微分積分学入門
又は　古典解析入門

小柴　洋一

2008 年 6 月 2 日

De omunibus dubitandum

あらゆることについて疑え！

はじめに.

微分積分学を鹿児島大学の種々の講義題目の下で授業させていただいてきました。微分積分学は理科系の学生には大切な学問です。広い畑の中でいろいろ気がつくことも沢山ありました。やさしいからといって見過ごせない部分を沢山もっているというのが印象です。説明しているうちに何となく多弁になってページ数が増えてしまいました。今の普通の大学生１年生にはむつかしいけれどさりとて専門の解析学というほどではありません。この本を横に置いて何かの折に参考にしていただけたらと思う次第です。
なおこの本を徹底的にやれば古典解析をマスターしたことになることを保障します。

小柴　洋一　　　　2008 年 6 月 2 日 *1

*1 この日付が typeset した日付です. この原稿は日々推敲が重ねられておりこの日付がその時そのときの最終 version です.
数学としての内容，typeset の仕方等でもっと良くしたいと思っています。誤り，書式の不具合何でも知らせてくだされば有難いです。
koshiba@sci.kagoshima-u.ac.jp

目次

図目次

表目次

第 I 部

１変数の微積分

第 1 章

関数

微分積分学は原理的には関数 (functions) についての学問といえる．変数 x とともに変動する数 y を x の関数とよび $y = f(x)$（f は任意の文字）と表したのであった． Leibniz(1646-1716) が用い始めた用語[*1]である．Newton 力学での運動の現象が説明できる．物理学，さらに自然科学へ応用されている．

図 1.1　Leibniz さん，あなたは世界史の教科書では哲学者ということになっている．

[*1] ラテン語で functio とよんだ.

1.1　関数とそのグラフ

関数 $y = f(x)$ をいろいろな例を通して見てみよう．

$$y = \sin x, \qquad y = e^{-x^2}$$

の場合．次の図 (1.2) 自然現象でも波動，回転等に現れる大切な関数である．

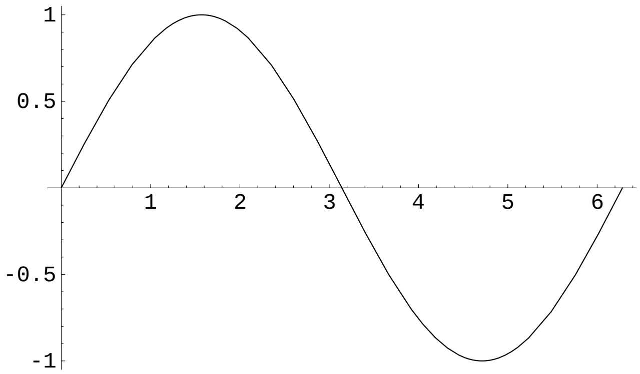

図 1.2　$y = \sin x$ のグラフ

次の図 (1.3)　確率論，統計学に現れる関数である*2．他にも種々な重要な関数

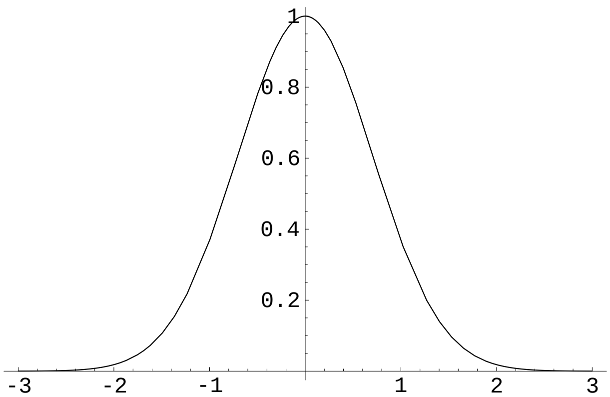

図 1.3　$y = e^{-x^2}$ のグラフ

がある．これから研究していこう．まず高校で習った数列のことから復習を兼ねて考えてみよう．

ここでちょっと高校の復習．

1. 二項定理
   $(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$
   $= a^n + na^{n-1}b + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$
   ここで ${}_nC_r$ は n 個から r 個とる組合せの数．　${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$．
2. ちなみに ${}_nP_r$ は n 個から r 個とる順列の個数である．
   ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$．
3. $n!$ は n の階乗で $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$．

問 1. 上記を確かめよ．

まずは次のことがすらすら解るようにしておいてください[*3]．

1.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0.$$
   ではあるが級数
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \cdots$$
   は発散する．
2. 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^{n-1}$ において，その和 S と第 n 部分和との差が $\frac{1}{1000}$ より小さくなる最小の整数 n を求めよ．
   ただし $\log_{10} 2 = 0.\ 3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ とする．
3. 極限値 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - a - \sin x}{\sin x}$ が存在するように，定数 a の値を定め，その極限値を求めよ．

---

*2 例 5.25,235 ページ参照

*3 ある高校数学 III 教科書からもってきたものです．

4.
$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}$$

1.2　数列と極限

1.2.1　実数のことを少し反省 $\cdots$

数列とは，1 番目は何，2 番目は何，3 番目は何，というように番号 n によって数が決められているものをいう．

数列の例

(1) 3,　3.1,　3.14,　3.141,　3.1415, $\cdots$
円周率 π の小数展開である．

(2) 0.9,　0.99,　0.999,　$\cdots$
1 に限りなく近づいている

(3) 1,　10,　100,　1000,　$\cdots$
限りなく大きくなる．

実数を要素とする集合について

a, b を $a < b$ である 2 つの実数とする．$a \leqq x \leqq b$ である実数 x の集合を，閉区間とよび $[a, b]$ と書く．すなわち記号で書けば $[a, b] = \{x|a \leqq x \leqq b\}$．よく似たものに開区間 (a, b) がある．これは $(a, b) = \{x|a < x < b\}$ と定義されている．
R を実数全体の集合としよう．R の部分集合 A[*4]の要素 m が A の最大 (数) であるとは，$a < m$ が m 以外の A の任意の要素 a に対して成り立つときにいう．A の要素が最小 (数) であることも同様に定義される．R の部分集合には，必ずしも 最大，最小が存在するとは限らない．集合 A の最大数，最小数を それぞれ $\max(A), \min(A)$ と書き表す．単なる実数の集合というのでは余

[*4] A の要素は全部相異なる

りに一般的過ぎる．区間を考えることが多い．端の点が含まれていたり含んでいなかったりしている場合に応じて $(a,b], [a,\infty), \cdots$ というのがある．これは各々 $\{a < x \leqq b\}, \{a \leqq x\}, \cdots$ の意味です.

例 1.1. $A = (0,1)$ とすると A には最大数も最小数も存在 しない.

コンピュータと実数

コンピュータでは実数というのはどのように取り扱われているのだろうか。
大体のところでいえば実数を小数点展開と見なしています。浮動小数点方式と呼ばれています。
32 ビットを 1 語とするコンピュータでは左端から 1 ビットを正負，7 ビットで巾を表現しています。後の 24 ビットで小数点部分を表現します。64 ビットを 1 語とする場合も同じです．したがって絶対値が小さ過ぎるとき，および絶対値が大き過ぎるときは誤差が発生します。アンダーフロー，オーバーフローの誤差といっています.
詳しくは情報科学の先生に聞いてね。

有界である集合

ある実数 b があって A の任意の要素 x について $x \leqq b$ であるとき，A は上に有界であるといい，実数 b を集合 A の上界という．上界になり得る実数で最小の上界を上限とよぶ．下に有界という言葉の定義も同様である．下界，下限も同様に定義される．次の内容を公理にしておこう.

公理　空でない，上に有界である実数の集合には必ず上限が存在する.

これを論理の根拠としてすべての事柄が証明，論証できる.
注意：空でない下に有界である実数の集合には必ず下限が存在する，をこの公

理から証明することが出来る．

実数 u が集合 A の上限であるとは次のようにもいえる．

1. u は A の上界である，すなわち A の任意の元 x について $u \geqq x$.
2. 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に応じて $u - \varepsilon < x_0$ である A の元 x_0 がある．

有界な関数，最大値，最小値

$f(x)$ を集合 A で定義された関数とする．その値の集合 $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$ が有界のとき，$f(x)$ は有界な関数であるという．また $f(A)$ の最大，最小を $f(x)$ の最大値，最小値という． $f(x)$ の最大値を次のようにあらわす． $\max f, \max_{x\in A} f(x), \max f(x)|x \in A$ また，最小値を次のようにあらわす． $\min f, \min_{x\in A} f(x), \min f(x)|x \in A$

1.2.2　数列のことを少し反省 $\cdots$

数列 $\{a_n\}$ において，n が限りなく大きくなっていくとき，a_n が限りなくある実数 a に近づいていくならば，$\{a_n\}$ は収束して極限値は a である，あるいは簡単に a_n は a に収束するという．そしてこのことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{あるいは}\ a_n \to a (n \to \infty)$$

と書く．場合によっては簡単に $a_n \to a$ と書くこともある[*5]．

収束しない数列は発散するという．

このことは今後の場面においてさらに詳しく述べられなくてはならない場合が多い．そのときには論理的により厳密に次のように表現される．

[*5] $\lim a_n = a$ とも書く．

> どんな（小さな）正数 ε をとっても，それに対応して適当に（十分大きな）自然数 n_0 をとれば，$n > n_0$ である n に対しては，つねに $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つ．

ということである．
数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するときは次のような表現になる．
どんな (大きな）正数 G をとっても，それに対応して適当に（十分大きな）自然数 n_0 をとれば，$n > n_0$ である n に対して，つねに $a_n > G$ が成り立つ．

$$a_n \to \infty (n \to \infty)$$

と書く．

問 2. 次の数列は収束するかどうか．

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n} \cdots$
(2) 数列 *(1)* の第 10^k 項 $k = 1, 2, \cdots$ を 0 で置き換え，その他の項はもとのままにした数列
(3) $2, 2^2, \cdots, 2^n, \cdots$
(4) a_n を $\sqrt{2}$ の小数点 n 位までとった近似値とするとき，数列 $\{a_n\}$

問 3. 問 *1* の数列について，次の問に答えよ．

1. 数列（*1*）は収束することを示し，$\varepsilon = 10^{-3}$ に対応する n_0 の値を求めよ．
2. 数列（*3*）は ∞ に発散することを示し，$G = 10^3$ に対応する n_0 の値を求めよ．ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ である．

例 1.2. $a_n \to \infty (n \to \infty)$ ならば，$\frac{1}{a_n} \to 0 (n \to \infty)$ であることを証明せよ．

証明. $\frac{1}{a_n} \to 0 (n \to \infty)$ を証明するには，任意の正数 ε に対応して，適当に n_0 をとれば，
(*)　　　$n > n_0$ である n に対して，つねに $|\frac{1}{a_n}| < \varepsilon$

が成り立つことを示せばよい．ところが，仮定から $\frac{1}{\varepsilon}$ に対応して，n_0 が定まって，$n > n_0$ である n に対して，　つねに $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$，したがって

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$$

となる．ゆえに，この n_0 をとれば，（ *）が成り立つことがわかる．　□

問 4. $\lim a_n = 0$ であるための必要十分条件は，$\lim |a_n| = 0$ であることを証明せよ．

次の定理は，数列が収束するかどうかを判定するのに，よくつかわれる重要な基礎定理である．

定理 1.1. 上に有界な単調増加数列，および下に有界な単調減少数列はつねに収束する．

証明．まず，単調増加数列の場合について考えよう．数列を $\{a_n\}$ とし

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \cdots \leqq M$$

とすれば，実数の公理（5 ページ）から $\{a_n\}$ には上限がある．その上限を l とすれば，定義 から

1. $a_n \leqq l \quad (n = 1, 2, \cdots)$
2. 任意の正数 ε に対して，$l - \varepsilon < a_{n_0}$ となる自然数 n_0 がある．

ところが，$n > n_0$ ならば，$a_n \geqq a_{n_0}$ であるから，

$$l - \varepsilon < a_n \leqq l$$

すなわち，$0 \leqq l - a_n < \varepsilon$ となる．したがって $n > n_0$ である n に対して，つねに $|a_n - l| < \varepsilon$ が成り立つ．これは $a_n \to l (n \to \infty)$ となることを示している．単調減少数列のときも証明は全く同じようにできる．　□

数列の極限について，よく知られた次の定理が成り立つ．

定理 1.2. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ であれば，

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
(2) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$　ただし c は定数
(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$　$(b_n \neq 0, b \neq 0)$

証明．まず (1),(3) を証明しよう．
仮定から，任意の正数 ε' に対応して，$n > n_1$ ならばつねに $|a_n - a| < \varepsilon'$ となる n_1 と，$n > n_2$ ならばつねに $|b_n - b| < \varepsilon'$ と なる n_2 とがある．
いま，n_1 と n_2 との大きい方を n_0 とすると，$n > n_0$ ならば $n > n_1, n > n_2$ であるから，次の式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &\leqq |a_n - a| + |b_n - b| \\
&< \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon' \\
|a_n b_n - ab| &\leqq |a_n - a||b_n - b| + |a||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&< \varepsilon'(\varepsilon' + |a| + |b|)
\end{aligned}
$$

そこで，任意の正数 ε が与えられたとき，(1) の場合には $0 < 2\varepsilon' < \varepsilon$ を，(3) の場合には $0 < \varepsilon' < 1, \varepsilon'(1 + a + b) < \varepsilon$ をみたす ε' をとり，この ε' に対応する上のような n_0 をとれば，$n > n_0$ である n に対しては

$$
\begin{aligned}
|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &< 2\varepsilon' < \varepsilon \\
|a_n b_n - ab| &< \varepsilon'(\varepsilon' + |a| + |b|) \\
&< \varepsilon'(1 + |a| + |b|) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，次の式が得られる．

$$a_n \pm b_n \to a \pm b \quad (n \to \infty)$$

$$a_n b_n \to ab \quad (n \to \infty)$$

(2) は (3) で $b_n = c (n = 1, 2, \cdots)$ とした特別の場合である (直接にも簡単に証明できる．各自で考えてみよ)
(4) を証明するため，まず $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ であることを証明しよう．仮定から $b_n \to b$ であるから，$0 < \varepsilon' < \frac{b}{2}$ をみたす任意の ε' をとると，これに対応

して n_0 が定まり，$n > n_0$ である n に対しては

$$|b - b_n| < \varepsilon' < \frac{|b|}{2}$$

が成り立つ．$|b_n| - |b| \leqq |b - b_n|$ であるから，上式から $|b| - |b_n| < \frac{|b|}{2}$ となり，$|b_n| > \frac{|b|}{2}$ となる．ゆえに，$n > n_0$ である n に対しては

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \frac{\varepsilon'}{\frac{|b|}{2}|b|} = \frac{2\varepsilon'}{|b|^2}$$

が成り立つ．そこで任意の正数 ε に対して，$\frac{2\varepsilon'}{|b|^2} < \varepsilon, 0 < \varepsilon' < \frac{|b|}{2}$ をみたす ε をとり，これに対応する n_0 をとれば，$n > n_0$ である n に対しては，上式 から

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| < \frac{2\varepsilon'}{|b|^2} < \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}(n \to \infty)$ を表している．　この結果を (3) と組み合わせると

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n\frac{1}{b_n} \to a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}(n \to \infty)$$

が得られる．これが (4) である．　□

注意　この定理で a や b が $\pm\infty$ になる場合には，$\infty + \infty = \infty, a \pm \infty = \pm\infty, \infty \cdot \infty = \infty, \frac{a}{\infty} = 0$ （ただし a は有限な実数）などと考えると定理はやはり成り立つ．しかし $\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$ などの形になるときには，収束することもあり，発散することもある．

例 1.3. a を正の定数とするとき，$\lim_{n\to\infty} a^n$ を求めよ．

証明．　(1) $a > 1$ のとき，$a = 1 + h$ とおくと $h > 0$ であるから，問 3(3) によって

$$a^n = (1 + h)^n > 1 + nh \to \infty \quad (n \to \infty)$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ である．

(2) a=1 のとき，$\lim_{n\to\infty} a^n = 1$.

