2012（H24)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系）　教育学部（教育科学理系）、医学部（人間健康科）
総合人間学部（理系）、経済学部（理系）
理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）　総合人間学部（文系）、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（一般）

数学（理系）

$\boxed{1}$ (35点)

次の各問に答よ.

(1) aが正の実数のとき$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$を求めよ.

(2) 定積分$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ.

＜解答＞

(1)

$0<a<1$のとき

$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$だから, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$ （答）

$a=1$のとき

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+1^n)^{\frac{1}{n}}=1$ （答）

$1<a$のとき

$$(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=\left\{a^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)\right\}^{\frac{1}{n}}=a\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^n+1\right\}^{\frac{1}{n}}$$

したがって, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{a}\right)^n+1\right\}^{\frac{1}{n}}=a$ （答）

(2)

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\log(1+x^2)\,dx$, 部分積分法を適用すると,

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\log(1+x^2)\,dx=\frac{-\log(1+x^2)}{x}+\int\frac{2}{1+x^2}dx$だから,

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{-\log(1+x^2)}{x}\right]_1^{\sqrt{3}}+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\log 2+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx,$$

ここで$x=\tan\theta$とおく。$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$1+\tan^2\theta=1+x^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$だから，

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\log 2+\frac{\pi}{12}\qquad\text{（答）}$$

＜解説＞

(1)

式を凝視すると，$a\leqq 1$のときは，容易に結論を得ることがわかる。$1<a$のときは，式の変形というちょっとした着想を必要とする。そこで，aについて場合分けをして考察する。

(2)

部分積分法は，$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

ここで，$f(x)=\log(1+x^2)$とすれば，$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，また$g(x)=\dfrac{-1}{x}$とすれば，$g'(x)=\dfrac{1}{x^2}$

したがって，　$\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\log(1+x^2)dx=\frac{-\log(1+x^2)}{x}+\int\frac{2}{1+x^2}dx$を得る。

この種の定積分は部分積分法や置換積分法が有効な場合が多い。どのように適用するかは，いろいろな被積分関数の問題を扱う中で感覚を養うことが必要であろう。いろいろな初等関数，三角関数，対数関数の不定積分の公式も頭に入れておくことが必要だ。

別解

式を凝視すると，定積分の下端1，上端$\sqrt{3}$に対応するのが，$\tan\theta$の$\dfrac{\pi}{4}$と$\dfrac{\pi}{3}$であることに気づく。

そこでまず，$x=\tan\theta$とおく。$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$だから，

$$\int\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\frac{1}{\sin^2\theta}\log\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta=-\int\frac{1}{\sin^2\theta}\log\cos\theta\,d\theta$$

部分積分法を適用する。$f(\theta)=\log\cos\theta$ とすると，$f'(\theta)=\dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta}$

$g'(\theta)=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$とすれば，$g(\theta)=\dfrac{-\cos\theta}{\sin\theta}$だから，

$\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2\theta}\log\cos\theta\,d\theta=\frac{-\cos\theta\log\cos\theta}{\sin\theta}-\theta$，$x=1$で$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$x=\sqrt{3}$で$\theta=\dfrac{\pi}{3}$だから，

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\left[\frac{\cos\theta\log\cos\theta}{\sin\theta}+\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\log 2+\frac{\pi}{12}\qquad\text{（答）}$$

別解の方が端的だが，部分積分の適用がやや煩瑣である。

$\boxed{2}$ （30点）

正四面体OABCにおいて，点P，Q，Rをそれぞれ辺OA，OB，OC上にとる．ただしP，Q，Rは四面体OABCの頂点とは異なるとする。△PQRが正三角形ならば，3辺PQ，QR，RPはそれぞれ3辺AB，BC，CAに平行であることを証明せよ。

＜解答＞

OP$=p$，OQ$=q$，OR$=r$とおく。すると，PQ$^2=p^2+q^2-2pq\cos 60°=p^2+q^2-pq$

同様に，QR$^2=q^2+r^2-qr$，RP$^2=r^2+p^2-rp$

PQ＝QR＝RPだから，$p^2+q^2-pq=q^2+r^2-qr=r^2+p^2-rp$

$p^2+q^2-pq=q^2+r^2-qr$から，$(p-r)(p+r-q)=0$，したがって$p=r$ ① または$q=p+r$ ①’

$q^2+r^2-qr=r^2+p^2-rp$から，$(q-p)(q+p-r)=0$，したがって$q=p$ ② または$r=q+p$ ②’

$r^2+p^2-rp=p^2+q^2-pq$から，$(r-q)(r+q-p)=0$，したがって$r=q$ ③ または$p=r+q$ ③’

①は②，③と同時に成立できるが，②’，③’とは同時に成立しない。なぜなら，①，②’，③’が同時に成立すると，$q=0$となり，Qが頂点Oと一致するからである。②，③についても同様だから，①，②，③が同時に成立するだけである。

したがって$p=q=r$，すなわちOP＝OQ＝ORとなる。すると，OP：OA＝OQ：OB＝OR：OCだから，3辺PQ，QR，RPはそれぞれ3辺AB，BC，CAに平行である

