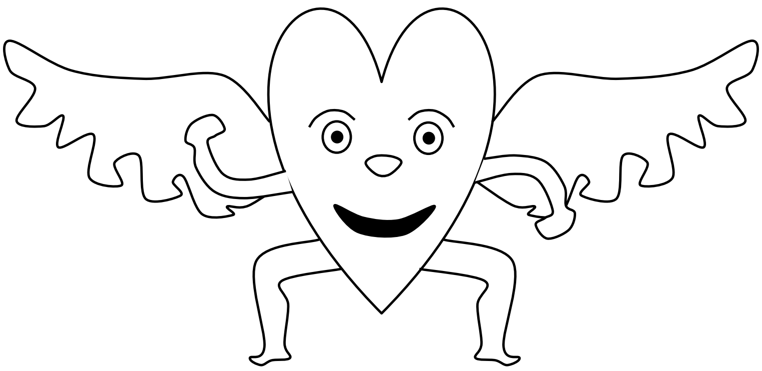
交流回路



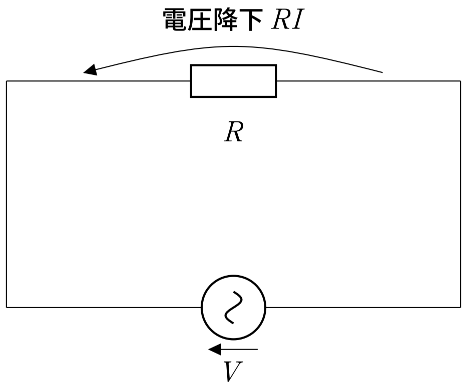
―目次―

起電力 V を定めておく。

$$V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$$

V_0 : V の最大値，　ω : 角振動数，　t : 時刻，　ϕ : V の初期位相

1. 抵抗



抵抗に流れている電流を I とすると，抵抗で生じる電圧降下 V' の大きさがオームの法則より $V' = RI$ で与えられるため，キルヒホッフの法則 II より，

$$\begin{aligned} V &= V' \\ V_0 \sin(\omega t + \phi) &= RI \\ I &= \frac{V_0}{R} \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

以上より，

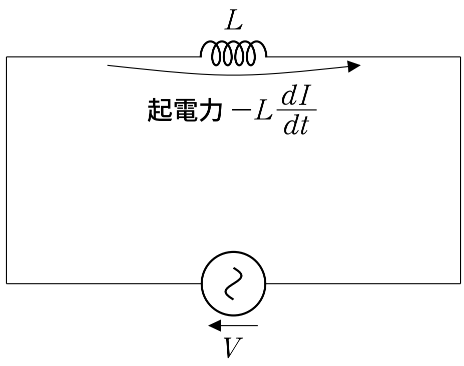
$$V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$I = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t + \phi)$$

という関係にあり，時刻 t における交流電源 V の位相 $(\omega t + \phi)$ と回路を流れる電流 I の位相 $(\omega t + \phi)$ は同じである。

したがって，**交流回路の抵抗を流れる電流は供給電圧と同相である**といえる。

2. コイル



ある時刻 t において回路を流れている電流を I とすると，コイルを流れる電流の時間変化は $\dfrac{dI}{dt}$ であり，コイルには電流の増加を妨げる向きに起電力 $V' = -L\dfrac{dI}{dt}$ が生じる。キルヒホッフの法則Ⅱ（閉回路内の起電力の総和はその電圧降下の総和に等しい）より，

$$
\begin{aligned}
V + V' &= 0 \\
V_0 \sin(\omega t + \phi) + \left(-L\frac{dI}{dt}\right) &= 0 \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{1}{L} V_0 \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

電流を求めるために上式の両辺を t で積分すると，

$$\int \frac{dI}{dt}\, dt = \int \frac{1}{L} V_0 \sin(\omega t + \phi)\, dt$$

$$I = -\frac{V_0}{\omega L}\cos(\omega t + \phi) + C \qquad \text{(C=const.)}$$

$$I = \frac{V_0}{\omega L}\sin\left\{(\omega t + \phi) - \frac{\pi}{2}\right\} + C$$

解説は次ページに続く。

$$I = \frac{V_0}{\omega L}\sin\left\{(\omega t + \phi) - \frac{\pi}{2}\right\} + C \qquad \text{（再掲）}$$

となる。

積分定数 C の扱いについて

積分定数 C について，この定数は回路の初期条件などで定まる値であり，**回路に定常的な電流が存在していることを意味している**が，理想的なコイルの交流回路ではこのような電流の成分は存在しえず，$C = 0$ とするのが通例。