(3) $0 < \mathrm{a} < 1$ のとき，$b = \frac{1}{a}$ とおく．$b > 1$ である．$n \to \infty$ のとき 1 によって，$b^n \to \infty$ 故に $a^n = \frac{1}{b^n} \to 0$.

□

問 5. 次の極限値を計算せよ.

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (2) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$ (3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$
(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n-1}{3n^2-4n+6}$ (5) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (6) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n}, x \neq -1$

例 1.4. $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ とする．

(1) $a_n \geqq b_n (n = 1, 2, \cdots)$ ならば $a \geqq b$ である．

(2) 数列 $\{c_n\}$ があって $a_n \geqq c_n \geqq b_n (n = 1, 2, \cdots)$ で $a = b$ ならば $\lim c_n = a$ である．

証明. （1）$a < b$ として矛盾を示そう（背理法).
仮定から，任意の正数 ε をとると，自然数 n_0 が定まり，$n > n_0$ である n にたいしては

$$|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon$$

ここで $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ とすれば $n > n_0$ である任意の n については

$$a_n < \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} < b_n$$

となる．ところが $a_n \geqq b_n$ であるから 矛盾.
(2) いまの場合 $a = b, a_n \leqq c_n \leqq b_n$ であるから, (1.1) より $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$, すなわち, $|c_n - a| < \varepsilon$ が成り立つ．これは $c_n \to a (n \to \infty)$ を表している．

□

問 6. 上の例で任意の n について $a_n > b_n$ であっても $a > b$ とは限らない．$a = b$ のときもある．例を示せ.

例 1.5. 数列 $\{a_n\}$，$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ とする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

証明．任意に $\varepsilon > 0$ を与える．番号 n_0 があって $n \geqq n_0$ では $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ となっている．

$b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ とおくと次の不等式がある．

$$|b_n - A| \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|a_k - A| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|a_k - A|.$$

右辺の第2項は $\frac{\varepsilon}{2}$ より小さい．$|a_k - A|(k = 1, 2, \cdots, n_0 - 1)$ の中で最大値を M とすると，右辺の第1項は $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|a_k - A| \leqq \frac{(n_0-1)M}{n}$.

$\frac{(n_0-1)M}{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}$ である番号 n_1 をとる．

$n_2 = \max(n_0, n_1)$ とおくと $n \geqq n_2$ である任意の n については $|b_n - A| < \varepsilon$ である．□

例 1.6. $a > 0, x_1 > \sqrt{a}$ であるとき

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

とすると，数列 $\{x_n\}$ は収束し，その極限値は，$\sqrt{a}$ になることを証明せよ．

証明．2つの正数の相加平均と相乗平均の大小関係から，

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geqq \sqrt{a}$$

したがって，数列 $\{x_n\}$ は下に有界である．

$$x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{a}{x_n}) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

であって，$x_n > \sqrt{a}$ であるから，

$$x_n > x_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる．すなわち，$\{x_n\}$ は単調減少数列である．

ゆえに定理1.1から, $\{x_n\}$ は収束する．その極限値を α とすると, $\alpha \geqq \sqrt{a}$ である．そこで,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

において，$n \to \infty$ とすると，定理 1.2 から，

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right)$$

となる．これから直ちに $\alpha = \sqrt{a}$ が得られる．

この結果はコンピュ-タの計算で平方根を求めるのによく使われるものである． □

1.2.3　定数 e

対数関数 $y = \log_a x \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$ を見る．この導関数を後に考えるがその前に計算として次の式がある．

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a \left\{ \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right\}.$$

$\Delta x > 0$ として $X = \frac{x}{\Delta x}$ とおくと
$X \to +\infty$ のとき式 $(1 + \frac{1}{X})^X$ の極限を考えることになる．
この事に示唆されて次の数列を考えよう．

定理 1.3. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ とおくと数列 $\{a_n\}$ について次の 2 つが成り立つ．任意の n について

(1) $a_n < a_{n+1}$　すなわち数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列である．

(2) $a_n < 3$　$\{a_n\}$ は有界である

証明. $(1+\frac{1}{n})^n$ を二項定理を使って展開すると，

$$a_n = 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\left(\frac{1}{n}\right)^r+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

右辺の式の形で n にそっくり $n+1$ を代入し各項別に大小を比較することから解るように（おまけに項の個数が最終項のところで1個増える）$a_n < a_{n+1}$ である．

また，a_n の展開式から

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \tag{1.1}$$
$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \tag{1.2}$$
$$< 1+1+1 = 3$$

ゆえに $\{a_n\}$ は3を上界にもつ有界数列である． □

したがって定理 1.1 から $\{a_n\}$ は（なにかある実数に）収束する．即ち，$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ が存在する．

この極限値を e で表わす．e は[*6] 無理数で，円周率と 同様重要な定数である．その値は $e = 2.71828\cdots$ となるのだが，その求め方は第2章でのべる．

問 7. $2 < e < 3$ を示せ（等号がはいらないこと，$e \leqq 3$ でないことに注意）．

[*6]

この数 e とは何物だろうか？我々の小学校以来の数概念からはみ出ているものである．有理数ではないことが知られている．”知られている” と言われてもピンと来ない人もいるだろうと思う．論証を含んだ説明をしだすと大学1年生には殆どキリがない．

1.2.4　数列の極限例

例 1.7. a を定数とするとき $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

証明. $n_0 = [2a] + 1$ とおくと，$n > n_0$ のとき $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}$ である．
$n > n_0$ のとき不等式 $\frac{a^n}{n!} < \frac{a_1}{1} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{n_0}}{n_0} (\frac{1}{2})^{n-n_0}$ が成り立っている．例 1.3 より $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$. 故に結論を得る． □

例 1.8. $a > 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ であることを示せ.

証明.　(1) $a = 1$ のときは明らかである.

(2) $a > 1$ のとき，$a = 1 + h$ とおくと，$h > 0$ であるから，2 項定理より
不等式 $\sqrt[n]{1+h} \leqq 1 + \frac{h}{n}$ が成り立っている．
$1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{h}{n}$ より従う．

(3) $0 < a < 1$ のとき，$b = \frac{1}{a}$ とおくと，$b > 1$ であるから，(2) によって $\sqrt[n]{a} \to 1$ である．ゆえに，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

□

問 8. 数列 $\{a_n\}$　$a_n > 0$ について $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ である.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，その項の 1 部分を抜き出し，もとのままの順序にならべてできる数列 $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列という.

収束の定義からすぐに，次の定理が得られる (各自で証明せよ).

定理 1.4. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき, その部分列はすべて a に収束する.

問 9. 数列 $\{a_n\}$ において部分列 $\{a_{2n}\}, \{a_{2n-1}\}, \{a_{3n}\}$ がそれぞれ α, β, γ に収束するならば，$\alpha = \beta = \gamma$ であって $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることを証明せよ.
ヒント:数列 $\{a_{6n}\}$ は $\{a_{2n}\}$ の部分列，数列 $\{a_{6n-3}\}$ は $\{a_{2n-1}\}$ の部分列.

数列 $\{a_n\}$ が収束するとき，$\{a_n\}$ は有界であるが，逆は必ずしも成り立た

ない．たとえば $a_n = (-1)^n$ とすれば $\{a_n\}$ は有界であるが収束しない．
しかし有界数列に対しては，次の重要な定理がなりたつ．この定理は簡明な内容ではあるが無限集合，閉区間，実数というものの有り様を語っていて含蓄の深さを思わせるものがある．

定理 1.5 (Weierstrass の補助定理)．任意の有界な数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ にはつねに収束する部分列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ がある．

証明. $a \leqq x_n \leqq b(n = 1, 2, \cdots)$ とする．区間 $I = [a, b]$ を 2 等分すると，分けられた 2 つの閉区間のうち少なくとも一方は $\{x_n\}$ の点を無限に含んでい る．それを $I_1 = [a_1, b_1]$ とする．もし両方とも $\{x_n\}$ の点を無限に含んでいれば 左の方の区間を I_1 とする．以下この手続きを繰り返して, 順次 $I_2 = [a_2, b_2], I_3 = [a_3, b_3], \cdots$ をつくる．
区間のつくり方から，$a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n(n = 1, 2, \cdots)$ となるので，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は有界な単調数列になる．ゆえにこれらは定理 1.1 から収束する．その 極限値をそれぞれ α, β とすると，例 (1.4) から $\alpha \leqq \beta$ であって，

$$0 \leqq \beta - \alpha \leqq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}(n = 1, 2, \cdots)$$

となることがわかる．上の式はどんな大きな n に対しても成り立つから，$\alpha = \beta$ でなければならない．

次に，この α に収束する部分列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ をつくろう． それには，まず I_1 に属する $\{x_n\}$ の点のうち，最初の番号のものを x_{n_1} と する．次に I_2 に属する $\{x_n\}$ の点のうちで，x_{n_1} より大きい最初の番号のも のを x_{n_2} とする．以下この手続きを次々に続けていくと，$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ という部 分列ができる．このとき，$a_i \leqq x_{n_i} \leqq b_i$ で，$a_i \to \alpha, b_i \to \alpha$ であるから，例 1.4 によって $x_{n_i} \to \alpha \quad (i \to \infty)$ となり，$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ が求める 1 つの部分列になる． □

次の定理は数列の収束・発散を判定するのによくつかわれる重要な定理 である (極限値が用いられていない点に着目).

定理 1.6 (Cauchy の定理)．数列 $\{x_n\}$ が収束するための必要十分条件は，任

意の正数 ε に対して,

$$m, n > n_0 \quad \text{ならばつねに} \ |x_m - x_n| < \varepsilon \tag{1.3}$$

であるような自然数 n_0 が定まることである *(*この条件をみたす数列を基本列または *Cauchy* 列という)

証明. 必要性：$x_n \to x$ とすれば，任意の正数 ε に対して,

$$n > n_0 \quad \text{ならばつねに} \ |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

であるような n_0 が定まる．ゆえに $m, n > n_0$ である m, n に対しては $|x_m - x_n| \leqq |x_m - x| + |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ が成り立つ

十分性：まず，基本列 $\{x_n\}$ は有界であることを示そう．$\varepsilon = 1$ をとると，仮定からこれに対して自然数 n_1 が定まり，式 (1.3) が成り立つから，$n = n_1 + 1$ とすれば，$m > n_1$ である m に対して $|x_m - x_{n+1}| < 1$ となる．したがって $x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}, x_{n_1+1} - 1, x_{n_1+1} + 1$ のうち最小な数を a，最大の数を b とすれば，すべての n に対して $a \leqq x_n \leqq b$ が成り立つ．すなわち $\{x_n\}$ は有界である.

ゆえに，Weierstrass の 補助定理から収束する部分列 $\{x_{n_i}\}$ がある．その極限値を x とする．このとき，$x_n \to x (n \to \infty)$ であることを証明しよう．仮定と $x_{n_i} \to x$ とから，任意の正数 ε に対して,

$m, n > m_0$ ならば $|x_m - x_n| < \varepsilon$,

$n_i > m_0$ ならば $|x_{n_i} - x| < \varepsilon$

となるような自然数 m_0 が定まってくる．ゆえに $m > m_0$ である任意の m に対して,

$$|x_m - x| \leqq |x_m - x_{n_i}| + |x_{n_i} - x| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

ε は任意であるから，これは $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であることを示している．　□

例 1.9. 関数 $f(x)$ が閉区間 I で定義されていて，その値域は I に含まれ，I に属する任意の *2* 点 x', x'' に対してつねに,

$$|f(x') - f(x'')| \leqq k|x' - x''| \qquad (0 \leqq k < 1)$$

が成り立っているとする．

このとき，I の任意の点 x_0 から出発して

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

によって数列 $\{x_n\}$ をつくると，これは収束して，その極限値 ξ は方程式 $x = f(x)$ のただ 1 つの解になる．これを証明せよ．

証明.

$$|x_2 - x_1| = |f(x_1) - f(x_0)| \leqq k|x_1 - x_0|$$

$$|x_3 - x_2| = |f(x_2) - f(x_1)| \leqq k|x_2 - x_1| \leqq k^2|x_1 - x_0|$$

一般に

$$|x_{n+1} - x_n| \leqq k^n|x_1 - x_0| \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる．したがって，$n < m$ とすると $0 \leqq k < 1$ から

$$|x_n - x_m| \leqq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m|$$

$$\leqq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1})|x_1 - x_0|$$

$$\leqq \frac{k^n}{1-k}(x_1 - x_0)$$

が成り立つ．ところが，$k^n \to 0 (n \to \infty)$ であるから，$\{x_n\}$ は基本列になる．したがって $\{x_n\}$ は収束し，$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ が存在する．

$$|\xi - f(\xi)| \leqq |\xi - x_{n+1}| + |f(x_n) - f(\xi)|$$

$$\leqq |\xi - x_{n+1}| + k|x_n - \xi|$$

であるが，$x_n \to \xi$ から右辺は n を増すといくらでも小さくなる．ゆえに $\xi = f(\xi)$ で なければならない．すなわち，ξ は方程式 $x = f(x)$ の解である．この方程式の解が上の ξ 以外にあったとし，それを η としよう．このとき，

$$|\xi - \eta| = |f(\xi) - f(\eta)| \leqq k|\xi - \eta|$$

であるから，

$$(1-k)|\xi-\eta| \leqq 0$$

となる．ところが $1-k>0$ であるから $\eta=\xi$ でなければならない．ゆえに，$x=f(x)$ の解は ξ だけである． □

ξ は x_n の極限値であるから，I の任意の x_0 から出発して，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を順次求め ていけば，適当に大きな n をとると x_n は $x=f(x)$ の解の近似値を与えることになる．このようにして方程式の近似解を求める方法を反復法という．これは同じ形の計算を 繰り返すので，コンピュ-タで計算する場合に特に便利である．そのため実際に極めて 多く使われている方法である．

問 10. $x_0=0$ から出発し反復法で，次の方程式の解を小数第 3 位まで求めよ．

$$x=0.3(x-\frac{x^2}{6})+0.1$$

1.3　関数の極限値

1.3.1　有界性と単調性

関数 $f(x)$ が区間 I を定義域にしているとする。I の任意の点 x について

$$f(x)<M \quad (\text{又は } f(x)>m))$$

がつねに成りたつような定数 M(又は m) があるとき，すなわち値域 $f(I)$ が上 (又は下）に有界な集合であるとき，$f(x)$ は I で上（又は下）に有界であるといい，M を $f(x)$ の上界，m を下界という．上下に有界な関数を単に I で有界関数という．

定義域 I で内の 2 数 x_1, x_2 に対して，$x_1<x_2$ ならば，つねに $f(x_1) \leqq f(x_2)$ であるとき，$f(x)$ を I で単調増加関数，つねに $f(x_1) \geqq f(x_2)$ であるとき，$f(x)$ を I で単調減少関数といい，この 2 つを総称して I で単調関数という．

特に $x_1 < x_2$ であるならば，つねに $f(x_1) < f(x_2)$ であるとき，$f(x)$ を I で狭義の単調増加関数，つねに $f(x_1) > f(x_2)$ であるとき，$f(x)$ を I で狭義の単調減少関数という．

注意 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界数列または単調数列であるということは，この数列を関数とみなしたとき，上の意味で有界または単調になることである．例えば，$a_n < a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$ であるとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は増加数列である．

問 11. 次の関数および数列の有界性，単調性について調べよ．

1. $y = ax + b$　　*2.* $y = x^2$　　*3.* $y = -x^3$

4. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$　　*5.* $y = \sin x$　　*6.* $y = \tan x$

7. $\{2^n + 2^{-n}\}$　　*8.* $\{\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n}\}$

1.3.2　連続変数の関数の極限

変数 x が関数 $f(x)$ の定義域内で，$x = x_0$ 以外の値から限りなく x_0 に近づいてい くとき，$f(x)$ の値が一定の数 α に限りなく近づくような場合に，関数 $f(x)$ には，極限が存在して，その極限値は α であるという．そしてこの事を簡単に

$$x \to x_0 \text{のとき} \quad f(x) \to \alpha$$

または

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$$

などで表す．さらに簡単に $f(x) \to \alpha \quad (x \to x_0)$ とも書く．

例 1.10.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \text{ のとき} \\ 10 & x = 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ である．いいかえると，このときは x がどのように 2 に近づいても，関数値はいつも 4 に近づいていく．

ところが，x_0 への近づき方によって極限値が変わる場合がある．この ような時には，その近づき方を指定する必要がある．
x が x_0 より大きい (小さい) 値を取りながら限りなく x_0 に近づくときに，$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を $f(x)$ の $x = x_0$ における右 (左）の極限値といって，それを $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$(または $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$) で表す．とく に $x_0 = 0$ のときには，右，左の極限値を簡単にそれぞれ $\lim_{+0} f(x)$(または$\lim_{-0} f(x)$) と書く．

例 1.11.