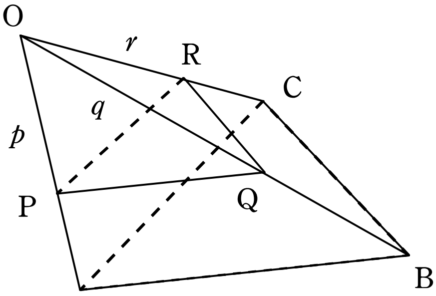

図１

＜解説＞

正四面体とは，四つの正三角形からなる四面体である。当たり前と思われる命題の証明問題なので，一見難しそうに感じるかも知れないが，容易にOP＝OQ＝ORが導かれる。

別解（とはいえ，上記の解答とほぼ同じだが）

ベクトルを用いて証明する。図１’のように各辺をベクトル表示する。すると

$\overrightarrow{PQ}=\vec{c}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=-\vec{p}+\vec{q}$，同様に

$\vec{a}=-\vec{q}+\vec{r}$，$\vec{b}=-\vec{r}+\vec{p}$

$\vec{c}^{\,2}=\vec{p}^{\,2}+\vec{q}^{\,2}-2\vec{p}\,\vec{q}=\vec{p}^{\,2}+\vec{q}^{\,2}-2|\vec{p}||\vec{q}|\cos 60°=\vec{p}^{\,2}+\vec{q}^{\,2}-|\vec{p}||\vec{q}|$

$\vec{a}^{\,2}=\vec{q}^{\,2}+\vec{r}^{\,2}-2\vec{q}\,\vec{r}=\vec{q}^{\,2}+\vec{r}^{\,2}-|\vec{q}||\vec{r}|$

$\vec{b}^{\,2}=\vec{r}^{\,2}+\vec{p}^{\,2}-2\vec{r}\,\vec{p}=\vec{r}^{\,2}+\vec{p}^{\,2}-|\vec{r}||\vec{p}|$

$\vec{c}^{\,2}=\vec{a}^{\,2}=\vec{b}^{\,2}$だから，$|\vec{p}|=|\vec{q}|=|\vec{r}|$が導かれる。

図１’

$\boxed{3}$ (30点)

実数x，yが条件$x^2+xy+y^2=6$を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。

＜解答＞

$x+y=a$，$xy=b$とおく。すると，$x^2+xy+y^2=a^2-b=6$，したがって，$b=a^2-6$　①

評価する式$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$を$a$，$b$を用いて表す。

$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y=ab-a^2+a=a(a^2-6)-a^2+a=a(a^2-a-5)$

いま，$p^2-(x+y)p+xy=(p-x)(p-y)=0$なる2次方程式を考えると，$p$は$x$，$y$なる実数解をもつ。すると，この方程式が実数解をもつ条件が成立しなければならない。したがって，

$(x+y)^2-4xy=a^2-4b\geqq 0$　②

①を②に代入すると，$a^2\leqq 8$，したがって$-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 2\sqrt{2}$

$g(a)=a(a^2-a-5)$とおく。$g'(a)=3a^2-2a-5=(3a-5)(a+1)$

$g(a)$の変化は図２のようになる。したがって，$-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 2\sqrt{2}$で，$g(-2\sqrt{2})\leqq g(a)\leqq g(-1)$

したがって，$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$　（答）

a	$-2\sqrt{2}$		-1		$\frac{5}{3}$		$2\sqrt{2}$
$g'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	$-8-6\sqrt{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	$6\sqrt{2}-8$

図２

＜解説＞

２変数の多項式の値の範囲を求める問題。１変数の多項式になるように変数変換を行う。評価すべき式と条件式ともに，xy項を含み，x，yに関して対称である。そこで$x+y=a$，$xy=b$のような，x，yに関して対称な変数変換を行うことが適当である。すると与えられた式は１変数の多項式となり，変数の範囲によって，多項式の値の範囲が決まる。

変数の範囲を決める式②は，x，yが実数であることから，$x+y$とxyとが満たすべき条件を示す。この式は，単に　$(x+y)^2-4xy=(x-y)^2\geqq 0$を示すものである。

別解

以下のような変数変換によっても求めることができる。

$x+y=2a$，$x-y=2b$とおく。すると，$x=a+b$，$y=a-b$

$x^2+xy+y^2=3a^2+b^2=6$，したがって，$a^2\leqq 2$だから，$-\sqrt{2}\leqq a\leqq \sqrt{2}$

$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y=2a(a^2-b^2)-4a^2+2a=2a(4a^2-6)-4a^2+2a=8a^3-4a^2-10a$

$f(a)=8a^3-4a^2-10a$として，$f'(a)=24a^2-8a-10=24\left(a^2-\frac{a}{3}-\frac{5}{12}\right)=24\left(a-\frac{5}{6}\right)\left(a+\frac{1}{2}\right)$

$f(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}(6+4\sqrt{2})=-8-6\sqrt{2}$，$f(\sqrt{2})=\sqrt{2}(6-4\sqrt{2})=6\sqrt{2}-8$

図３のように$f(a)$は変化する。$f(\sqrt{2})<f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3$，$f(-\sqrt{2})<f\left(\dfrac{5}{6}\right)=-\dfrac{175}{27}$

したがって，$-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$に対して，$f(-\sqrt{2})\leqq f(a)\leqq f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