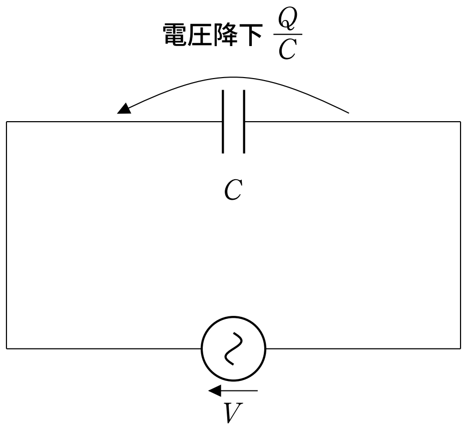
以上を踏まえた上で，コイルを流れる電流は C を無視すると，

$$V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$$
$$I = \frac{V_0}{\omega L}\sin\left\{(\omega t + \phi) - \frac{\pi}{2}\right\}$$

という関係にあることがわかる。これより，時刻 t における交流電源 V の位相 $(\omega t + \phi)$ と回路を流れる電流 I の位相 $\left\{(\omega t + \phi) - \frac{\pi}{2}\right\}$ とでは位相は異なっており，電流の位相のほうが電圧よりも $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れているのがわかる。

したがって，**交流回路のコイルを流れる電流は供給電圧よりも $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れている**といえる。

3. コンデンサー



ある時刻 t においてコンデンサーに蓄えたれた電荷量を Q とすれば，コンデンサーで生じる電圧降下 V' は

$$
\begin{aligned}
Q &= CV' \\
V &= V' \\
V_0 \sin(\omega t + \phi) &= \frac{Q}{C} \\
Q &= CV_0 \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

ここで，電流とは電荷の流れを表した量であり，その大きさは電荷の時間微分に等しく，$I = \frac{dQ}{dt}$ であることを利用して回路に流れる電流 I を求める。上式の両辺を時間微分すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= \omega CV_0 \cos(\omega t + \phi) \\
I &= \omega CV_0 \sin\left\{(\omega t + \phi) + \frac{\pi}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

解説は次ページに続く。

$$I = \omega C V_0 \sin\left\{(\omega t + \phi) + \frac{\pi}{2}\right\} \qquad \text{（再掲）}$$

となる。以上より，

$$\begin{aligned} V &= V_0 \sin(\omega t + \phi) \\ I &= \omega C V_0 \sin\left\{(\omega t + \phi) + \frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned}$$

という関係にあることがわかる。これより，時間 t における交流電源 V の位相 $(\omega t + \phi)$ と回路を流れる電流 I の位相 $\left\{(\omega t + \phi) + \frac{\pi}{2}\right\}$ とでは位相は異なっており，電流の位相のほうが電圧よりも $\frac{\pi}{2}$ だけ進んでいるのがわかる。

したがって，**交流回路のコンデンサーを流れる電流は供給電圧よりも $\frac{\pi}{2}$ だけ進んでいる**といえる。

Column：**実効値**

直流電流 I が抵抗値 R の抵抗に流れており，電圧降下が $V = RI$ の場合の単位時間あたりの消費電力 P は，

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

で与えられるのであった。では，交流電流の場合はどうだろうか。交流の消費電力について議論する場合，**波形や角振動数という交流特有の情報に関係なく直流の場合と直接的に比較できるような指標があれば便利である。**

そこで，抵抗 R に交流電圧 $V = V_0 \sin \omega t$ を 1 周期（T 秒）に消費する電力と，直流電圧 $V = V_\mathrm{e}$ を同じ時間 T 秒だけかけて消費される電力と等しいとすると，

（**交流** 1 **周期** T **の消費電力**）=（T **秒間の直流の消費電力**）

$$\int_0^T \frac{(V_0 \sin \omega t)^2}{R} dt = \frac{V_\mathrm{e}^2}{R} T$$

$$V_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (V_0 \sin \omega t)^2 \, dt}$$

となる。この V_e を交流電圧の**実効値**または**ＲＭＳ値**という。要は，**電圧の実効値** V_e **がどのような値をとるかを知っておけば，交流の消費電力の計算を** V_e **の直流が流れていると置き換えて計算できる**のである。上式の（右辺）の積分を 2 倍角の公式と $\omega T = 2\pi$ を用いることで，

$$\therefore \quad V_\mathrm{e} = V_0 \sqrt{\frac{1}{2T}\left[t - \frac{1}{2\omega}(\sin 2\omega t) \right]_0^T} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

と求まる。これは電流の実効値 I_e でも同様の手順を踏む。

4. インピーダンス（レジスタンス・リアクタンス）

回路を議論する上で重要な物理量として**インピーダンス**と呼ばれるものがある。これは，**回路に存在する抵抗素子だけではなくコンデンサやコイルをについても抵抗に該当する量を考え，抵抗の概念を拡張させた物理量**のことを指す。

抵抗素子のインピーダンスの大きさを**レジスタンス**，コンデンサのインピーダンスの大きさを**容量性リアクタンス**，コイルのインピーダンスの大きさを**誘導性リアクタンス**という。