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x \geqq \text{のとき} \\ -1 & x < 0\,\text{のとき} \end{cases}$$

証明.

$$\lim_{x\to+0} f(x) = 1, \lim_{x\to-0} f(x) = -1$$

しかしこのときは，$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない． □

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ が存在するのは左右の極限値が存在してそれらが一致するときである．
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ は，$x \neq x_0$ で $|x - x_0|$ を十分小さくとれば $|f(x) - \alpha|$ はいく らでも小さくできるということである．すなわち，どんな (小さい) 正数 ε に 対しても，

$$0 < |x - x_0| < \delta\,\text{ならば}\,|f(x) - \alpha| < \varepsilon \tag{1.4}$$

となるような正数 δ をとることができるということである[*7]．
$\lim_{x\to\infty} f(x)$ についても同様な述べ方がある[*8]．

問 12. 次の関数に対して，$x_0 = 0$ のとき，$\varepsilon = 10^{-4}$ に対して，δ をいくらにとれば 式 *(1.4)* が成り立つか.
$f(x) = 3x - 2$

[*7] この論法を $\varepsilon - \delta$ 論法と言うことがある
[*8] 詳述は略

x が x_0 以外の値から x_0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が正で（または負でその絶対値が）限りなく大きくなるとき，この事を $x \to x_0$ のとき $f(x) \to \infty (f(x) \to -\infty)$ あるいは

$$\lim f(x) = \infty \quad (\lim f(x) = -\infty)$$

とかき，関数 $f(x)$ の極限は正の（負の）無限大であるという．

次の定理も一応，述べておこう．

定理 1.7. $\lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B$ とする．

1. $\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = A \pm B$ （複合同順），
2. $\lim_{x \to a} \{f(x)g(x)\} = AB$,
3. 更に $B \neq 0$ のとき $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$,

問 13. 定理 *1.7* を論証せよ．[*9]

例 1.12. 多項式 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ とするとき $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ である．なぜならば自明な極限式 $\lim_{x \to a} x = a$ と定理 *1.7* から解る．例えば $\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} x \lim_{x \to a} x, \ldots$.

したがって有理関数 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, P(x), Q(x)$ は多項式，の場合も $Q(a) \neq 0$ であれば $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ である．

関数の連続性

関数 $f(x)$ が点 $x = a$ を含むある開区間を定義域にしているとする．

<u>定義</u>

次の式が成り立っているとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという．

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

関数 $f(x)$ がその定義域の各点で連続であるとき，$f(x)$ を単に連続関数とよぶ．より一般に論理的に言えば，関数 $f(x)$ と実数のある集合 M があって M

[*9] 初学者は読み飛ばしてよい．

の各点で $f(x)$ が連続のとき $f(x)$ は M で連続である等という．
もっともこの本では M は殆どの場合区間である．例えば $[a,b],(a,b),[a,\infty)\cdots etc.$

例 1.13. 多項式関数 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，指数関数 a^x，$\log x(x>0),\sin x,\cos x$ は全て連続関数である．およびこれらから出来る合成関数もまた連続関数である．

例 1.14. 例 *1.10* において $x=2$ で連続でない．もちろん他の点では連続.
例 *1.11* において $x=0$ で連続でない．もちろん他の点では連続.

次の定理は関数のグラフを描きながら想像すると極めて当たり前のことを云っているに過ぎないことが解るであろう．後で応用することもあります.

定理 1.8. *(1)* 関数 $f(x)$ が開区間 (a,b) で単調増加であって上に有界であるとする．$x\to b-0$ のとき $f(x)$ はある有限な値に収束する．b を無限大 ∞ としてもこの命題は成り立つ.
同様にして次のことも成り立つ.
(2) 関数 $f(x)$ が開区間 (a,b) で単調減少であって下に有界であるとする．
$x\to a+0$ のとき $f(x)$ はある有限な値に収束する．a を無限大 $-\infty$ としてもこの命題は成り立つ.

証明. (1) を証明する．集合 $f((a,b))$ は上に有界な集合で有限である上限 A がある．$\lim_{x\to b-0}f(x)=A$(左極限値) である．任意に正数 ε をとってくると，$A-\varepsilon<f(x_0)\leqq A$ なる $x_0\in(a,b)$ がある．$\delta=b-x_0$ とする．$b-x_0<x<b$ である x については $|f(x)-A|<\varepsilon$ となっている．すなわち，$\lim_{x\to b-0}f(x)=A$.(2) も同様である． □

注意 1. の場合，更に $f(x)$ が $x=b$ で連続のとき値 $f(b)$ に収束している．
2．についても同様に $f(x)$ が $x=a$ で連続のとき値 $f(a)$ に収束している.

1.4　中間値の定理および最大値・最小値の存在定理

この 2 つの定理は高校教科書では単に述べられてはいるが証明の記述はない．証明を与えてみよう．

1.4.1　中間値の定理

定理 1.9 (中間値の定理)**.** 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続，$f(a) < 0 < f(b)$ とする. このとき $f(c) = 0$ である，開区間 (a,b) の点 c が存在する.

証明. $f(x) < 0$ である $x \in (a,b)$ の全体からなる集合 M は上に有界であるからその上限を c とすればこれが定理の主張の c である.

すなわち $f(c) = 0$ である.

それを背理法で以下に示す.$f(c) \neq 0$ とする.

§1.2.1[*10]（6 ページ）にもある上限の性質を良く見返しておこう.

$x = c$ で連続であるから，任意の正数 ε を特に $\varepsilon = |\frac{f(c)}{2}|$ とすると c のある近傍 $c - \delta < x < c + \delta$ で不等式

$$f(c) - \frac{|f(c)|}{2} < f(x) < f(c) + \frac{|f(c)|}{2} \tag{1.5}$$

が成り立っている.

$f(c) > 0$ とすると，式 (1.5) は $0 < \frac{f(c)}{2} < f(x) < \frac{3f(c)}{2}$ であるから $c - \delta < x < c$ である任意の x は $f(x) > 0$ となり c が集合 M の上限であることに反する.

$f(c) < 0$ とすると，式 (1.5) は $\frac{3f(c)}{2} < f(x) < \frac{f(c)}{2} < 0$ であるから $c < x < c + \delta$ である任意の x は $f(x) < 0$ となり同じように c が集合 M の上界であることに反する.

故に $f(c) = 0$ でなければならない. □

問 14. 方程式 $\sin x = x - 1$ は閉区間 $[0,\pi]$ に解をもつことを確かめよ.

[*10] 記号 § は節・章・小節を表す. 例えば §1.2.1 は 1 節 2 章 1 小節を表す. 以下でも同様.

例 1.15. この定理はコンピュータで方程式の解を求める原理になっています. 以下は $x^2-2=0$ の解を求めるプログラム[*11].

```
f[x_]:=x^2-2
((*2 分法*)
  seido= 10;
  a=1.;b=2.;
  Label[kos];
  c=N[(a+b)/2,seido];
  If[f[c]==0,Return[c]]
     If[f[c]>0,b=c,a=c]
    If[N[b-a,seido]<10^(-5),Return[a],Goto[kos]])
```

実行すると $\sqrt{2}$ の近似値が

$$1.41421$$

と出力される.

1.4.2　最大値・最小値の存在定理

連続関数が定義域でとる関数の値の最大値，最小値の存在を考えてみよう. まず例から.

例 1.16. *(1)* 閉区間 $[0,3]$ において関数 $y=x^2-2x+2$ は最小値 *1*, 最大値 *5* をもつ.

(2) 開区間 $(0,1)$ において関数 $y=x$ は値域 $0<y<1$ で上限は *1* である. 上限 *1* を関数値として取らないため $(0,1)$ における最大値は存在しない. 下限，最小値についても同様.

(3) 開区間 $(0,1)$ において関数 $y=\frac{1}{x}$ は上に有界でない. 最大値は存在しない.

[*11] Mathematica とよばれる言語ソフト

定義域が閉区間のときは次の定理がある.

定理 1.10 (最大値・最小値の存在定理)**.** 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続とする. このとき $f(x)$ の 閉区間 $[a,b]$ での最大値 $M = f(c_1)$, 最小値 $m = f(c_2)$　$a \leqq c_i \leqq b(i=1,2)$ が存在する.

証明. まず $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で上に有界であることを以下に示そう（下に有界も同様）.
$f(x)$ が上に有界でなかったとしよう（背理法）.
次の数列 $\{a_n\}$ が存在することになる.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty, a \leqq a_n \leqq b$$

Weierstrass の補助定理すなわち定理 1.5 から収束する部分列 $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ がとれる.

$\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = c, a \leqq c \leqq b.$　$\lim_{i\to\infty} f(a_{n_i}) = \infty$ であるからこれは $x = c$ での連続性の式 $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ に反している.
というわけで集合 $f([a,b])$ は有界である数の集合である.
値域 $f([a,b])$ に上限 M, 下限 m をみるとこれらが $M = f(c_1), m = f(c_2)$ と関数値としてとられていることが $f(x)$ の閉区間 $[a,b]$ での連続性からわかる.
より詳しくいえば, 次の数列 $\{a_n\}$ が存在することになる.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = M, a \leqq a_n \leqq b$$

同じく Weierstrass の補助定理から収束する部分列 $\{a_{n_i}\}$ がとれる.$c_1 = \lim_{i\to\infty} a_{n_i}$ とすると $f(x)$ の $x = c_1$ での連続性から $M = f(c_1)$ となる. 最小値 m についても同様. □

問 15. 定理 *1.10* で $m \leqq r \leqq M$ である任意の実数 r について $f(c) = r$ である c が閉区間 $a \leqq c \leqq b$ 内に存在する.

1.5　関数の極限の例

定理 1.11.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

証明. x が 1 より大きいとき，$n \leqq x < n+1$ である自然数 n [*12]をとると，$1+\frac{1}{1+n} < 1+\frac{1}{x} \leqq 1+\frac{1}{n}$ であるから指数関数の単調性によって，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

である. ここで $x\to\infty$ とすると $n\to\infty$ であるから定理 1.3 より

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e$$

であるから $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ である.
次に $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ を示そう.
　$x = -x'$ とおけば,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x'-1}\right)^{x'-1}\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)$$

という式の変形がある. $x\to-\infty$ のとき，$x'\to+\infty$ であって，すなわち $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ である. □

定理 1.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

[*12] このような n を $[x]$ と書くときもある. ガウス記号

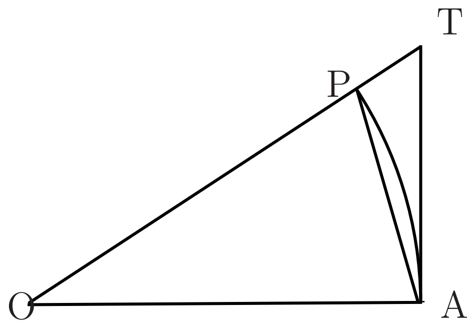

図 1.4　$\sin x < x < \tan x$

証明. $t = \frac{1}{e^x - 1}$ とおく. $\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{1}{\log\{(1+\frac{1}{t})^t\}}$
$x \to 0$ のとき $t \to \pm\infty$ だから定理 1.11 により結果を得る. □

系 1.12.1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$$

1.5.1　三角関数と極限

関数の極限値については，数列の極限値と同様に，さらに次の関係がある.
関数 $f(x)$,$g(x)$,$h(x)$ において，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$,$\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ のとき，

(1) 点 a の近傍で x に対してつねに $f(x) \leqq g(x)$ ならば，$\alpha \leqq \beta$.
(2) 点 a の近傍で x に対してつねに $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば $\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$.

上の性質を用いて，次の関係を導くことができる.

定理 1.13.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

証明. 図 1.4 を見る.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき，半径 r の円 O の周上に 1 点 D を定め，次に $\angle AOP = x$ となるように周上の点 P をとる.A における円 O の接線と半直線 OP の交点を T とすれば，$\triangle OAP$，扇形 OAP，$\triangle OAT$ の面積の間に次の関係がある.

$$\triangle OAP < \text{扇形}\, OAP < \triangle OAT$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot x < \frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot \tan x$$

$\sin x > 0$ であるから，逆数をとり整理して

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のとき, $\frac{\pi}{2} > -x > 0$ であるから, (1) により $1 > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x)$ すなはち $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ となり，この場合にも (1) と同じ不等式がなりたつ. ここで，$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ であるから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

□

この結果から，次のこともわかる.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 1$$

1.6　逆関数

1.6.1　一般論

普通，関数の定義域，値域は殆んどの場合，省略される. しかし逆関数のことを語り始めるときは関数の定義域，値域を明示しなければならない.
関数 $y = f(x)$ の定義域を D，値域を R とすれば，D のおのおのの要素 x に対して，$y = f(x)$ により R の要素 y が一つずつ対応する.