したがって，$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$　　（答）

この変数変換によれば，条件式はa，bに関する楕円の式になるので，変数aの範囲は自ずと定まる。

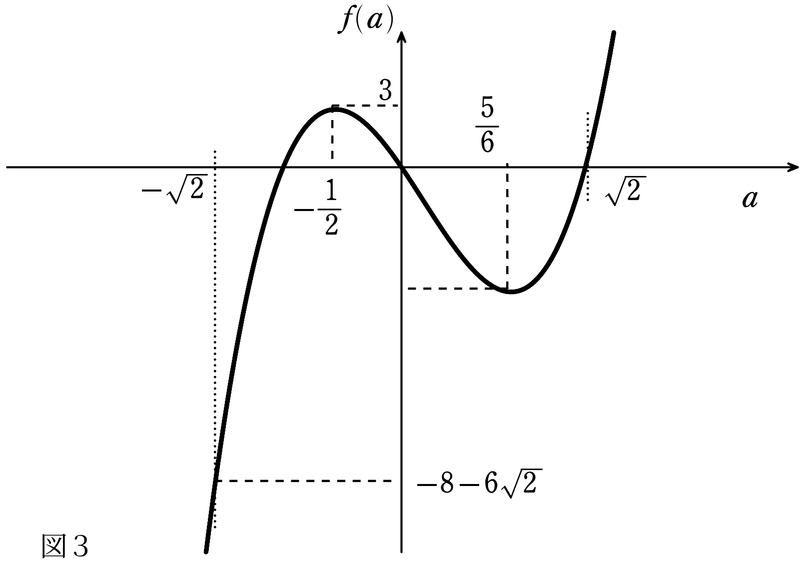

図３

$\boxed{4}$　　（35点）

(1)　$\sqrt[3]{2}$が無理数であることを証明せよ。

(2)　$P(x)$は有理数を係数とするxの多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$を満たしているとする．このとき$P(x)$はx^3-2で割り切れることを証明せよ。

＜解答＞

(1)

$\sqrt[3]{2}$が有理数とすれば，m，nを互いに素な正の整数として，$\sqrt[3]{2}=\dfrac{n}{m}$と表すことができる。

$\left(\dfrac{n}{m}\right)^3=2$となり，$n^3=2m^3$，すると$n$は偶数。すると$n^3$は$2^3$の倍数となるから，$m$も偶数。これは$m$，$n$が互いに素な正の整数であることに矛盾する。したがって，$\sqrt[3]{2}$は有理数ではない。すなわち無理数である。

(2)

$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c$とおくことができる。ただし，$Q(x)$は有理数を係数とする$x$の多項式，$a$，$b$，$c$は有理数である。すると，$P(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{4}\,a+\sqrt[3]{2}\,b+c=0$

$a=0$とすれば，$\sqrt[3]{2}\,b+c=0$で，$b\neq 0$なら，$\sqrt[3]{2}=-\dfrac{c}{b}$となり，左辺は無理数，右辺は有理数で矛盾

したがって，$a=b=c=0$

$a \fallingdotseq 0$とすれば，$\sqrt[3]{4}+\frac{b}{a}\sqrt[3]{2}+\frac{c}{a}=0$，したがって$\sqrt[3]{4}=-\frac{b}{a}\sqrt[3]{2}-\frac{c}{a}=b'\sqrt[3]{2}+c'$

ただし，$b'=-\frac{b}{a}$，$c'=-\frac{c}{a}$とおく。b'，c'は当然有理数である。両辺に$\sqrt[3]{2}$を乗じると，

$2=b'\sqrt[3]{4}+c'\sqrt[3]{2}=b'(b'\sqrt[3]{2}+c')+c'\sqrt[3]{2}=(b'^2+c')\sqrt[3]{2}+b'c'$

したがって，$\sqrt[3]{2}=\frac{2-b'c'}{b'^2+c'}$，しかるに右辺は有理数だから矛盾である。つまり$a \fallingdotseq 0$の仮定が誤り。

以上によって，$a=b=c=0$だから，$P(x)=(x^3-2)Q(x)$となり，$P(x)$はx^3-2で割り切れる。

＜解説＞

(1)

このような整数の証明問題でよく利用される背理法によって証明する。この際，二つの整数が互いに素という前提に矛盾する結果が導かれる場合が多い。こうした論理の流れにピーンとくるようでありたい。

(2)

任意の多項式は，$F(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k=\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n-m} c_k x^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{m-1} d_k x^k\right)$

のように表されることを利用する。すなわち，$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c$を着想する。

$a=b=c=0$を導くことが目標である。そうでない場合には，$\sqrt[3]{2}$が有理数になるような式を導き，矛盾を明らかにすることがポイントである。

$\boxed{5}$ (35点)

次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうかを答えよ．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ．

(p)　正n角形の頂点から3点を選んで内角の1つが60°である三角形を作ることができるならば，nは3の倍数である．

(q)　△ABCと△ABDにおいて，AC＜ADかつBC＜BDならば，∠C＞∠Dである．

＜解答＞

(p)

図４のように円周上の正n角形の3つの頂点A，B，Cにおいて，$\angle \mathrm{BAC}=60°=\frac{\pi}{3}$とする。

すると，中心角$\angle \mathrm{BOC}=120°=\frac{2\pi}{3}$

しかるに，$\angle \mathrm{BOC}$は$\frac{2\pi}{n}$の整数倍だから，

$\angle \mathrm{BOC}=\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{n}\times k$，ただし$k$は正の整数

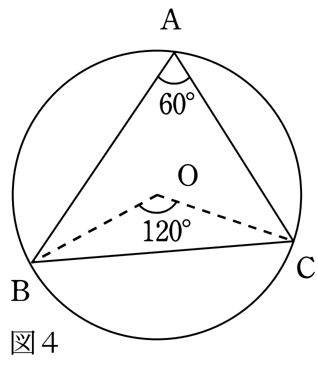

図４

したがって，$n=3k$，したがってnは3の倍数である。この命題は正しい。

(q)

