証明　任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\sigma_n \circ \sigma = \sigma \circ \sigma_n$ であるから

$$(\sigma \circ \sigma_n) \circ \sigma = \sigma \circ (\sigma_n \circ \sigma) = \sigma \circ (\sigma \circ \sigma_n) \tag{1}$$

である．よって定理 III.1.7 において $(X, x_0, \varphi) = (\mathbb{N}, \sigma(n), \sigma)$ とすれば $\sigma_{\sigma(n)}$ および $\sigma \circ \sigma_n$ はともに f の要件を満たす．f は一意なので $\sigma_{\sigma(n)} = \sigma \circ \sigma_n$．　□