関数 $y = f(x)$ において，値域 R にふくまれる y のおのおのの値に対して,$y = f(x)$ をみたす x の値が D の中に一つずつ定まるならば，これを $x = g(y)$ とおくと，R を定義域とする関数 $x = g(y)$ が定まり，その値域は D である．

このようにして定まる関数 $g(y)$ を $f(x)$ の 逆関数といい，$x = f^{-1}(y)$ で表す．たとえば，関数

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

において，$y = \dfrac{x}{x+1}$ とおき，これを x について解くと，

$$x = \frac{-y}{y-1} \tag{1.6}$$

式 (1.6) によって，y のおのおのの値に対して x の値が一つずつ定まるから，$f(x)$ の逆関数は

$$f^{-1}(y) = \frac{-y}{y-1}$$

と表される．関数を表すとき，普通は変数 x の関数 y という形にするので，そのように表せば，$f(x)$ の逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{-x}{x-1} \text{ または } y = \frac{-x}{x-1}$$

となる．

このように，$y = f(x)$ の逆関数を $y = f^{-1}(x)$ の形で求めるには，
$y = f(x)$ を x について解いたものを $x = f^{-1}(y)$ とおき，文字 x と y を入れかえて $y = f^{-1}(x)$ とすればよい．
関数 $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ とについて，次の関係がある．

1. $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

2. 定義域と値域が入れかわる．

指数関数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ と対数関数 $y = \log_a x$ とは，互いに逆関数である．

問 16. 次の逆関数を求めよ．また，逆関数の定義域と値域を答えよ．

(1) $y = 2x + 5$ *(*$-1 \leqq x \leqq 2$*)* *(2)* $y = \frac{x+1}{x-1}$ *(3)* $y = x^2 - 1$ *(*$x \geqq 0$*)*

次に，関数 $y = f(x)$ とその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの関係について考えてみよう．

点 (a, b) が関数 $y = f(x)$ のグラフ上にあるとすると，逆関数の性質から

$$b = f(a) \Longleftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

ゆえに， 点 (a, b) が $y = f(x)$ のグラフ上にあることと点 (b, a) が $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上にあることは同値である．
また，点 (a, b) と，点 (b, a) は直線 $y = x$ に関して対称である．
したがって，関数 $y = f(x)$ のグラフとその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称である．

問 17. 次の関数の逆関数を求め，そのグラフをかけ．

1. $y = 2x^2$（$x \geqq 0$） *2.* $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ （$x \leqq 0$）
3. $y = \sqrt{-x}$

問 18. 関数 $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ に対して $f^{-1}(f(x)), f(f^{-1}(x))$ を求めよ．

問 19. 次の関数の逆関数求め，そのグラフをかけ．

1. $y = -\frac{1}{2}x^2 \quad (x \leqq 0)$ *2.* $y = 3x^2 - 3 \quad (x \geqq 0)$
3. $y = \frac{3x-5}{x-2}$ *4.* $y = \sqrt{x+6}$

問 20. a, b, c が定数で $a^2 + bc \neq 0$ のとき，関数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ について，$f^{-1}(x) = f(x)$ となることを示せ．

$y = f(x)$ が連続関数であれば逆関数 $y = f^{-1}(x)$ もまた連続関数である.

1.6.2　指数関数と対数関数

指数関数

$a > 0, a \neq 1$ のとき指数関数 a^x は, $(-\infty, \infty)$ において 連続な関数である. 指数関数 a^x は $a > 1$ なら 単調増加であり, $0 < a < 1$ なら単調減少である.

対数関数

$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ は逆関数をもつ. この逆関数を $x = \log_a y$ と書き, a を底とする対数関数という. 上記の指数関数の値域は $(0, \infty)$ であるので対数関数は $(0, \infty)$ で定義される連続関数 である.$y = \log_a x$ は $a > 1$ なら単調増加, $0 < a < 1$ なら単調減少である. 底として, 特に e をとった場合には $\log_e x$ のかわりに $\log x$ とかき, この値を x の自然対数と言う.

例 1.17. 次の図 *(1.5)* は関数 $y = 2^x$ のグラフである.x 軸の区間 $(0, 1)$ を *12mm*, y 軸の区間 $(0, 30)$ を *5cm* にとってある.

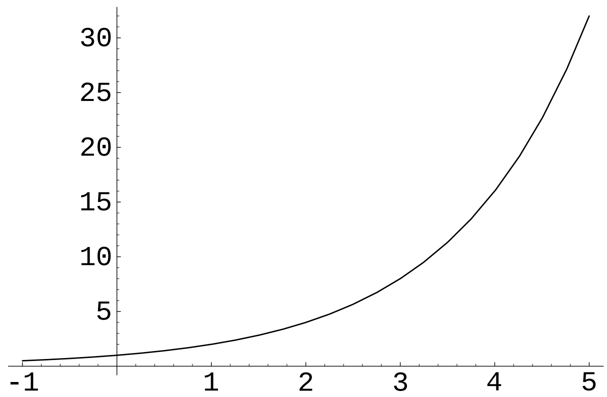

図 1.5　$y = 2^x$ のグラフ

鹿児島市と福岡市の距離 $391.6km = 3.19 \times 10^8 mm = 2^{24}$,

地球と月の距離 $384400km = 3.84 \times 10^{11}mm = 2^{34}$. *13
この距離の数から見て関数 $y = 2^x$ が $x \to \infty$ のとき我々の日常感覚からして如何に速いスピードで増加してゆくかを物語っている.
例 *2.22 (54 ページ)* もまた参照.

1.6.3　逆三角関数

三角関数 $\sin x, \cos x, \tan x$ の逆関数を調べる.*14図 1.6　図 1.7　図 1.8　参照.

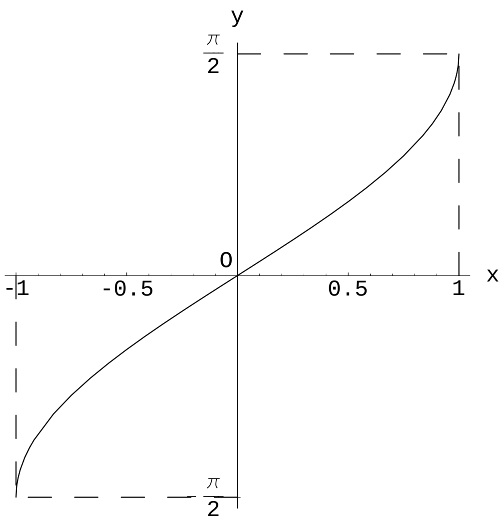

図 1.6　$y = \arcsin x$ のグラフ

$\sin x$ は閉区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で単調増加，$\cos x$ は閉区間 $[0, \pi]$ で単調減少，　$\tan x$ は開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で単調増加である.
よって $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ をこの範囲に制限すると逆関数をもつ.
これらの逆関数をそれぞれ

$$x = \arcsin y, x = \arccos y, x = \arctan y$$

*13 これらの数値は概算である.
*14 逆三角関数は大半の計算用ソフトの組み込み関数に登場するほど良く使われる特殊関数である

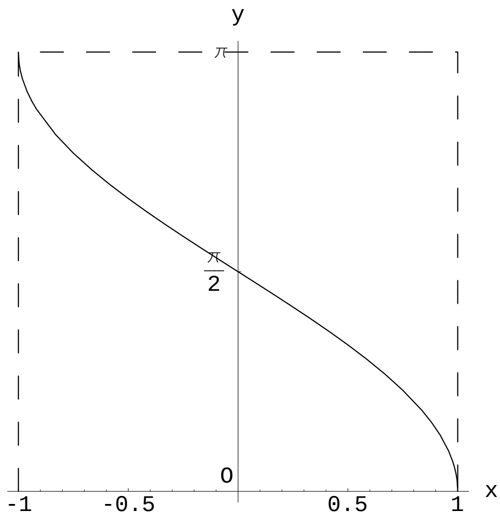

図 1.7 $y = \arccos x$ のグラフ

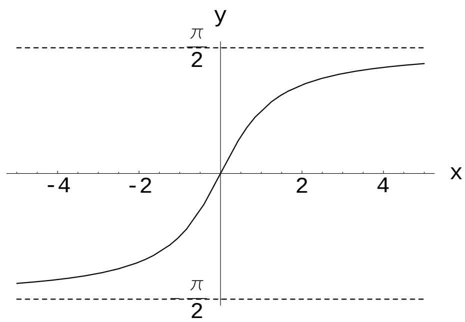

図 1.8 $y = \arctan x$ のグラフ

と書きあらわして逆三角関数と言う.arcsin, arccos, arctan は それぞれアーク-クサイン，アーク-コサイン，アーク-タンジェント と読む.

逆関数 $\arcsin x, \arccos x$ は閉区間 $[-1, 1]$ で定義され，$\arctan x$ は $(-\infty, \infty)$ で定義されている.

関数 $\arcsin x$ の値域は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 関数 $\arccos x$ の値域は $[0, \pi]$, 関数 $\arctan x$ の値域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である. これらの値域を各々の主値とよぶ.

例 1.18. $\arcsin \frac{1}{2}$ の値を求めよう. $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, -1 \leqq y \leqq 1$ のとき,

$y = \sin x, x = \arcsin y$ であるから，$\sin x = \frac{1}{2}$ を $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で解いて，$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

例 1.19. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ を証明せよ.

証明. $\theta = \arcsin x$ とおく.$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, \sin\theta = x$ である. したがって

$$0 \leqq \frac{\pi}{2} - \theta \leqq \pi, \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta = x$$

ゆえに $\frac{\pi}{2} - \theta = \arccos x$, すなわち $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ となる. □

例 1.20. 逆三角関数を含む方程式 $\arcsin x = \arccos\frac{3}{5}$ を解け.

証明. $\theta = \arcsin x = \arccos\frac{3}{5}$ とおく.θ は関数 arcsin の値ともなるから $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ である. よって $x = \sin\theta \geqq 0, \cos\theta = \frac{3}{5}$ であるから $x = \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$. □

1.7　合成関数

関数 $f(x), g(x)$ が与えられているとする.

$g(x)$ の方で記号を書き換えて $z = g(y)$ としよう. $y = f(x)$ の値域が，$z = g(y)$ の定義域に含まれているときには，x の関数 $z = g(y) = g(f(x))$ を考えることができる.

これを $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数という.

問 21. 次の $f(x)$ と $g(x)$ について，合成関数 $g(f(x))$ および $f(g(x))$ を求めよ.

1. $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \tan\frac{x}{2}, g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

定理 1.14. 関数 $f(x)$ について $\lim_{x\to a} f(x) = A$, 関数 $g(y)$ が $y = A$ で連続，すなわち $\lim_{y\to A} g(y) = g(A)$ このとき $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(A)$ である，

証明. 任意の正数 ε についてある正数 δ があって $|y-A|<\delta$ なる y につき $|g(y)-g(A)|<\varepsilon$. この δ に対してある正数 μ があって $0<|x-a|<\mu$ なる x につき $|f(x)-A|<\delta$. 故に任意の ε について正数 μ があって $0<|x-a|<\mu$ なる x につき $|g(f(x))-g(A)|<\varepsilon$. これは $\lim_{x\to a} g(f(x))=g(A)$ を意味している. □

ここで一つ注意をしたい. 上の証明の論法で関数 $g(y)$ が $y=A$ で連続ということを使っているということです. この仮定がないと上の定理は成り立ちません. 次の簡単な例があります.

例 1.21.

$$y=f(x)=0$$

$$g(y)=\begin{cases} 1 & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

$g(f(x))=0, \lim_{y\to 0} g(y)=1$ となっている.

普通, 我々は $g(y)$ も $y=f(x)$ も共に連続関数のとき関数 $g(f(x))$ が連続であるとしていろいろな場面に何気なく使っているのであろう.

♡♠1 章の演習問題 ♡♠

1. $a>0, b>0$ 定数として

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b).$$

2. (1) n を正整数とするとき

$$(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$$

は正整数である.

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\cos(2\pi(2+\sqrt{3})^n)=1$$

である.

3. 天体計算に使われる Kepler の方程式：

$$x = k\sin x + a\,(0 < k < 1, a \text{ は定数})$$

は x_0 を任意の数として,

$$x_{n+1} = k\sin x_n + a \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおくと，$\lim_{n\to\infty} x_n$ をただ 1 つの解にもっている，このことを証明せよ.

4. 区間縮小法の原理；　閉区間の列 $[a_n, b_n]$,　$n = 1, 2, \cdots$ において，$[a_{n+1}, b_{n+1}]$ がつねに $[a_n, b_n]$ に含まれているとき，これらの区間のすべてに含まれる数が少なくとも 1 つあること を証明せよ.
このとき，さらに $b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$ ならば，すべての区間にふくまれ る数はただ一つであることを証明せよ.

5. つぎの極限の問題を考えよ.
(1) 例 1.5(11 ページ) で $A = \infty$ の場合も成り立つ.
(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ を考えなさい.

6. $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots), \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$ であるとき数列 $\{a_n\}$ はある項から後は，有界な減少数列になることを証明し，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを示せ．また，これを使って，$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} (x > 0)$ を求めよ.

7. $f(x)$ が (a, ∞) で有界な単調関数であるとき, $\lim_{x\to a+0} f(x), \lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在するこ とを証明せよ.

8. 閉区間 $[0, 1]$ を定義域とする連続関数 $f(x)$ があるとする．このとき $0 \leqq f(x) \leqq 1$ ならば $f(c) = c, 0 \leqq c \leqq 1$ である c が存在する.

9. 連続変数に対する Cauchy の定理；
有限な極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在するための必 要十分条件は，任意の正数 ε に対して $0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$ である x', x'' に対してつねに $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ であるような正数 δ がとれることである.
これを証明せよ.
また，a が ∞ になると，条件は，どんなになるか.

10. 次の関係式を示せ.

(1) $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

(2) $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$　(Machin,1706)

11. 次の関数を双曲線関数という.

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

(2) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$　(複号同順)

12. 級数についても復習しておこう.

(1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

(2) $\frac{1}{1\cdot 2\cdots m}+\frac{1}{2\cdot 3\cdots(m+1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdots(n+m-1)}+\cdots$

(3) $\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{n^2+4n}+\cdots=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$

本格的な追求は第 6 章で行おう.

素数の個数の極限

素数とは 1 とその数自身の他にはその数の約数がない自然数をいうのであった．関数 $\pi(x)$ を正数 x より小さい素数の個数とすると例えば $\pi(10)=4$, なぜなら 10 より小さい素数は $\{2,3,5,7\}$ と 4 個あるからです．

$\pi(20)=8, \pi(100)=25, \pi(1000)=168, \cdots$. ずうっといくと

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}=1.$$

であることがわかっています.

x	素数の個数 $\pi(x)$	$\frac{\pi(x)\log x}{x}$
10	4	
100	25	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000000	78498	1.0844
10000000	664579	1.0711
100000000	5761455	1.0613
1000000000	50847534	1.0537
10000000000	455052512	1.0478

コンピュータで計算しました．素数の個数を直接表す式はないけど, 極限を使って表せるのですね．複素数の微分積分を学ぶと解ります.

第 2 章

微分

微分法は, 物理学における Newton 力学で物体の速度, 加速度等を典型的な数学表現として発達してきた. 幾何学的には曲線の接線の傾きを求めることから次第に発展してきた分野である. それは積分法と表裏一体になって現代数理科学の重要な礎石になっている. したがって, また応用面でも, 多くの科学-物理学, 化学, 工学, 経済学等-にとって欠くことのできない重要なものとなっている. 微分法の計算や簡単な応用については高等学校課程ですでに学習しているが, ここでは第一章で述べたことをもとにしてもっと理論的に考え, 微分法の基本概念から出発して演算公式を導き, さらに導関数の基礎的な性質を調べ, 最後にこれらの応用を述べることにする.