この命題は正しくない。図５のように，△ABDに外接する円O，Aを中心として半径ADの円O_A，Bを中心として半径BDの円O_B，を考える。すると，点Cを円Oの外側で，円O_Aと円O_Bの内側にとると，明らかにAC＜ADかつBC＜BDだが，∠C＜∠Dである。∠C＞∠Dにはならない。

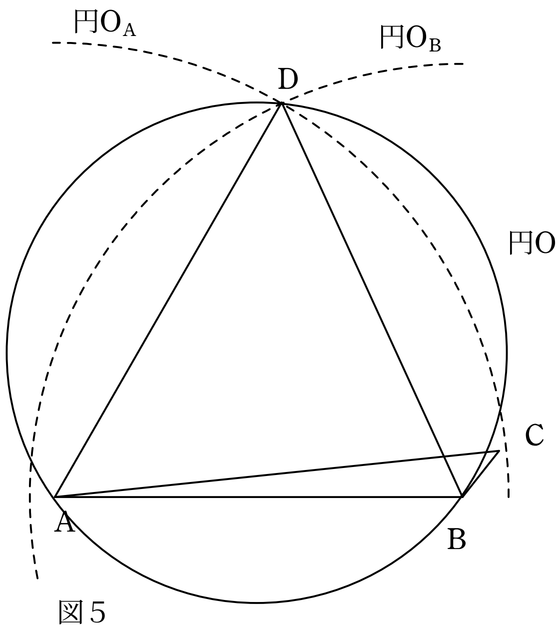

図５

＜解説＞

(p)

一見難しそうな問題だが，問題設定を平易な形に置き換える着想が必要である。その上で，円周角から中心角を求め，正n角形の2つの頂点がつくる中心角が満たすべき条件を求める。

難しく考えると，以下のような解答もある。筆者が初めに考えた方法だが，まともに考えると，簡単なことが，こんなに難しくなってしまうという例である。だから数学は怖い。

半径1の円周上の点によって，正n角形の頂点を表す。正n角形の頂点から3点を選ぶということだが，一つの頂点を(1, 0)に選び，他の二つの頂点からこの頂点を見込む角度が60°になるとき，nの値の条件を調べる。

半径1の円の円周をn等分して正n角形を作る。頂点をP_iとする。ただし$i=1, 2, ..., n-1$。

図６のように頂点P_1，P_j，P_kからなる三角形で，$\angle P_jP_1P_k=60°=\dfrac{\pi}{3}$とする。

$P_1=(1, 0)$，$P_j=(\cos j\theta, \sin j\theta)$，$P_k=(\cos k\theta, \sin k\theta)$，ただし$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$

$$
\begin{aligned}
(P_j-P_k)^2&=(\cos j\theta-\cos k\theta)^2+(\sin j\theta-\sin k\theta)^2\\
&=(\cos j\theta)^2+(\sin j\theta)^2+(\cos k\theta)^2+(\sin k\theta)^2-2\cos j\theta\cos k\theta\sin j\theta\sin k\theta\\
&=2-2\cos(j-k)\theta
\end{aligned}
$$

一方，$\angle P_jP_1P_k=60°=\dfrac{\pi}{3}$だから，$|P_j-P_k|=\sqrt{3}$，したがって　$(P_j-P_k)^2=(\sqrt{3})^2=3$

したがって，$2-2\cos(j-k)\theta=3$，$\cos(j-k)\theta=-\frac{1}{2}$

したがって$(j-k)\theta=\frac{2\pi}{n}(j-k)=\frac{2}{3}\pi$あるいは$\frac{4}{3}\pi$

したがって$n=3(j-k)$あるいは$n=\frac{3}{2}(j-k)$，したがってnは3の倍数である。

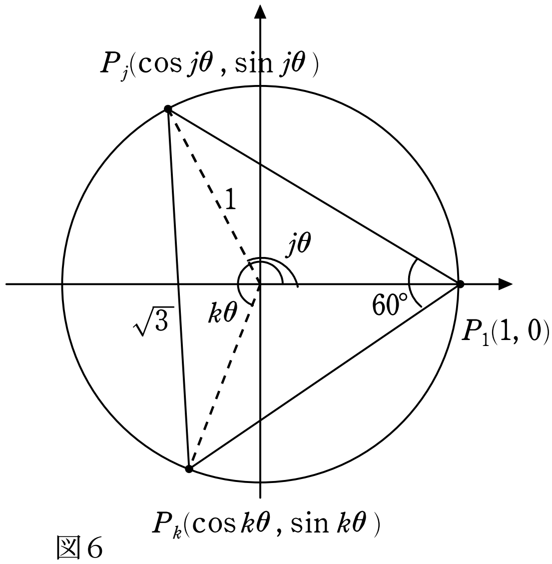

図6

(*q*)

一見，正しい命題のようだが，外接円を描いてみると，反例が見えてくる。この問題では角度の大小を論じるので，△ABDの外接円を描いてみると良い。弦に張る円周上の点の角は円周角であって，すべて等しい。弦に張る円内の点の角は円周角より大きく，円外の点は円周角より小さいという性質を利用して，反例を考える。

$\boxed{6}$ (35点)

さいころをn回投げて出た目を順にX_1，X_2，・・・，X_nとする．さらに

$$Y_1=X_1,\ Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k=2,\cdots,n)$$

によって，Y_1，Y_2，・・・，Y_nを定める．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率p_nを求めよ．

<解答>

$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n=X_n+\frac{1}{Y_{n-1}}\leqq 1+\sqrt{3}$，したがって，$X_n=1$または2

$X_n=1$の場合，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \leqq \dfrac{1}{Y_{n-1}} \leqq \sqrt{3}$，すなわち$\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq Y_{n-1} \leqq 1+\sqrt{3}$