各素子のインピーダンスの大きさ（レジスタンス，リアクタンス）を決めたいわけだが，交流は時間的に変動しているので，交流の実効値を用いて定義することで直流の場合との直接比較を可能な次の形で定義しておく。

$$\textbf{Resistance}\ (X_{\mathrm{R}}),\ \textbf{Reactance}\ (X_{\mathrm{L}},\ X_{\mathrm{C}}) = \frac{\textbf{電圧降下の実効値}\ V_{\mathrm{e}}}{\textbf{電流の実効値}\ I_{\mathrm{e}}}$$

以下，回路上の各要素についてレジスタンス及びリアクタンスについてすでにわかっていることをまとめておく。

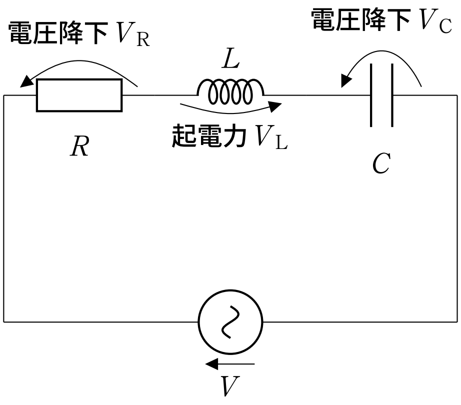
＊抵抗素子の**レジスタンス**： $X_{\mathrm{R}} = \dfrac{\frac{V_0}{\sqrt{2}}}{\frac{V_0}{\sqrt{2}R}} = R$

＊コイルの**誘導性リアクタンス**： $X_{\mathrm{L}} = \dfrac{\frac{V_0}{\sqrt{2}}}{\frac{V_0}{\sqrt{2}\omega L}} = \omega L$

＊コンデンサーの**容量性リアクタンス**： $X_{\mathrm{C}} = \dfrac{\frac{V_0}{\sqrt{2}}}{\frac{\omega C V_0}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\omega C}$

次ページ以降では，これらの素子をすべて含む回路全体の抵抗に該当する概念である**合成インピーダンス**を求めていく。

5. ＲＬＣ直列回路



キルヒホッフの法則Ⅱより，

$$V + V_{\mathrm{L}} = V_{\mathrm{C}} + V_{\mathrm{R}}$$

$$V_0 \sin(\omega t + \phi) + \left(-L\frac{dI}{dt}\right) = RI + \frac{Q}{C}$$

ここで，すこし天下り的ではあるが，上図の回路に流れている電流 $I(t)$ を

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \gamma)$$

と仮定し，キルヒホッフの法則Ⅱをみたすような条件を考える。上式に仮定した $I(t)$ を代入すると，

$$\begin{aligned} &V_0 \sin(\omega t + \phi) \\ &\quad = RI_0 \sin(\omega t + \gamma) + \omega L I_0 \cos(\omega t + \gamma) - \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

であり，$X_{\mathrm{L}} = \omega L$，$X_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{\omega C}$ および，三角関数の合成を用いて式変形を行うと，

$$\begin{aligned} &V_0 \sin(\omega t + \phi) \\ &\quad = RI_0 \sin(\omega t + \gamma) + (X_{\mathrm{L}} - X_{\mathrm{C}})\, I_0 \cos(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_0\underline{\sin(\omega t+\phi)} &= RI_0\sin(\omega t+\gamma)+(X_{\mathrm{L}}-X_{\mathrm{C}})\,I_0\cos(\omega t+\gamma) \qquad \text{（再掲）}\\
&= I_0\sqrt{R^2+(X_{\mathrm{L}}-X_{\mathrm{C}})^2}\,\underline{\sin(\omega t+\gamma+\delta)}
\end{aligned}
$$

となる。ただし，δ は

$$
\cos\delta=\frac{R}{\sqrt{R^2+(X_{\mathrm{L}}-X_{\mathrm{C}})^2}},\quad \sin\delta=\frac{X_{\mathrm{L}}-X_{\mathrm{C}}}{\sqrt{R^2+(X_{\mathrm{L}}-X_{\mathrm{C}})^2}}
$$

をみたす定数である[1)]。

よって，キルヒホッフの法則Ⅱの両辺が恒等的に等しいということは**両辺の位相が揃っている必要がある**ため，

$$
\phi=\gamma+\delta
$$

が必要となる。したがって，はじめに仮定したときに導入した未知定数 γ が $\phi-\delta$ をみたせばキルヒホッフの法則Ⅱをみたすことがわかる。

結果的に，

$$
V_0\sin(\omega t+\phi)=I_0\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t+\phi)
$$

という結論が得られ，ＲＬＣ直列回路全体の**合成インピーダンス**の大きさ Z は，

$$
Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}
$$

となることがわかる。

1）　このことから，$\tan\delta=\dfrac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$ という値が導ける。

6. ＲＬＣ並列回路