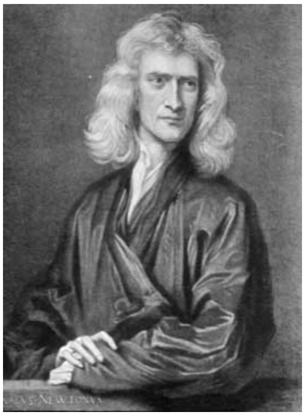

図 2.1　高校・物理では力学の法則で君も知っているだろう！

2.0　ちょっと復習

高校で習ったことを復習しながら”大学の微分”に入っていこう．身近な題材から準備運動で脳細胞を鍛える．

1. r, ω は定数とする．時刻 t における動点 $P(x, y)$ の位置が

   (a)

   $$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t, \quad (\text{いわゆる半径 } r, \text{角速度 } \omega \text{ の等速円運動})$$

   で与えられるとき,

   (b)

   $$x = 2(\omega t - \sin\omega t), \quad y = 2(1 - \cos\omega t), \quad (P \text{ はサイクロイド上にある})$$

   で与えられるとき,

   各々の場合での動点 P の速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ．

2. 次の関数のグラフをかけ

   $$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

3. $x \geqq 0$ のとき

   $$\cos x \leqq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

4. 直線上を運動する点 P の，時刻 t における速度が $v = 2\sqrt{t+1} - 4$ で与えられている．$t = 0$ から $t = 8$ までに点 P が動いた道のりを求めよ．およびで $t = 8$ の P の場所を求めよ．

解答はここには書かない．各自出来るようにしておくこと．

2.1　微分係数, 導関数

関数 $y=f(x)$ が $x=x_0$ の近傍で定義されているとし, x の任意の増分 Δx [*1] に対応する y の増分を Δy とすれば, $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ とする. $\Delta x \to 0$ とするとき, 分数 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ が有限であるある値に収束するとき, すなわち有限な極限値

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

が存在すれば, $f(x)$ は $x=x_0$ で微分可能であるといい, この極限値を $f'(x_0)$ であらわし, $x=x_0$ での関数 $f(x)$ の微分係数という.

瞬間風速

台風が来るとテレビの天気予報で“ 瞬間風速 ”という言葉をよく耳にします. 例えば“ 鹿児島市では午後７時には瞬間風速１００ km/時を観測・・・ ”という具合です.
この場合式 $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ で $f(t)$ は空気分子の位置，t_0 は午後７時です．微分係数はその定義の１番前に lim が付いています. だからこそ瞬間という言葉がこの雰囲気に相応しい訳です.

微分可能な関数としては, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1. 関数 $f(x)$ は, $x=x_0$ で微分可能ならば, その点で連続である.

証明. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\times\Delta x\to f'(x_0)\times 0=0(\Delta x\to 0)$ すなわち $\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ であるから, $f(x)$ は $x=x_0$ で連続である. □

[*1] $\Delta\times x$ の意味ではない. 念のため.Δy 等も同じ.

注意 この定理の逆は必ずしも成り立たない.

例 2.1. たとえば $y = |x|$ は $x = 0$ で連続であるが, その点で微分可能でない. もちろん $a \neq 0$ として $x = a$ では微分可能である.

関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で必ずしも微分可能ではないが, 右極限値 $\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ が存在するとき, この極限値を $f(x)$ の右の微分係数といい, 左極限値 $\lim_{\Delta \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$($\Delta x$ が $\Delta x < 0$, で 0 へ近づく) が存在するときには, これを左の微分係数という. したがって, $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であるというのは, $x = x_0$ での左右の微分係数が存在して一致することである.

次に関数 $f(x)$ が区間 I の各点で微分可能であるときに, $f(x)$ は区間 I で微分可能であるという.

ただし, I が端の点を含む場合には, そこでは左または右の微分係数を考え, もしそれが存在すればその点で $f(x)$ は微分可能であると考える.

定理 2.2. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であることの必要十分条件のひとつとして次の言い換えがある.

$$f(x) - f(a) = (C + \varepsilon(x))(x - a), \quad \varepsilon(a) = 0$$

を満たす連続関数 $\varepsilon(x)$ と定数 C が存在することである.

もちろん微分可能のときは $C = f'(a)$ である.

この定理は論証のときに使われることがある.

$f(x)$ が区間 I で微分可能ならば, 微分係数は区間内の各点に対応して定まる. そこで区間 I の任意の点 x での微分係数を $f'(x)$ であらわすと, $f'(x)$ は x の関数となる. これを $f(x)$ の導関数といい, $y', \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df(x)}{dx}$ などでもあらわす. また, 導関数を求める事を関数を微分するという.

問 1. 次の関数の $x = 0$ における微分可能性をしらべよ.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqq 0 \text{ のとき} \\ x^3 & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

微分係数の定義には極限 lim があるが極限概念は Newton,Leipniz の１７世紀の時代からこの概念の確立があった訳ではない．極限 lim の定式化は普通 Cauchy[a]から始まるとされる，1823 年．そこでは 21 ページにあるようないわゆる $\varepsilon-\delta$ 論法とよばれるものの先駆けが見られる [b].

[a] 83 ページ参照

[b] Résumé des leçons données a l'École royale Polytechnique,sur le calcul infinitésimal. 「微分積分要論」として小堀憲氏の翻訳が出ている，共立出版.

高校の復習

ここで次のことを確認しておこう.

定理 2.3. 閉区間 $[a,b]$ の各点で $f(x)$ が微分可能で，つねに $f'(x) \geqq 0$ ならば，$f(a) \leqq f(b)$ である.

問 2. この定理を証明せよ. 復習せよ.

2.2　種々の関数の導関数

ここで基本的な関数の導関数を求めておこう.

例 2.2. $y = x^n$ (n は正整数) のとき $y' = nx^{n-1}$

証明.

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$$

したがって

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

□

例 2.3. $y = \log_a x$, 但し a は定数 $a > 0, a \neq 1$ $(x > 0)$ のとき

$$y' = \frac{1}{x}\log_a e.$$

証明. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a\left\{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}\right\}$. ここで $X = \frac{x}{\Delta x}$ とおく.$X \to \infty$ と $\Delta x \to 0$ は同値. 定理 1.11(27 ページ) より $\Delta x \to 0$ のとき, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a\left\{(1+\frac{1}{X})^X\right\} \to \frac{1}{x}\log_a e$. □

例 2.4. $a, a > 0, a \neq 1$ を定数とする. $y = a^x$ のとき $y' = a^x \log_e a$, 特に $y = e^x$ のとき

$$y' = e^x.$$

証明. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$. 系 1.12.1(28 ページ) から $y' = a^x \log_e a$. □

これからは自然対数 $\log_e x$ を底を省略して $\log x$ と略記する.

例 2.5. $y = \sin x$ のとき $y' = \cos x$

証明.

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

したがって定理 1.13 により $y' = \cos x$. □

同様にして

例 2.6. $y = \cos x$ のとき $y' = -\sin x$

問 3. 自分でも証明してみよ.

2.3 微分法の基本定理

定理 2.4. $f(x), g(x)$ が微分可能である区間では

$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$

$$(kf)' = kf' \quad k \text{ は定数},$$
$$(fg)' = f'g + fg',$$

また $g(x) \neq 0$ である点では

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

証明. 積の場合を証明する
$\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$
ここで $\Delta x \to 0$ とすれば, $g(x)$ の連続性から右辺の極限は $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. 他の場合については, 各自証明をおこなってみよ. □

問 4. $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$, $(c_1, c_2, \cdots, c_n$ は定数$)$ のとき $f'(x) = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots + c_n f_n'(x)$ を証明せよ.

問 5. $f(x) = f_1(x)f_2(x)f_3(x)$ のとき $f' = f_1'f_2f_3 + f_1f_2'f_3 + f_1f_2f_3'$ を証明せよ.

問 6. 次の関数を微分せよ.

(1) $\tan x$	(2) $\sec x$	(3) $x^2 + x - 2x^3 - 1$
(4) $\frac{1}{x}$	(5) $\operatorname{cosec} x$	(6) $e^x \cos x \sin x$
(7) $ax^2 + bx + c$	(8) $\log x + x^4$	(9) $\cot x$

2.4　合成関数の微分法

次は計算する上で非常に良く使われる定理である. 証明の論証はどうなりますでしょうか？

定理 2.5. $y = f(x)$ が区間 I で微分可能で, またその値域 $f(I)$ で $z = g(y)$ が 微分可能である時は, 合成関数 $z = g(f(x))$ は区間 I で微分可能になり, つぎの式が成り立つ.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

証明. x の増分 $\Delta x(\neq 0)$ に対応する y の増分 Δy は $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ である.

$\Delta x \to 0$ のとき $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x)$ であるから, $\varepsilon_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ とおけば, $f(x)$ は微分可能だから $\Delta x \to 0$ のとき, $\varepsilon_1 \to 0$ になる.

分母を払って $\Delta y = (f'(x) + \varepsilon_1)\Delta x$, と書いておこう.

次に $z = g(y)$ の方を考えよう.

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} \frac{\Delta z}{\Delta y} - g'(y) & \Delta y \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & \Delta y = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく.

Δy に対応する z の増分 $\Delta z = g(y+\Delta y) - g(y)$ について, $\Delta z = (g'(y) + \varepsilon_2)\Delta y$ となる.

したがって

$$\Delta z = (g'(y) + \varepsilon_2)(f'(x) + \varepsilon_1)\Delta x. \tag{$*$}$$

Δy は変数 Δx の関数，ε_2 は変数 Δy の関数である．$\Delta y = 0$ のとき $\varepsilon_2 = 0$ ，$\lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon_2 = 0$

したがって ε_2 は Δx からの合成関数の極限とみて定理 1.14(35 ペ-ジ) により $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 = 0$. [*2]

$\Delta x \to 0$ とすれば, 式（$*$）より $\dfrac{\Delta z}{\Delta x} \to g'(y)f'(x)$

すなわち $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ となる. □

例 2.7. $y = (1+x^2)^{100}$ のとき $y' = 200x(1+x^2)^{99}$.

次の例は例 2.2 を大幅に拡張している.

例 2.8. $y = x^a\,(x > 0)$ のとき $y' = ax^{a-1}$. ここで a は任意の実数である定数.

証明. $y = e^z, z = a\log x$ として合成関数と見做す.y は z について，および z

[*2] $\Delta y = 0$ のとき $\varepsilon_2 = 0$ としているのが論証に効いているのに注意，および 問題 25（81 ページ）参照

は x について各々微分可能であって

$$\frac{dy}{dz} = e^z, \frac{dz}{dx} = \frac{a}{x}.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = e^z \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

□

例 2.9. $y = \log|x|$ のとき $y' = \dfrac{1}{x}$　$(x \neq 0)$

証明. $x > 0$ のときは $y = \log x$ であるから, $y' = \dfrac{1}{x}$.

$x < 0$ のときは $y = \log(-x)$ であるから定理 2.3 によって $y' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$

したがって $\dfrac{d}{dx}\log|x| = \dfrac{1}{x}$　$(x \neq 0)$. □

2.5　逆関数の微分法

定理 2.6. *(逆関数の微分法)*　$y = f(x)$ が *(閉または開)* 区間で単調で微分可能ならば, その逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は $f'(x) \neq 0$ となる y で微分可能で

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{2.1}$$

証明. 関数 $x = f^{-1}(y)$ において，y の増分 Δy に対する x の増分を Δx とすれば，x の関数 $y = f(x)$ においては，x の増分 Δx に対する y の増分は Δy である. このとき,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

である.

$\Delta y \to 0$ のとき $\Delta x \to 0$.

したがって，

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

□

式（2.1）を次のように表現すると印象的である:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

例 2.10. *(対数関数の微分)*$a>0,\ a\neq 1$ のとき，指数関数 $y=a^x$ の逆関数は，a を底とする対数関数 $x=\log_a y\quad(y>0)$ である．定理 *2.6* 例 *2.4* より，これは微分可能で

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{1}{a^x\log a}.$$

$$\frac{dy}{dx}=a^x\log a.$$

2.5.1　逆三角関数

例 2.11. $y=\arcsin x$*(主値* $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$*)* について

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

証明. $x=\sin y,\ \frac{dx}{dy}=\cos y,\ \ -\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから $\cos y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

同様にして

例 2.12. $y=\arccos x$ について

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 2.13. $y = \arctan x$ について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

問 7. 例 *2.12*, 例 *2.13* を自分でもやってみよ.

問 8. *94* ペ-ジ, 表 *3.1* の公式集を確認せよ.

2.5.2　媒介変数による関数表示での導関数

曲線 C 上の点の座標 (x, y) が一つの変数 t の関数として

$$x = f(t), \quad y = g(t) \tag{2.2}$$

で与えられているとき，式（2.2）を C の媒介変数表示といい，t を媒介変数という.

簡単な例

例 2.14. 半径 R の円

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$$

$f(t), g(t)$ が共に微分可能ならば，$\dfrac{dy}{dx}$ を求める公式がある.

定理 2.7. 式 *(2.2)* が t の区間で微分可能であり，定符号ならば，y を x の関数として表すことができる. そのとき，導関数 $\frac{dy}{dx}$ は次の式で与えられる.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

証明. $x = f(t)$ の逆関数が存在し t を x の関数として $t = f^{-1}(x)$ と表す事ができる. ゆえに y は x の関数として

$$y = g(f^{-1}(x))$$

と表せる.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

□

問 9. *42* ページにあるサイクロイドの場合について $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

2.6 高階導関数

関数 $y = f(x)$ を 2 回以上微分したときには, n 次導関数を記号

$$\frac{d^n y}{dx^n}, y^{(n)}, f^{(n)}(x) \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

等で表す. 例えば

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y' &= 2x \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \\ y^{(3)} &= \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

こんな具合.

例 2.15. $y = e^x$ のとき $\dfrac{d^n y}{dx^n} = e^x$ である.

更に

例 2.16. $y = a^x$ のとき（但し a は定数), $\frac{d^n y}{dx^n} = a^x(\log a)^n$ である.

例 2.17. $y = x^\alpha$（α は定数）のとき

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

α が特に正整数 k のときはつぎの様な形になる.

例 2.18. $y = x^k$（k は正の整数）のとき

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}, & n < k+1 \text{ のとき} \\ 0, & n \geqq k+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

例 2.19. $y = \sin x$ のとき

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

問 10. 例 *2.19* を確かめよ. および $y = \cos x$ のときはどうなるか？

例 2.20. $y = f(x) = \arctan x$ のとき

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \sin(ny + n \cdot \frac{\pi}{2}) \cos^n y, \quad n \geqq 1.$$

証明. 少し計算はあるが自然数 n についての数学的帰納法で示せる. □

次にまず試しに

問 11. 関数 $f(x), g(x)$ について $(f(x)g(x))^{(2)}, (f(x)g(x))^{(3)}$ を計算してみよう.

一般に 2 つの関数の積の第 n 階導関数については, 次の定理が成り立つ.

定理 2.8 (Leibniz の定理)**.** 関数 $f(x), g(x)$ が n 回微分可能であるとき,

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + {}_nC_1 f^{(n-1)}g' + {}_nC_2 f^{(n-2)}g'' + \cdots + {}_nC_r f^{(n-r)}g^{(r)} + \cdots + fg^{(n)}$$

が成り立つ.

証明. 自然数 n についての帰納法で証明しよう.

$n = 1$ のとき, $(fg)' = f'g + fg'$ であるから定理は成り立つ.

$n = k$ のとき, 定理が成り立つとすると,

$$(fg)^{(k)} = f^{(k)}g + {}_kC_1 f^{(k-1)}g' + {}_kC_2 f^{(k-2)}g'' + \cdots + {}_kC_r f^{(k-r)}g^{(r)} + \cdots + fg^{(k)}$$

この式の両辺を x で微分すると, 次のようになる.

$$(fg)^{(k+1)} = f^{(k+1)}g + (1 +_k C_1)f^{(k)}g' + ({}_kC_1 +_k C_2)f^{(k-1)}g'' + \cdots \\ + ({}_kC_{r-1} +_k C_r)f^{(k-r+1)}g^{(r)} + \cdots + fg^{(k+1)}$$

ところが, ${}_kC_{r-1} +_k C_r =_{k+1} C_r$ であるから

$$(fg)^{(k+1)} = f^{(k+1)}g +_{k+1} C_1 f^{(k)}g' +_{k+1} C_2 f^{(k-1)}g'' + \cdots \\ +_{k+1} C_r f^{(k+1-r)}g^{(r)} + \cdots + fg^{(k+1)}$$

この式は定理が $n = k + 1$ のときにも成り立つことを示している.