$X_n=2$の場合，$\dfrac{\sqrt{3}-3}{2} \leqq \dfrac{1}{Y_{n-1}} \leqq \sqrt{3}-1$，すなわち$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{n-1}$

$Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$である確率をp'_n，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n$である確率を$p''_n$，とすれば,

$p_n=\dfrac{1}{6}p'_{n-1}+\dfrac{1}{6}p''_{n-1}$，一方，$p_n=p'_n+p''_n-1$だから

$p_n=\dfrac{1}{6}(p'_{n-1}+p''_{n-1})=\dfrac{1}{6}(p_{n-1}+1)$，これを変形して，$p_n-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{6}\left(p_{n-1}-\dfrac{1}{5}\right)$

したがって，$p_n-\dfrac{1}{5}=\left(p_1-\dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$，しかるに$p_1=\dfrac{1}{6}$だから,

$p_n=\dfrac{1}{5}\left(1-\dfrac{1}{6^n}\right)$　　（答）

<解説>

与えられた式を凝視すると，$X_n=1$または2であることが分かる。そこで，それぞれの場合，Y_{n-1}がどうなるかを見る。すると,

$X_n=1$のとき，$\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq Y_{n-1} \leqq 1+\sqrt{3}$，$1<Y_{n-1}$は自明だから，$Y_{n-1} \leqq 1+\sqrt{3}$

$X_n=2$のとき，$\dfrac{\sqrt{3}-3}{2} \leqq \dfrac{1}{Y_{n-1}} \leqq \sqrt{3}-1$，$0<\dfrac{1}{Y_{n-1}}$は自明だから，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{n-1}$

この両式は，与えられた条件式と関係づけられることに気づくことがポイントだ。$Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$である確率p'_n，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n$である確率$p''_n$，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$である確率$p_n$の間の関係が求まれば，確率$p_n$の漸化式が求まりそうだ。

図７から理解できるように下記の関係が成立する。

（$Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$である確率）＋（$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n$である確率）

＝（$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$である確率）＋1

したがって，$p_n=p'_n+p''_n-1$の関係式が成立する。

また，$p_n=\dfrac{1}{6}p'_{n-1}+\dfrac{1}{6}p''_{n-1}$　において，前の$\dfrac{1}{6}$は$X_n=1$となる確率，後の$\dfrac{1}{6}$は$X_n=2$となる確率である。

p_nの漸化式から一般項を求める方法は習熟していなければならない。

また，$n=1$のとき

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_1=X_1 \leqq 1+\sqrt{3}$，すると，$Y_1=X_1=2$だから，$p_1=\dfrac{1}{6}$

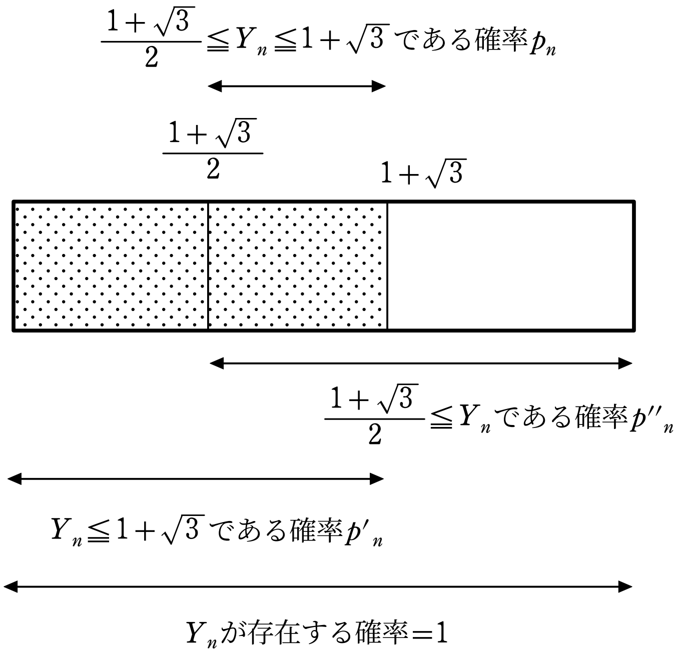

図７

＜理系総評＞

例年通り，難易が適度に混じった問題構成になっており，扱い易い問題から的確に解答していきたい。$\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{2}$ あたりを着実に正答し，$\boxed{4}$，$\boxed{6}$ に食らいついて，加点していきたい。

$\boxed{1}$ (1) a の値によって，結果が異なることを見抜く。難易度はＣ。

(2)部分積分法，置換積分法などの不定積分の方法に習熟していることが必要である。難易度はＢ。

$\boxed{2}$ 一見容易なようだが，きっちり証明するための論理が必要である。難易度Ｂ。

$\boxed{3}$ 変数変換によって，評価すべき２変数の多項式を１変数の多項式に変換する。その方法は常套的である。題意は簡明であり，計算も難しいものではない。難易度はＢ－。

$\boxed{4}$ (1)無理数の定義を的確に把握していなければならない。難易度Ｃ。

(2)証明の方針や論理過程を着想することが必要である。難しい証明過程ではないが，矛盾を導く着想が必要であり，難易度はＡ－。

$\boxed{5}$ (p)まともに考えると，複雑な解法になってしまう。簡単に証明できる方法を着想する必要がある。円周角，中心角の関係は当然知っておく必要がある。難易度はＡ－。

