O.
    - $,\to A\subset C$
    - $\boxed{C;S\text{ の M.E.}}_2$
      - 背 $\exists B\in S\; C\subsetneq B$
      - 背 & $\to B;T$ の Sup $\quad\to B\in T\to B\subset C$;矛盾
        $\to\forall\acute{B}\in S(\acute{B};T$ の Sup $\Rightarrow\acute{B}\in T)$
      - & → が成立
  - $\boxed{\phi\in\mathrm{Im}\,\mathcal{C}}_1$
    - 背 $\phi\notin\mathrm{Im}\,\mathcal{C}$
    - 背 $\to\forall T\in\mathcal{T}\;\mathcal{C}(T)\neq\phi\xrightarrow{\mathrm{A.C}}\prod_{T\in\mathcal{T}}\mathcal{C}(T)\neq\phi$
    - $(C_T)_{T\in\mathcal{T}}\in\prod_{T\in\mathcal{T}}\mathcal{C}(T)$
    - $\boxed{\forall T\in\mathcal{T}\; T\amalg\{C_T\}\in\mathcal{T}}_2$
      - $T\in\mathcal{T}$
      - $C_T\in\mathcal{C}(T)\to\quad C_T\notin T$
        $C_T;T$ の Sup
      - $A\in T;$包含関係に関し T.O. $\to T\cup\{C_T\}\in\mathcal{T}$
    - $F:\mathcal{T}\to\mathcal{T},T\mapsto T\amalg\{C_T\}$

- ○ $\mathcal{A} := \left\{ \mathcal{R}\in P(\mathcal{T}) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\,\mathrm{i}\,)\ \{A\}\in\mathcal{R} \\ (\mathrm{ii})\ \forall T\in\mathcal{R}\ F(T)\in\mathcal{R} \\ (\mathrm{iii})\ \mathcal{R}\supset\forall\mathcal{Q};\text{包含関係に関し T.O. } \bigcup_{T\in\mathcal{Q}} T\in\mathcal{R} \end{array} \right\}$
- • $\boxed{\mathcal{T}\in\mathcal{A}}_2$
  - • から明らか
  - • から明らか
  - ○ $\mathcal{T}\supset\mathcal{Q}$; 包含関係に関し T.O.
  - ○ $U,V\in\bigcup_{T\in\mathcal{Q}} T$
  - • $\exists T_U\in\mathcal{Q}\,U\in T_U\wedge\exists T_V\in\mathcal{Q}\,V\in T_V$
  - • $\to T_U\subset T_V\vee T_U\supset T_V$
  - • $T_U,T_V\in\mathcal{Q}\subset\mathcal{T}\to T_U,T_V$; 包含関係に関し T.O.
  - • 直上の 3 式 $\to U\subset V\vee U\supset V$

    $\longrightarrow \bigcup_{T\in\mathcal{Q}} T$; 包含関係に関し T.O.
  - • $\forall T\in\mathcal{Q}\subset\mathcal{T} A\in T\to A\in\bigcup_{T\in\mathcal{Q}} T$
- • $\mathcal{A}\neq\phi$
- ○ $\mathcal{R}_0 := \bigcap_{\mathcal{R}\in\mathcal{A}}\mathcal{R}\in P(\mathcal{T})$
- • $\boxed{\mathcal{R}_0\in\mathcal{A}}_2$
  - • $\forall\mathcal{R}\in\mathcal{A}\,\{\mathcal{R}\}\in\mathcal{R}\to\{A\}\in\mathcal{R}_0$
  - ○ $T\in\mathcal{R}$
  - • $\forall\mathcal{R}\in\mathcal{A}\,T\in\mathcal{R}\to\forall\mathcal{R}\in\mathcal{R}\,F(T)\in\mathcal{R}\to F(T)\in\mathcal{R}_0$
  - ○ $\mathcal{R}_0\supset\mathcal{Q}$; 包含関係に関し T.O.
  - ○ $\mathcal{R}'\in\mathcal{A}$
  - • $\mathcal{R}'\supset\mathcal{R}_0\supset\mathcal{Q}$; 包含関係に関し T.O. $\to\mathcal{R}'\ni\bigcup_{T\in\mathcal{Q}}$

    $\to\bigcup_{T\in\mathcal{Q}}\in\bigcap_{\mathcal{R}'\in\mathcal{A}}=\mathcal{R}_0$
- • $\boxed{\mathcal{R}_0;\text{包含関係に関し T.O.}}_2$
  - ○ $\mathcal{G}:\mathcal{R}_0\to P(\mathcal{R}_0), T\mapsto\{U\in\mathcal{R}_0\mid U\subset T\vee U\supset T\}$
  - ○ $\mathcal{R}_1 := \{T\in\mathcal{R}_0\mid\mathcal{G}(T)=\mathcal{R}_0\}\subset\mathcal{R}_0$
  - • $\boxed{\mathcal{R}_1\in\mathcal{A}}_3$