したがって, 任意の自然数 n に対して定理が成り立つ. □

注意 (2.1) は微分の回数を示す指数を累乗の指数と考えると, ちょうど 2 項定理に よる $(f + g)^n$ の展開式と同じ形になっている.

例 2.21. $y = x^2 e^x$ の第 n 階導関数 $y^{(n)}$ を求めよ.

証明.

$$(x^2)' = 2x, (x^2)'' = 2, (x^2)^{(k)} = 0 \quad (k \geqq 3), \\ (e^x)^{(k)} = e^x \quad (k \geqq 1)$$

であるから Leibniz の定理によって,

$$y^{(n)} = (e^x x^2)^{(n)} = e^x x^2 + 2nxe^x + n(n-1)e^x$$

□

2.7　極限の例

例 2.22.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$$

但し a は定数.

証明. $a \leqq 0$ のときは明らかに正しい. それで $a > 0$ としておく.

　不等式 $e^x > x$ が成り立つことを確認しておく.

　従って $e^{\frac{x}{2a}} > \frac{x}{2a}$. 故に $\frac{e^x}{x^a} > \frac{x^a}{(2a)^{2a}}$. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{(2a)^{2a}} = +\infty$

　故に結論を得る. □

　この例は後でよく使われます. 関数の増大度を見るうえで大切な事実です.

　$\lim_{x\to\infty} x^a = \lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$ は当たり前ですが更に $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$ だというのです.

問 12. 上の証明でアンダ-ラインの部分の証明を補え.

例 2.23. 上の例から

$$\lim_{x\to+0} x^a \log x = \begin{cases} 0 & a > 0 \text{ のとき} \\ -\infty & a \leqq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

問 13. $\lim_{x\to 0} x^x$ を求めよ.

例 2.24.

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$$

$y = (1 + \frac{1}{x})^x$ とおくと $\log y = x\log(1+x) - x\log x, \lim_{x\to 0} x\log x = 0$ からわかる.

例 2.25. 関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で, $\varphi(x)$ の値域は I に含まれ, I では

$$|\varphi'(x)| \leqq k < 1 \quad (k \text{ は定数 })$$

であるとする. このとき, 反復法によって方程式 $x = \varphi(x)$ のただひとつの解 ξ の近似値を求めることができる. すなわち, I 内の任意の点 x_0 から出発して,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

を作ると, 数列 $\{x_n\}$ はつねに解 ξ に収束する. これを証明せよ.

証明. I 内の任意の 2 つの点 x', x'' に対して，平均値の定理から，

$$\varphi(x') - \varphi(x') = (x' - x'')\varphi'(x'' + \theta(x' - x''))\,(0 < \theta < 1)$$

したがって，

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqq k|x' - x''|\,(k < 1)$$

ゆえに例 1.9(18 ペ-ジ) からこの命題が成り立つ. □

2.8　Newton の方法

次に方程式が $f(x) = 0$ の形で与えられているとき，反復法で解の近似値を求める Newton の方法について述べよう.

まず，方程式 $f(x) = 0$ の解の 1 つの近似値 x_0 をグラフあるいは中間値の定理などを使って求める.

$f(x) = 0$ の真の解を $\overline{x}$ とし，$\overline{x} = x_0 + h$ とすると，平均値の定理から，

$$0 = f(\overline{x}) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h)\,(0 < \theta < 1)$$

となる.$f'(x)$ が連続であるとすれば，$|h|$ が十分小さいとき，

$$f'(x_0 + \theta h) \doteqdot f'(x_0)$$

である. そこで，h を

$$f(x_0) + hf'(x_0) = 0$$

をみたすように定める. すなわち $h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ を真の h に代入して，$\bar{x}$ の近似値 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ を作る. これは x_0 よりもっと精密な近似値となるであろう. 次に，x_1 から同じようにして，

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

をつくる. 以下, この手続を繰り返して, より精密な解の近似値を求めて行く, これが Newton の方法である. この方法は $\varphi(x)$ として

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2.3}$$

をとり, 方程式 $x = \varphi(x)$ を例（2.25）の反復法で解くことになっている．この $\varphi(x)$ が例（2.25）の条件をみたすかどうかを調べてみよう．まず, 式（2.3）から

$$\varphi(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

である. いま $x = \overline{x}$ の近傍で $f'(x) \neq 0, f''(x)$ が連続であるとすれば $\varphi(x)$ は連続になる．また, $f(\overline{x}) = 0$ であるから $\varphi(\overline{x}) = 0$ となる. したがって, 正数 d を適当にとると 区間 $I = [x - d, x + d]$ では

$$|\varphi'(x)| \leqq k < 1$$

が成り立つ．また式（2.3）から明らかに $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$ である. ゆえに, I に属する任意の x に対して

$$|\varphi(x) - \overline{x}| = |\varphi(x) - \varphi(\overline{x})| = |x - \overline{x}||\varphi'(\overline{x} + \theta(x - \overline{x})|(0 < \theta < 1)$$

であるから $\varphi(x)$ の値域は I に含まれる. したがって, 式 (2.3) で与えられる $\varphi(x)$ は例 2.25 の条件をすべて満たし, さらに, 方程式 $x = \varphi(x)$ と $f(x) = 0$ とは $\overline{x}$ の近傍では明らかに同値である．以上のことから, 次の結論が得られる．

定理 2.9. 方程式 $f(x) = 0$ の解 $\overline{x}$ の近傍で $f'(x) \neq 0, f''(x)$ が連続であるとする. このとき正数 d を適当にとれば 区間 $I = [\overline{x} - d, \overline{x} + d]$ で

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} \right| \leqq k < 1$$

となり, この I に属する任意の x_0 から手発すれば *Newton* の方法で解 $\overline{x}$ の近似値が常に求められる.

2.8.1 曲線の追跡

例 2.26. 曲線 $y = \frac{x}{x^2-1}$ のグラフを描け.

証明．右辺は x の奇関数であるから，曲線は原点に関して対称である．また曲線が座標軸と交わる点は原点だけである．$y = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$ とかけるから，直線

$x = \pm 1$ は漸近線になっている. そして $x \to \infty$ のときは曲線は x の上側から;$x \to -\infty$ のときは下側から漸近線である x 軸 に近ずく. また, $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ の形からすぐわかるように, 曲線は $0 < x < 2$ では x 軸の下側に, $-2 < x < 0$ で は x 軸の上側にある. さらに,

$$y' = \frac{x^2(x^2-6)}{(x^2-2)^2} \quad y'' = \frac{4x(x^2+6)}{(x^2-2)^3}$$

したがって関数の増減, 凹凸は次の表のようになる. 以上のことから, 曲線の概形は図のようになる. □

問 14. 次の曲線のグラフを描け.

1. $y = \frac{1}{1+e^x}$
2. $y = x^2(x-2)^2$
3. $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$
4. $y = e^{-x^2}$

極座標, 極方程式

直交座標軸 Ox, Oy に関する点 P の座標を (x, y) とし, O を極, Ox を始線とする点 P の極座標を (r, θ) とすると, $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$ したがって,

$$\frac{y}{x} = \tan\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

である. θ は π の整数倍だけ不定である $(\theta = \theta_0 + n \cdot \pi)$.
曲線の方程式が直交座標で $F(x, y) = 0$ であるとき, この方程式を極座標で表すと, $F(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$ となる. このように極座標で表された曲線の方程式を極方程式という.

問 15. 次の曲線を極方程式で表せ.
(1)　$x^2 + y^2 = a^2$　　(2)　$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

例 2.27. 曲線 $r = 1 + 2\cos\theta$ の概形をかけ.

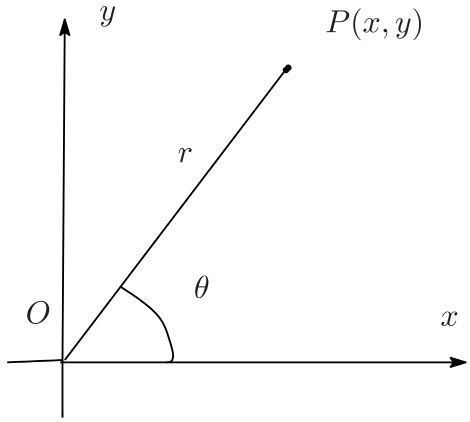

図 2.2　二次元極座標

証明. r は θ の偶関数であるから, $\theta = 0$ から $\theta = \pi$ までの曲線の形を調べれば全体の形がわかる. □

方程式

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

が表す曲線をカ-ジオイド (cardioid) という.

問 16. 次の曲線の概形をかけ

(1) $r = 1 + \sec\theta$　　*(2)* $r = \sin 3\theta$　　*(3)* $r = 2\theta$

問 17. 極方程式 $r = f(\theta)$ で表された曲線上の任意の点 P における接線が P を通る動径となす角を ψ とすると

$$\tan\psi = f(\theta)f'(\theta)$$

となることを証明せよ. また, この結果を利用し, 曲線 $r = ce^{k\theta}(c, k > 0)$ では, 接線と接点を通る動 径とは一定の角をなしていることを証明せよ.

物理学には微分で表現されているものが沢山あるよ．まずは簡単な例.

運動方程式

質量 m の物体が，$\vec{F}$ の力を受けるとき，生じる加速度 $\vec{a}$ との間には，次のような運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

が成り立つ.
この物体の変位を $\vec{s}$，速度を $\vec{v}$ とすると

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ここで t は時間変数である.
正確で詳しいことは物理の先生に聞いてネ！

2.9　平均値の定理，種々の形

次の定理はこの節の基礎になるものである.

定理 2.10 (Rolle の定理)**.** *関数 $y = f(x)$ が 2 点 a, b を含むある区間で微分可能であって，$f(a) = f(b)$ ならば，a と b の間に $f'(c) = 0$ となる c が存在する．すなわち，$f'(a + (b - a)\theta) = 0 \quad (0 < \theta < 1)$ が成り立つような θ が少なくとも 1 つある.*

証明. $a > b$ のときも同様であるから $a < b$ の場合について証明しよう．$f(x)$ が $[a, b]$ で定数であるときは定理は明らかに成り立つ.
そこで $f(x)$ が (a, b) で $f(a) = f(b)$ より大きくなるところがあるとして み

よう． $f(x)$ は $[a,b]$ で微分可能であるから連続である. ゆえに定理 1.10 から $[a,b]$ で最大値 $f(c)$ をとる．したがって $|h|<c-a, |h|<b-c$ であればつねに $f(c+h)-f(c)<0$ が成り立つ. したがって $h>0$ のとき $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$, $h<0$ のとき $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$ である. ところが $f(x)$ は点 c で微分可能であるから, ここで $h\to 0$ とすると $f'(c)\leqq 0$ 且つ $f'(c)\geqq 0$

すなわち, $f'(c)=0$ となる.

$f(x)$ が (a,b) で $f(a)=f(b)$ より小さくなるところがある場合は, $f(x)$ が $[a,b]$ で最小値を取る点 c' を考えれば上と 同様に証明できる．定理の後半は $\theta=\frac{c-a}{b-a}$ とすれば, 前半からすぐわかる. □

Rolle の定理では $f(a)=f(b)$ であったが, これが必ずしも成り立たない一般の場合にはどうなるであろうか.

定理 2.11 (平均値の定理)**.** 関数が閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能とする. このとき

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+\theta(b-a)),\quad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する.

証明．2 点 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$ を結ぶ直線を考えると，その傾きは $k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ で, その方程式は $y-f(a)=k(x-a)$ である.

そこで $\varphi(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$ を考えると，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$ で, $\varphi'(x)=f'(x)-k$ である.

したがって Rolle の定理から, a と b との間に

$$\varphi'(c)=f'(c)-k=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

となるような c が存在する. □

定理 2.12. 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で導関数 $f'(x)=0$ とする. このとき $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で定数関数である.

証明．任意の $x, a\leqq x\leqq b$ をとってくる. 区間 $[a,x]$ に定理 2.11 を応用すると

$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$ である c が $a \leqq c \leqq x$ として存在することになる. 仮定より $f'(c) = 0$ だから $f(x) = f(a)$. □

2.9.1　不定形の極限値

たとえば, $x \to a$ のとき $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ であるとすれば, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ はどうなるであろうか. この場合を形式的に 0/0 と書くことにすると, 同じよ うな場合が和, 差, 積, 商, 累乗などのときにもおこる. $\infty - \infty, \infty \cdot 0, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$ などがそれである. このような場合をまとめて不定形という. 不定形の極限は 微分法を使うと, 簡単に求められる場合が少なくないが, それらの方法のもとになっているのは次の定理である.

定理 2.13 (Cauchy の平均値定理)**.** 関数 $f(x), g(x)$ は区間 $[a, b]$ で連 続で, (a, b) で微分可能であり, $g'(x)$ は (a, b) で *0* にならないならば

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < b)$$

となるような c がある.

証明. 平均値の定理 2.11 から, $g(b) - g(a) = (b-a)g'(\zeta)(a < \zeta < b)$ となるような ζ が存在する. ところが仮定から $g'(\zeta) \neq 0$ であるから, $g(b) - g(a) \neq 0$ となる. そこで

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{2.4}$$

とおいて, 分母をはらうと $f(b) - f(a) - k\{g(b) - g(a)\} = 0$
いま a のところを x でおきかえて関数 $\psi(x) = f(b) - f(x) - k\{g(b) - g(x)\}$ を考えてみよう. そうすると $\psi(a) = \psi(b) = 0 \quad \psi'(x) = -f'(x) + kg'(x)$ であるから, Rolle の定理によって, $\psi'(c) = 0(a < c < b)$ すなわち, $k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ となる c がある. ゆえに式（2.4）から定理の式がえられる. □

定理 2.14 (l'Hospital[*3] の定理)**.** $f(x), g(x)$ は $x = a$ の近傍で, $x = a$

[*3] ロピタル (1661-1704), フランス

以外では微分可能であるとする．さらに，$f(a) = g(a) = 0$ で，$x = a$ 以外では $g'(x) \neq 0$ とする．このとき，もし $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ であるならば，$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ である．

証明．区間 $[a,b]$ に定理 2.13 を応用してみる． □

2.10 Taylor の定理

これから Taylor[*4]の定理を説明したいのですが，その前にこの定理にある特徴的な長い式 (2.8a) が出てくる必然性を考えてみたい．

例 2.28. *(1)* $0 < x < \frac{\pi}{2}$のとき　$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$
(2) $0 < x$ のとき　$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$

関数 $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で何回でも微分できる関数としよう．
導関数 $f'(x)$ の区間 $[a,b]$ での最小値を L_1，最大値を M_1 とするとまず

$$L_1(x-a) \leqq f(x) - f(a) \leqq M_1(x-a). \tag{2.5}$$

が成り立つ事が平均値の定理から解る．次に

例 2.29. 関数 $f''(x)$ の区間 $[a,b]$ での最小値を L_2，最大値を M_2 とすると

$$\frac{1}{2}L_2(x-a)^2 \leqq f(x) - \{f(a) + f'(a)(x-a)\} \leqq \frac{1}{2}M_2(x-a)^2. \tag{2.6}$$

したがって $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(c_2)(x-a)^2$ となる c_2 が $a < c_2 < b$ として存在する．

証明．$T_1(t) = f(a) + f'(a)(t-a), R_1(t) = f(t) - T_1(t)$ とおく．
$R_1'(t) = f'(t) - f'(a), R_1''(t) = f''(t)$ であるから式 (2.5) より
$L_2(t-a) \leqq R_1'(t) - R_1'(a) \leqq M_2(t-a), R_1'(a) = 0.$
故に $x \geqq a$ のとき

[*4] (1685-1731), イギリス

$L_2\int_a^x (t-a)dt \leqq \int_a^x r'(t)dt \leqq M_2\int_a^x (t-a)dt.$
$\frac{1}{2}L_2(x-a)^2 \leqq f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)\} \leqq \frac{1}{2}M_2(x-a)^2.$
後半は中間値の定理よりいえる. □

さらに $T_2(t)=f(a)+f'(a)(t-a)+\frac{1}{2}f''(a)(t-a)^2, R_2(t)=f(t)-T_2(t)$ とおくと

例 2.30.
$$\frac{1}{6}L_3(x-a)^3 \leqq f(x)-T_2(x) \leqq \frac{1}{6}M_3(x-a)^3 \tag{2.7}$$
ここで M_3, L_3 は $f'''(x)$ の区間 $[a,b]$ での最大値，最小値としている.
したがって $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(c_3)(x-a)^3$ となる c_3 が $a<c_3<b$ として存在する.