(q)外接円や円周角の性質を上手に活用する。難易度はＣ。

$\boxed{6}$ 確率の問題だが，難問であり良問である。難問であるゆえんは，解答の方針を見出すことが難しいことだ。Y_n の一般形を求めることができないか，などという方向に向かうと，迷路にはまり込む。与えられた式を凝視して，X_n，Y_{n-1} の条件を求めると，類似の条件が Y_{n-1} に課せられることが分かる。p_n の漸化式を求めるという方向に思考が進めば，しめたものだ。難易度Ａ。

120815

数学（文系）

$\boxed{1}$ (30点)

次の各問に答えよ．

(1)　2つの曲線$y=x^4$と$y=x^2+2$とによって囲まれる図形の面積を求めよ．

(2)　nを3以上の整数とする．1からnまでの番号をつけたn枚の札の組が2つある．これら$2n$枚の札をよく混ぜ合わせて，札を1枚ずつ3回取り出し，取り出した順にその番号をX_1，X_2，X_3とする．$X_1<X_2<X_3$となる確率を求めよ．ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする．

＜解答＞

(1)

2つの曲線の交点は，$(\sqrt{2}, 4)$，$(-\sqrt{2}, 4)$だから，2つの曲線によって囲まれる図形の面積は，

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^2+2-x^4)dx=2\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{56}{15}\sqrt{2}$$ （答）

(2)

X_1，X_2，X_3の取り出し方の総数は，$2n(2n-1)(2n-2)$

異なるn個の数から，ある順序で3個の数を取り出す場合の数は，${}_nC_3$

n個の数はそれぞれ2つあるから，

異なる3個の数をある順序で取り出す場合の数は，${}_nC_3\times 2^3$

したがって，$X_1<X_2<X_3$となる確率は，

$$\frac{2^3{}_nC_3}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{2^3n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)\times 3!}=\frac{n-2}{3(2n-1)}$$ （答）

＜解説＞

(1)

図１のようなグラフを描いて，題意を確認する。両式とも偶関数だから，積分範囲は0から$\sqrt{2}$までで良い。

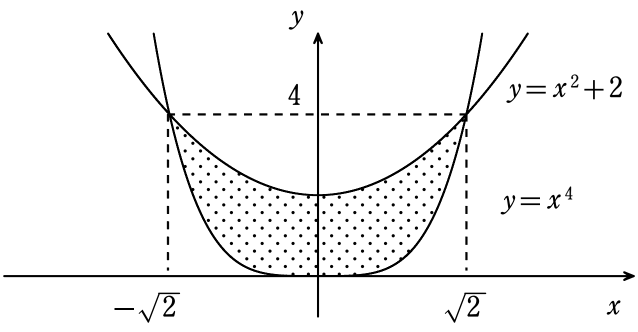

図１

(2)

X_1，X_2，X_3の取り出し方の総数が，$2n(2n-1)(2n-2)$であることは，容易に理解できる。

次に，異なる数がn個あり，そこからある順序で異なる3個の数を選ぶ場合の数は，n個から3個選ぶ組合せの数，すなわち${}_nC_3$，であることに気づかなければならない。ここでの順序とは，小さい順である。

この順序は3!通りあり，どれも同じ確からしさで起きる。このことは，$\dfrac{{}_nP_3}{3!}={}_nC_3$を意味している。

つまり，3個の数の全ての順序を含む場合の数は${}_nP_3$であり，特定の順序の場合の数は${}_nC_3$である。

図２のように，n個の数の札が2組あるのだから，それぞれについて，上の札をとるか，下の札をとるか，どちらかをとる場合があるから，$2\times2\times2=2^3$の組合せがある。したがって，$2^3{}_nC_3$が，小さい順，すなわち$X_1<X_2<X_3$のように異なる3個の数の札を取り出す場合の数である。

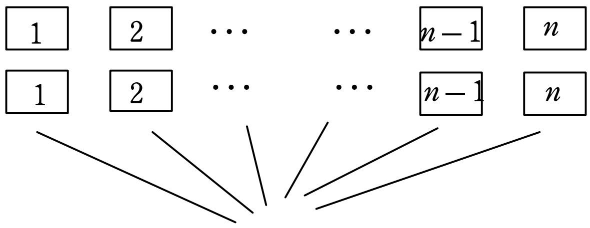

図２

小さい順に3つの数の札を選択
それぞれの数で，上の札か下の札か選択

さて，この問題は意外に難しい。なぜか？！，$X_1<X_2<X_3$のように取り出す場合の数が組合せの数${}_nC_3$と気づくことが難しいということが第一である。順列の場合の数と組合せの場合の数とが，混乱してしまうのである。次に，同じ数の札が2枚あるのだが，取り出した数が同じになる場合の扱いをどうすれば良いのか，気になってしまうのである。

そこで，以下の別解１を記載する。ここでは，順列も組合せも，同じ数が出る場合のことも，混乱を招くことがなく，すっきりと理解できると思うがどうだろう。

別解

X_1，X_2，X_3の取り出し方の総数は，$2n(2n-1)(2n-2)$

$X_1=X_2$，あるいは$X_2=X_3$，あるいは$X_3=X_1$になる場合の数はそれぞれが$2n(2n-2)$だから，合計で$6n(2n-2)$

したがって，3つの札がどれも等しくない取り出し方の数は，$2n(2n-1)(2n-2)-6n(2n-2)$

X_1，X_2，X_3の大小関係は6通りで，どれも同じ確からしさだから，$X_1<X_2<X_3$となる場合の数は，

$\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)-6n(2n-2)}{6}$，したがって，$X_1<X_2<X_3$となる確率は，

$\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)-6n(2n-2)}{12n(2n-1)(2n-2)}=\dfrac{n-2}{3(2n-1)}$　　（答）

同じ札が2枚ずつあるのだから，同じ札を取り出す場合がある。$X_1=X_2$となるのは，1回目の取り出し方は$2n$通り，2回めは1回目と同じ番号の札を取り出す必要があるから1通り，3回目は残りの何を取り出しても良いから$(2n-2)$通りだから，結局$2n(2n-2)$通りである。$X_2=X_3$，あるいは$X_3=X_1$の場合も同じである。したがって，同じ札を取り出す場合の数は，$3\times2n(2n-2)$通りである。

取り出し方の総数から同じ札を取り出す場合の数を除いた数が，X_1，X_2，X_3が全て異なる場合の数

である。X_1，X_2，X_3の大小関係は6通りあり，どれも同じ確からしさで起きる。したがって，$X_1<X_2<X_3$となる場合の数は，X_1，X_2，X_3が全て異なる場合の数を6で除した数である。

以上が，別解の解説であるが，本問は解答の方針を着想するのが意外に難しい。なぜなら，まともに考えると，以下のような取扱いに至るからである。

誤りの解答（まともに考えると陥ってしまう）

$X_1<X_2$となる札の枚数は，$2(n-X_1)$だから，$X_1<X_2$となる確率は$\dfrac{1}{n}\times\dfrac{2(n-X_1)}{2n-1}$

同様に，$X_2<X_3$となる札の枚数は，$2(n-X_2)$だから，$X_2<X_3$となる確率は

$$\frac{2}{2n-1}\times\frac{2(n-X_2)}{2n-2}=\frac{2(n-X_2)}{(2n-1)(n-1)}$$

したがって，$X_1<X_2<X_3$となる確率は，$\dfrac{4(n-X_1)(n-X_2)}{n(2n-1)^2(n-1)}$

X_1，X_2が変化する範囲の確率合計は$\dfrac{4}{n(2n-1)^2(n-1)}\displaystyle\sum_{X_1=1}^{n-2}(n-X_1)\sum_{X_2=X_1+1}^{n-1}(n-X_2)$

$$\sum_{X_2=X_1+1}^{n-1}(n-X_2)=\frac{(n-1-X_1)(n-X_1)}{2}$$

$$\sum_{X_1=1}^{n-2}(n-X_1)\sum_{X_2=X_1+1}^{n-1}(n-X_2)=\sum_{X_1=1}^{n-2}\frac{(n-1-X_1)(n-X_1)^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{X_1=1}^{n-2}\left\{(n-X_1)^3-(n-X_1)^2\right\}$$

$$\sum_{X_1=1}^{n-2}(n-X_1)^3=\sum_{Y=n-1}^{2}Y^3=\sum_{Y=2}^{n-1}Y^3=\sum_{Y=1}^{n}Y^3-1-n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-1-n^3$$

$$\sum_{X_1=1}^{n-2}(n-X_1)^2=\sum_{Y=n-1}^{2}Y^2=\sum_{Y=2}^{n-1}Y^2=\sum_{Y=1}^{n}Y^2-1-n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-1-n^2$$

$$\sum_{X_1=1}^{n-2}\left\{(n-X_1)^3-(n-X_1)^2\right\}=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-1-n^3-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+1+n^2$$

$$=\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(3n-1)$$

$$\frac{4}{n(2n-1)^2(n-1)}\sum_{X_1=1}^{n-2}(n-X_1)\sum_{X_2=X_1+1}^{n-1}(n-X_2)=\frac{4}{n(2n-1)^2(n-1)}\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-1)$$

$$=\frac{(n-2)(3n-1)}{6(2n-1)^2}$$

自然数の2乗，3乗の数列の和の公式の知識を必要とする上に，結果は解答と似ているようで違っている。なぜ，違っているのか，残念ながら未だ分からない。好学の読者からの指摘を待っている。このような解法にはまると，とんでもなく難しい問題になる。これも着想が大事という例として記載したわけである。

$\boxed{2}$ (30点)

理系の $\boxed{2}$ に同じ。

$\boxed{3}$ (30点)

理系の $\boxed{3}$ に同じ。

$\boxed{4}$ (30点)

次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうかを答えよ．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ．

(p)　理系の$\boxed{5}$ (p)に同じ。

(q)　△ABCと△A’B’C’において，AB＝A’B’，BC＝B’C’，∠A＝∠A’ならば，これら2つの三角形は合同である．．

＜解答＞

(q)　正しくない。図３のように，△ABCの外接円を描く。BとB’，CとC’を一致させる。

Bを中心とし，半径 ABの円と外接円の交点をA’とすれば，

AB＝A’B’であり，円周角は等しいことから，∠A＝∠A’であるが，一般にAC≒A’Cなので，

△ABCと△A’B’C’とは合同とはいえない。

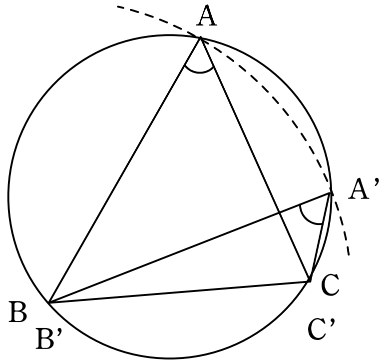

図３

＜解説＞

(q)

三角形の合同の条件は基本的な知識として知っていることだろう。与えられた条件は，三角形の合同の条件ではない。そこで反例を考える。∠A，∠A’はBC，B’C’の対角だから，共通の弦上の円周角を利用することを着想すると，容易に反例を着想することができよう。