証明. 式 (2.6) の $f(x)$ を $f'(x)$ と置き換えて x を t で書き換えると,
$\frac{1}{2}L_3(t-a)^2 \leqq f'(t)-\{f'(a)+f''(a)(t-a)\} \leqq \frac{1}{2}M_3(t-a)^2.$
$$\frac{1}{2}L_3(t-a)^2 \leqq R_2'(t) \leqq \frac{1}{2}M_3(t-a)^2$$
$$\frac{1}{2}L_3\int_a^x (t-a)^2dt \leqq \int_a^x R_2'(t)dt \leqq \frac{1}{2}M_3\int_a^x (t-a)^2dt$$
$$\therefore \frac{1}{6}L_3(x-a)^3 \leqq R_2(x) \leqq \frac{1}{6}M_3(x-a)^3$$
後半は中間値の定理よりいえる. □

式 (2.5), 式 (2.6), 式 (2.7) を更に一般化して提式化したものが次にくる Taylor の定理である.

定理 2.15 (Taylor の定理)**.** 関数 $f(x)$ が点 a,b を含むある区間で n 回微分可能であるならば

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n \tag{2.8a}$$
$$R_n=\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c), \quad c=a+\theta(b-a), 0<\theta<1 \tag{2.8b}$$

となるような $c, a < c < b$,（したがって）$\theta, 0 < \theta < 1$ が存在する. [*5]

証明.

$$f(b) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(b-a)^r = \frac{(b-a)^n}{n!}K \tag{2.9}$$

(ただし $(f^{(0)}(a) = f(a), 0! = 1)$ とする) となるように定数 K を決めよう. K が次のように表されることを証明すればよい.

$$K = f^{(n)}(a + \theta(b-a)), \quad 0 < \theta < 1$$

式 (2.9) で a を x でおきかえて, 次の関数を考えよう.

$$\varphi(x) \equiv f(b) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(b-x)^r}{r!} f^{(r)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!}K.$$

$\varphi(b) = 0$. また式 (2.9) から $\varphi(a) = 0$ である.$\varphi(x)$ の導関数を計算すると 少し複雑な計算を経て

$$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\{f^{(n)}(x) - K\} \tag{2.10}$$

となる. したがって Rolle の定理 (定理 2.10, 60 ペ-ジ) から式 (2.8a) が成り立つような θ が存在する　□

問 18. 式（*2.10*）を計算せよ.

問 19.　*(1)* 上の証明で, 式 *(2.9)* の右辺を $\frac{(b-a)^p}{(n-1)!p}K(0 < p \leqq n)$ と置くと, 同様にして

$$R_n = \frac{(b-a)^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!p} f^{(n)}(a + \theta(b-a)), \quad 0 < \theta < 1$$

が得られる *(Roche-Schlömilch* の剰余*)*.

[*5] プログラミングに例えれば次のようにも言える:
入力元として任意の関数，任意の定数 a, b および正の整数 n を持ってきたとき
出力として式（2.8a）を満たす実数 c がある。

(2) とくに $p = n$ の場合が式 *(2.8a)* である. *(2.3)* を *Lagrange* の剰余という.$p = 1$ とすると

$$R_n = \frac{(b-a)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta(b-a)), \quad 0 < \theta < 1$$

となる. これは *Cauchy* の剰余と呼ばれている.

Taylor の定理で, $a = 0, b = x$ とすると次の形が得られる.

定理 2.16 (Maclaurin の定理)**.** $f(x)$ が $x = 0$ を含む区間で n 回微分可能であれば, その区間 で次の式 が成り立つような θ が存在する.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1 (\textit{Lagrange の剰余})$$

あるいは,

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1 (\textit{Cauchy の剰余})$$

この θ は n, x にも依ることに注意した方が良い.
また次の式の形でも用いられることがある.

系 2.16.1.

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+h)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + R_n.$$

2.11　関数の無限級数展開，Maclaurin 級数

関数 $f(x)$ が $x = 0$ を含むある区間で何回でも微分可能であるとき, Maclaurin の定理によって任意の自然数 n にたいして,

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} x^r + R_n$$

が成り立つ. ただし R_n は Lagrange の剰余, あるいは Cauchy の剰余である. このとき, もし $R_n \to 0 (n \to \infty)$ であるならば

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} x^r$$

となるから, $f(x)$ は次のように無限級数で表されることになる.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{2.11}$$

この無限級数を $f(x)$ の Maclaurin 展開, あるいは $x = 0$ での Taylor 展開という (一般に関数を無限級数で表したものをその関数の級数展開という).

まずは簡単な例より.

例 2.31. n 次多項式 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ についてはこの総和の順序に応じたものが $x = 0$ での *Taylor* 展開である.

例 2.32. 任意の x に対して, 次の級数展開が成り立つことを証明せよ.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{2.12}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{2.13}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{2.14}$$

証明. $f(x) = e^x$ のとき, $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1 (n = 1, 2, \cdots)$ であるから式 (2.11) によって Maclaurin 展開は式 (2.12) の形になる.

したがって, あとは, $n \to \infty$ のとき $R_n \to 0$ であることを示せばよい.

$|R_n| = \frac{e^{\theta x}}{n!}|x|^n \leqq e^{|x|}\frac{|x|^n}{n!}$. 例 1.7（15 ページ）より $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ だから式 (2.12) が成り立つ.

$f(x) = \sin x$ のときには,$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ であるから, $f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2}$, したがって $f^{(2m)}(0) = 0, f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$. ゆえに Maclaurin 展開は式 (2.13) の形になる. R_n として, Lagrange の剰余をとると, $R_n = \frac{|x|^n}{n!}\sin(x + n\frac{\pi}{2}) \leqq \frac{|x|^n}{n!} \to 0 (n \to \infty)$ ゆえに式 (2.13) が成り立つ.

式 (2.14) は式 (2.13) と同様にして証明できる. □

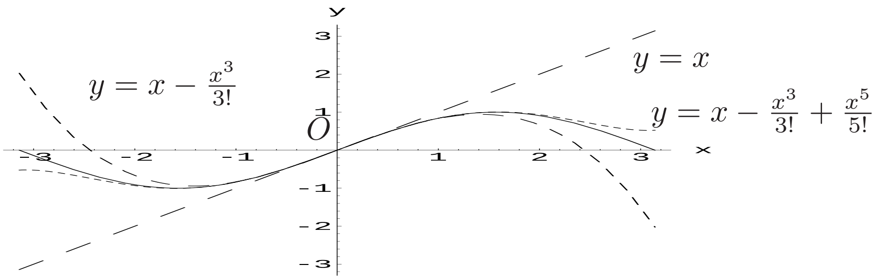

図 2.3　$\sin x$ の Taylor 展開

注意 式（2.12） の右辺の級数で $x = i\theta$ ($i = \sqrt{-1}, \theta$ は実数) とおいたものを考える.

$$1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

は $n = 2m$ のときは

$$\left\{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{\theta^{2m}}{(2m)!}\right\} + i\left\{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{\theta^{2m-1}}{(2m+1)!}\right\},$$

$n = 2m + 1$ のときは

$$\left\{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{\theta^{2m}}{2m!}\right\} + i\left\{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{\theta^{2m-1}}{2m-1)!}\right\}$$

であるから, $n \to \infty$ として 式 (2.13), (2.14) から

$$1 + \frac{i\theta}{1} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots = \cos\theta + i\sin\theta$$

となる. そこで, この複素数を $e^{i\theta}$ と書くことにすると (これが $e^{i\theta}$ の定義である), 一方では, 式 (2.12) が $x = i$ に対しても成り立ち, 他方では Euler の関係式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ が成り立つことになる.

問 20. α を任意の正数とするとき, $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha}e^x = \infty$ であることを証明せよ.

問 21. $\cosh x$ および $\sinh x$ の *Maclaurin* 展開をかけ.

例 2.33. e の値を少数第 5 位まで求めよ.

証明. $f(x) = e^x$ のとき，$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1(n = 1, 2, \cdots)$ であるから Maclaurin の定理から

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n e^{\theta x}}{n!}, 0 < \theta < 1$$

この式で $x = 1$ と置くと

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!}, 0 < \frac{e^\theta}{n!} < \frac{3}{n!}$$

いま $\frac{3}{n!} < 5 \times 10^{-6}$ となるようなところまで順次計算する. 少数第 8 位以下を切り上げて計算 すると, 次のようになる.

$2 + 1/2 =$	2.5	
$1/2 \div 3 =$	0.16666	67
$1/3! \div 4 =$	0.04166	67
$1/4! \div 5 =$	833	34
$1/5! \div 6 =$	138	89
$1/6! \div 7 =$	19	85
$1/7! \div 8 =$	2	49
$1/8! \div 9 =$		28(+
和 $=$	2.71828	19

上の計算から分るように

$$\frac{3}{10!} < 3 \times 2.8 \times 10^7$$

また切り上げのため生じた誤差は全体で 7×10^{-7} をこえない，したがって $2.7182819 - 7 \times 10^{-7} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \leqq 2.7182819$ となり

$$2.7182812 < e < 2.71828274$$

となる. ゆえに求める答は 2.71828 である. □

例 2.34. e は無理数である.

証明. まず問 7(14 ページ) より $2 < e < 3$ を確認しておく.

$e = \frac{m}{n}$, 　m, n を正整数とする（背理法）.

$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}$, $R_{n+1} = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$, 　$0 < \theta < 1$.

$n!R_{n+1}$ は整数, $n!R_{n+1} = \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}$.

$n = 1$ となってしまう. これは矛盾. □

例 2.35. $\log(1+x)$ については $-1 < x < 1$ で次の級数展開が成り立つ. これを証明せよ.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad (-1 < x < 1)$$

証明. $f(x) = \log(1+x)$ とすれば, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ となるから 式 (2.11) によって級数展開は上の形になる. 収束を確かめるのに 2 つの場合に分けて考えよう. まず, $0 \leqq x \leqq 1$ のときは, Lagrange の剰余をつかうと,

$$R_n = \frac{1}{n}\frac{x^n}{(1+\theta x)^n} < \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

また $-1 < x < 0$ のときは, Cauchy の剰余をつかうと,

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$$

であるから

$$|R_n| = \frac{|x|^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n} = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\frac{|x|^n}{1+\theta x} < \frac{|x|^n}{1+x} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

結局, 展開式は $-1 < x \leqq 1$ のときにはつねに $\log(1+x)$ に収束することになる □

問 22. $|x| < 1$ のとき, 次の級数展開が成り立つことを示せ.

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots)$$

例 2.36 (一般の 2 項定理)**.** $|x| < 1$ のとき, 任意の実数 α に対して,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \tag{2.15}$$

が成り立つ.

証明. $f(x) = (1+x)^\alpha$ とおくと, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ であるから, $f(x)$ の級数展開は上の形になる. Cauchy の剰余を考えると,

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n} \right| \quad (0<\theta<1) \\ &= \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}\alpha x \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-1} \right| \end{aligned}$$

である. $n \to \infty$ とするとき, 右辺の第 3, 第 4 の因数はともに有界である. なぜならば, $0 < \theta < 1, |x| < 1$ であるから, $(\frac{1-\theta}{1+\theta x})^{n-1} \leqq 1 (n > 1)$ であり,
$\alpha \geqq 1$ のときは $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leqq (1+|x|)^{\alpha-1}$
$\alpha < 1$ のときは $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leqq (1-|x|)^{\alpha-1}$
であるからである. ゆえに $R_n \to 0 (n \to \infty)$ を証明するには,

$$\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} \to 0 \quad (n\to\infty) \tag{2.16}$$

であることを証明すればよいことになる. そこで,
$a_n = \left|\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}\right|$ とおくと, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-n}{n}x = |x| < 1$ であるから, 演習問題 問題 6(37 ページ) によって, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ になる. ゆえに式 (2.16) が成り立つことがわかる. したがって, 式 (2.15) が得られる. □

注意 一般の二項定理で, α が正の整数になると, 級数は有限項で終わり, 任意の x に対して成り立つことになる. これが普通の二項定理である.

例 2.37. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots, \quad (|x| < 1).$

証明. 例 2.20(53 ページ) より解る。式（6.18）(297 ページ) も参照。 □

問 23. $|x| < 1$ のとき, 次の級数展開が成り立つことを証明せよ

(1) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$

(2) $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots + (-1)^n (n+1) x^n + \cdots$

(3) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n + \cdots$

(4) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}x^n + \cdots$

関数の近似値と誤差

関数 $f(x)$ が $x = a$ の近傍で n 回微分可能であるときは, Taylor の定理 2.10 から $b = a + h$ に対して

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

$$R_n = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a + \theta h) \quad 0 < \theta < 1$$

が成り立つ, このとき R_n が小さければ, $f(a+h)$ の近似値として,

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

をとることができる. このときの誤差は R_n であるが, もし a の近傍で $f^{(n)}(x) < M$ であれば, $R_n \leqq \frac{h^n}{n!}M$ であるから, 誤差の限界は $R_n \frac{hn}{n!}M$ で与えられる.

次に, Newton の方法によって得られる解の近似値の誤差について考えてみよう.

例 2.38. $f(x) = 0$ の解 $\bar{x}$ を含む閉区間 $I = [\bar{x} - d, \bar{x} + d]$ で $f'(x) \neq 0, f''(x) > 0$ は連続であって $\left|\frac{f(x)f'(x)}{\{f'(x)\}^2}\right| \leqq k < 1$ とする. *§2.8* (*56* ページ) でのべたように, *Newton* の方法によって, I に属する任意の点 x_0 から出発

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.17}$$

で $x_n(n = 1, 2, \cdots)$ を計算すると，これが解 $\bar{x}$ の近似値を与えることになる．このとき, 次の式が成り立つことを証明せよ

$$|x_{n+1} - x_n| \leqq \frac{M}{2K}(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, \cdots).$$

ただし ，K, M は 区間 I で $0 < K \leqq |f'(x)|, |f''(x)| \leqq M$ をみたす定数である．

証明．Taylor の定理によって

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_n) + (\bar{x} - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(\bar{x} - x_n)^2 f''(\xi), \tag{2.18}$$

ただし,

$$\xi = x_n + \theta(\bar{x} - x_n), (0 < \theta < 1).$$

一方式 (2.17) から

$$f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = 0. \tag{2.19}$$

式 (2.18) と式 (2.19) との差をとって

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = \frac{1}{2}(\bar{x} - x_n)^2 \frac{|f''(\xi)|}{|f'(x_n)|} \leqq \frac{M}{2K}(\bar{x} - x_n)^2.$$

□

例えば $f(x) = x^2 - 2$ とすれば $f'(x) = 2x, f''(x) = 2$ である. ゆえに $d = 10^{-1}$ にとると, 閉区間 $[2 - 10^{-1}, 2 + 10^{-1}]$ で上の条件がみたされる. このとき $K = \frac{5}{2}, M = 2$ にとることができる.