$\boxed{5}$ (30点)

次の条件$(*)$を満たす正の実数の組$(a\ ,\ b)$の範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

$(*)$　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ$0<\theta\leqq\pi$となるθがちょうど１つある．

＜解答＞

$\cos a\theta=\cos b\theta$ により，$b\theta=\pm a\theta+2n\pi$，ただし，$n=0$，$\pm1$，$\pm2$，．．．　①

$b=a$のとき，任意のθが$(*)$を満たすから，$b\fallingdotseq a$

したがって，$\theta=\dfrac{2n\pi}{b\pm a}$　　②

$0<\theta\leqq\pi$を満たす②が1つしかない正の実数の組$(a\ ,\ b)$を求める。

ｉ） $a<b$のとき

$0<\theta$であるには，$1\leqq n$でなければならない。

$0<\dfrac{2n\pi}{b+a}<\dfrac{2n\pi}{b-a}$だから，$0<\dfrac{2n\pi}{b+a}\leqq\pi<\dfrac{2n\pi}{b-a}$　　③　でなければならない。

さらに，$2\leqq n$で③が成立するならば，$0<\dfrac{2\pi}{b+a}\leqq\pi$となって，$\theta$は2つ以上存在するから，

③は$n=1$でのみ成立しなければならない。したがって，

$0<\dfrac{2}{b+a}\leqq1<\dfrac{2}{b-a}$，かつ　$1<\dfrac{4}{b+a}$

すなわち，$2-a\leqq b<2+a$，　$b<4-a$　　④

ⅱ） $b<a$のとき

$1\leqq n$ならば，$\dfrac{2n\pi}{b-a}<0<\dfrac{2n\pi}{b+a}$だから，$0<\dfrac{2n\pi}{b+a}\leqq\pi$　　⑤

$n\leqq-1$ならば，$\dfrac{2n\pi}{b+a}<0<\dfrac{2n\pi}{b-a}$だから，$0<\dfrac{2n\pi}{b-a}\leqq\pi$　　⑥

⑤か⑥か，どちらかが成立する条件を求める。

⑤が成立するとき，$n=1$のみで成立しなければならない。したがって，

$0<\dfrac{2}{b+a}\leqq1<\dfrac{4}{b+a}$，すなわち$2-a\leqq b<4-a$　　⑦

そして，⑥が成立しないためには，$\pi<\dfrac{2n\pi}{b-a}$，したがって$a-2<b$　　⑧

⑥が成立するとき，$n=-1$のみで成立しなければならない。したがって，

$0<\dfrac{-2}{b-a}\leqq1<\dfrac{-4}{b-a}$，すなわち$a-4<b\leqq a-2$　　⑨

そして⑤が成立しないためには，$1<\dfrac{2}{b+a}$，したがって$b<2-a$　　⑩

以上によって，正の実数の組$(a\ ,\ b)$の範囲は，④，⑦と⑧，⑨と⑩である。これを座標平面上に図示すると図４の横線部になる。ここで，破線と○は含まれない。⑨と⑩によって定まる範囲は存在しない。

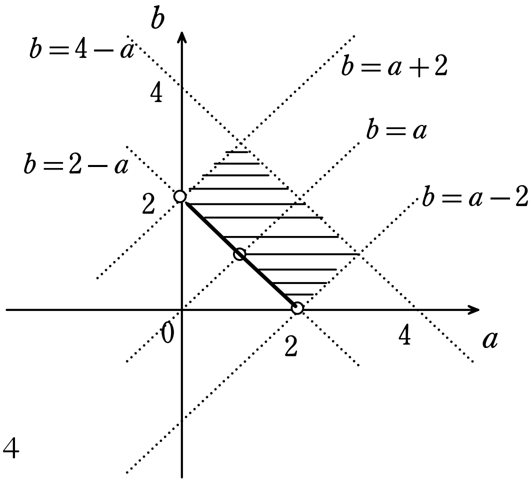

図４

<解説>

与えられた式を満足するθが一つあるための条件を求める。まずは，与えられた式からθの一般解を求める。すると，整数nのとり得る値の数だけθが存在することが分かる。したがって，nが一つだけ値を取り得る$(a\ ,\ b)$を求めることが必要なことが分かる。結局，$n=1$に対応するθのみが許されることになる。これに対応する$(a\ ,\ b)$が求める解ということになる。

<文系総評>

文系としては難しいと思われる問題が含まれている。難易度C，Bの問題は着実に正答したい。その上で，B＋，Aといった難しい問題に粘り強く取り組みたい。

$\boxed{1}$　(1)２次曲線，４次曲線の定積分の問題。題意は簡明で難易度はC。

(2)確率の問題。解答方針を着想する必要があり，文系問題として難易度はB＋。

$\boxed{2}$　理系$\boxed{2}$と同じ。立体図形の問題で題意は簡明であるが，文系問題としては難易度B。

$\boxed{3}$　理系$\boxed{3}$と同じ。題意は簡明であるが，計算に工夫を必要とし，文系問題としては，難易度はB。

$\boxed{4}$　(p)は理系$\boxed{5}$$(p)$と同じ。文系問題としては難易度はA。$(q)$は三角形の合同の条件に関する問題。この条件では合同にはならないことは中学数学で学んだことである。難易度はC。

$\boxed{5}$　容易なようで，正解に至る論理過程を着想することが難しい。文系問題としては難しいと思う。難易度はA。

120815