2.11.1　曲線の凹凸と変曲点

区間 I で曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きが x の増加につれて大きくなるとき，曲線 $y = f(x)$ は区間 I で下に凸あるいは上に凹であるという.

また，区間 I で曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きが x の増加につれて小さくなるとき，曲線 $y = f(x)$ は区間 I で上に凸あるいは下に凹であるという.

これは幾何学的には, 点 P をとおり y 軸に平行な直線が P_1P_2 と交わる点を Q とするとき, 点 P が点 Q より上には出ない事を表わしている. 点 P は弧 P_1P_2 上の任意の点であるから, これは弧 P_1P_2 が弦 P_1P_2 の上方には決して出ない事を表わしている.

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \tag{2.20}$$

定理 2.17. 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき, $f(x)$ が区間 I で凸であるための必要十分条件は $f'(x)$ が I で増加関数である事である.

証明. $f(x)$ が I で凸であるとする. 式 (2.20) で x_1, x_2 を固定して, $x \to x_1$ とすれば,

$$f'(x_1) \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

また, $x \to x_2$ とすれば,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq f'(x_2)$$

したがって,

$$f'(x_1) \leqq f'(x_2)$$

ところで, x_1, x_2 は $x_1 < x_2$ である I の任意の 2 点であるから, 上の不等式は $f'(x)$ が I で増加関数である事を示している.
逆に $f'(x)$ が I で増加関数であるとする. 平均値の定理から, 式 (2.20) の左辺式 (2.20) の右辺であって, $\xi_1 < \xi_2$ であるから,

$$f'(\xi_1) \leqq f'(\xi_2)$$

となり, 式 (2.20) が成り立つ. すなわち, $f(x)$ は I で凸となる. □

この定理から, 直ちに次の系 1 がえられる.

系 2.17.1. $f(x)$ が *2* 回微分可能であるとき, $f(x)$ が I で凸であるための必要十分条件は, I でつねに $f''(x) \geqq 0$ となることである.

系 2.17.2. 微分可能な関数 $f(x)$ が I で凸であれば, 区間 I では $y = f(x)$ のグラフは, その上の任意の点における接線より上に出ることはない.

証明. 区間 I の任意の二点 $x = a, x = a + h$ に対応するグラフ上の点をそれぞれ P, Q とし, Q から x 軸に下した垂線の足を S, QS と P における接線との交点を T としよう. 接線の方程式は, $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ であるから, 平均値の定理によって,

$$SQ - ST = f(a+h) - (f(a) + hf'(a)) = h(f'(a+\theta h) - f'(a))(0 < \theta < 1)$$

定理から $f'(x)$ は増加関数であるから, h が正でも負でも, $SQ \geqq ST$ すなわち Q は T より下にはならない. したがって, $y = f'(x)$ のグラフはその接線より下に出ることはない. □

式 (2.20) で不等号を逆向きにした不等式が I で常に成り立っているとき, $f(x)$ は I で下に凸, あるいは I で凹であるという.

注意 $f(x)$ が凹ならば $-f(x)$ は凸になる. したがって, 定理 2, 17 とその系から, $f(x)$ が凹であるための必要十分条件は $f'(x)$ が減少関数であることであり, $f''(x) \leqq 0$ であることである. また, $f(x)$ が凹ならば, $y = f(x)$ のグラフはその接線より上に出点 $(a, f(a))$ の左右で関数 $f(x)$ の凹凸の種類が変わるとき, このような点を $y = f(x)$ の変曲点という. ゆえに, $f(x)$ が 2 回微分可能で $x = a$ の左右で $f''(x)$ の符号が変わっているときには, $(a, f(a))$ は変曲点である. このことから, $f''(a) = 0$ で $f'''(a) \neq 0$ であるときは, $(a, f(a))$ は変曲点であることがいえる.

2.11.2 円周率は無理数であることの証明

n を任意の自然数として

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (q - px)^n$$

とおく.p, q は任意の整数定数.

[*6] $f(x)$ は x の $2n$ 次の多項式で x^n より低次の項はなく，また関数等式 $f(\frac{q}{p}-x)=f(x)$ をみたす.
$f(x)$ の定義から，$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{n-1}(0)=0$.
$n \leqq k \leqq 2n$ ならば $f^{(k)}(0)=\frac{k!}{n!}\times($ 整数 $)$.
なぜならば

$$f(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i q^{n-i}(-p)^i x^{i+n}=\sum_{j=n}^{2n} {}_nC_j q^{2n-j}(-p)^{n-j}\frac{1}{n!}x^j$$

多項式 $f^{(k)}(x)$ の定数項は ${}_nC_k q^{2n-k}\frac{(-p)^{n-k}}{n!}k!$ であるからである.

$$F(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x)$$

とおけば

$$\frac{d}{dx}[F'(x)\sin x-F(x)\cos x]=f(x)\sin x$$

これだけ準備して円周率 π が無理数であることを背理法で証明しよう.

$\pi=\frac{q}{p}, p, q$ は整数としよう.

$f^{(0)}(\pi)=\cdots=f^{(n-1)}(\pi)=0, f^{(k)}(\pi)(n\leqq k\leqq 2n)$ は整数である. したがって $F(0), F(\pi)$ はともに整数である.

定積分 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx$ について次の 2 つの命題は $n\to\infty$ としてみると互いに矛盾している.

- $\int_0^\pi f(x)\sin x dx=[F'(x)\sin x-F(x)\cos x]_0^\pi=F(0)+F(\pi)=$ 整数.
- $0<x<\pi=\frac{q}{p}$ で $(q-px)^n<q^n$ だから $f(x)\sin x<\frac{q^n x^n}{n!}$,
  したがって

$$0<\int_0^\pi f(x)\sin x dx<\int_0^\pi \frac{q^n x^n}{n!}dx=\frac{q^n\pi^{n+1}}{(n+1)!}\longrightarrow 0.$$

[*6] $f(x)$ は厳格に記せば $f_{n,p,q}(x)$ とでも記さねばならないが煩雑になるので単に $f(x)$ とした.

♡♠2 章の演習問題 ♡♠

1. 次の関数を微分せよ.

(1) $\dfrac{1}{2}\log|\dfrac{1+x}{1-x}|$　(2) $\log|x+\sqrt{x^2-1}|$

(3) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$　(4) $x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$

(5) $x^x\ (x>0)$　(6) $\log|\cos x|$

(7) $x\sqrt{x^2-1}-\log|x+\sqrt{x^2-1}|$

(8) $x\sqrt{x^2+1}+\log|x+\sqrt{x^2+1}|$

2. 曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$　a は正定数，の接線が両座標軸にはさまれる部分の長さは一定 a であ ることを証明せよ.

3. 曲線の接線と接点で直交する直線を, その点における曲線の法線という. 曲線 $xy^2+3xy-8=0$ 上の点 $(2,1)$ における法線の方程式を求めよ.

4. $x=f(t), y=g(t)$ は微分可能，として

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g''f'-g'f''}{f'^3}.$$

但し g'' 等は t についての微分.

5. 媒介変数をつかって表されている次の関数について $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求 めよ.

(1) $x=a\sec\theta, y=b\tan\theta$ a,b は定数　(2) $x=a\cos 3t, y=a\sin 3t$

6. 次の関数のグラフを描け.

(1) $\dfrac{x^3}{1-x}$　(2) $e^{-x}\sin 2x$

7. $f(x)$ が (a,b) で微分可能で

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to b-0}f(x)=\infty$$

であるならば, $f'(\xi)=0(a<\xi<b)$ が成り立つような ξ が少なくとも 1 つあることを証明せよ.

8. $f(x)$ が有限区間 I で微分可能で, $f'(x)$ がそこで有界であるならば, $f(x)$ もまた I で有界になることを証明せよ.
9. 方程式 $f(x)=0$ の解を含む区間 I で $f'(x)>0, f''(x)>0$ であるとする. Newton の方法での近似値を求めるのに, $x_1>0$ である I 内の任意の点から出発すれば $\{x_n\}$ は有界な単調数列になることを証明せよ.
また I で $f''(x)<0$ であるときには, $x_1>0$ をどのようにとれば $\{x_n\}$ が有界な単調 数列になるか.
10. Newton の方法で, 次の方程式の実根の近似値を求めよ.
(1) $x^3-3=0$　(2) $x-\cos x=0$　(3) $x^3-2x^2+x+2=0$
11. $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき,
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)$$
となることを証明せよ.
逆に左辺の極限値が存在するときは, $f(x)$ は $x=a$ で微分可能になるか.
12. $f(x)$ が x の n 次の多項式であるとき, $x=\alpha$ が方程式 $f(x)=0$ の k 重根であるため の必要十分条件は
$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(k-1)}(\alpha)=0, f^{(k)}(\alpha)\neq 0$$
であることを証明せよ.
13. $x>0$ のとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.
(1) $x-\frac{x^3}{6}<\log(x+\sqrt{1+x^2})<x$　(2) $\cos x+\sin x>x-x^2$
14. 次の方程式の実根の個数を求めよ.
(1) $x^3-x+a=0$　(2) $\arctan x=\frac{x}{1+x^2}+a$
15. $x=a$ を含む区間 $[c,d]$ で $f''(x)>0$ であるときは
$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
はこの区間で x の増加関数であることを証明せよ. ただし $\varphi(a)=f'(a)$ とする

16. (1) 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 接線が両軸と交わる点を P, Q とする．PQ の最小値を求めよ．

(2)(1) で座標の原点を O とするとき, $\triangle OPQ$ の面積の最小値を求めよ．

17. 空気中の光の速さを u, 水中での光の速さを v とする. 光が空気中の点 A から水中の点 B に達するのに, 所要時間が最小にになる径路を通る. このとき, 次の式が成り立つ ことを証明せよ. ただし α は入射角，β は屈折角である.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{u}{v}$$

18. 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+e^x)}{x}$	(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 3x\tan x$
(3) $\lim_{x\to 1}(1-\log x)^{\frac{1}{\log x}}$	(4) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$
(5) $\lim_{x\to\infty}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$	(6) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$

19. 次の曲線の概形をかけ.

(1) $y=x^2-\frac{1}{x}$	(2) $y=\{x(x-1)\}^{\frac{1}{3}}$
(3) $y=e^{-x}x^{s-1}\ (x>0)\ (s=0.5,1,2)$	(4) $y=\frac{x}{\log x}(x>0)$
(5) $r=a\sin\frac{\theta}{2}$	(6) $xy=(x^2+y^2)^2$

20. 関数 $f_i(x), g_i(x), h_i(x)(i=1,2,3)$ が微分可能であるとき,

(1)

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_1' & f_2 \\ g_1' & g_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1 & f_2' \\ g_1 & g_2' \end{vmatrix}$$

(2)

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_1' & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2 & g_3 \\ h_1' & h_2 & h_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1 & f_2' & f_3 \\ g_1 & g_2' & g_3 \\ h_1 & h_2' & h_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3' \\ h_1 & h_2 & h_3' \end{vmatrix}$$

となることを証明せよ.

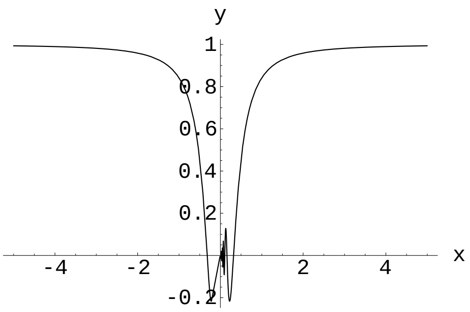

図 2.4　離れて見た.$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$.

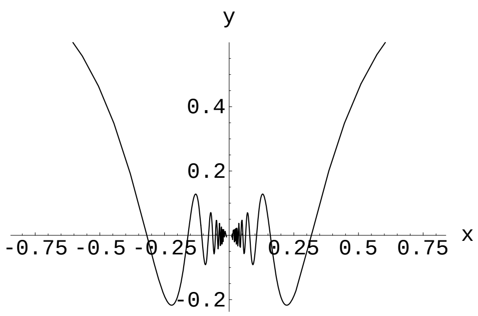

図 2.5　近くから見た.

21. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}(x \neq 0), f(0) = 0$ で定義された関数 $f(x)$ は, $x = 0$ で連続であるが微 分可能ではないことを示せ. 図 2.4, 図 2.5 参照.

22. 次の関数の $x = 0$ における微分可能性をしらべよ.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

23.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x} + \pi & x > 0 \text{ のとき} \\ \pi & x = 0 \text{ のとき} \\ \arctan\frac{1}{x} & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である. および

関数 $y = f(x), y = \arctan\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$ のグラフを描け.

24. 次の手順で円周率の近似値が 3.14 であることが論証つきで解る. 例 (10a),(38 ペ-ジ)；例 (2.37),(71 ペ-ジ)

$$\arctan\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \alpha_1$$

ここで $\alpha_1 < \frac{1}{9\cdot 2^9} < 3\times 10^{-4}$ である。なぜだろうか, 自分で考えよう。

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} = 0.4634 + \alpha_2$$

ここで $\alpha_2 < 10^{-4}$ である。

同様にして

$$\arctan\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \beta_1$$

ここで $\beta_1 < \frac{1}{7\cdot 3^7} < 10^{-4}$ である。

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} = 0.3218 + \beta_2$$

ここで $\beta_2 < 10^{-4}$ である。

$$\pi = 4(0.4634 + 0.3218 + \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2)$$

$$\pi = 3.1408 + 4(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2)$$

ここで少し大雑把な評価式ではあるが

$$-4\times 10^{-4} < 4(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2) < 20\times 10^{-4}$$

が成り立っている。

故に円周率 π の近似値として 3.14 は正しい。[*7]

25. 定理 2.5（47 ページ）の証明で ε_2 の定義を単に $\varepsilon_2 = \frac{\Delta z}{\Delta y} - g'(y)$ とすると論証がうまくいかないのに気がつかれただろうか？. 何故だろうか？高校数学 III の該当部分の説明と見比べてみよう.
26. $(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
問題 11 (38 ページ) を参照.

[*7] 長桁，例えば 1000 桁求めるには Machin の公式 10b（38 ページ）を使う. コンピュータ・プログラミングの好きな人はやってみられたし. 現代の supercomputing は数時間で 200 億桁計算するとの報告がある.

図 2.6　ある日の鹿大構内

第 3 章

積分

自然現象を数理的に表現しようとすると積分がしばしば登場します．応用現場で定積分を数値として求めようとするとき，数学としての認識を正しく持っていることが必要です.

図 3.1　フランス革命時に庶民でも入学出来る学校, パリ理工科学校ができた。A.L.Cauchy は近代解析学の端緒を開いた。[*1]

[*1] 青年 Cauchy はこの学校で勉強した。コーシー (1789-1857), フランス

3.0　ちょっと復習

高校で習ったことを復習しながら " 大学の積分 " に入っていこう。身近な題材から準備運動で脳細胞を鍛える。

1. 直線上を運動する点 P の，時刻 t における速度が $v=2\sqrt{t+1}-4$ で与えられている。$t=0$ から $t=8$ までに点 P が動いた道のりを求めよ。およびで $t=8$ の点 P の場所を求めよ。
2. 座標平面上に 2 点 $P(x,0), Q(x,\cos x)$ をとり，線分 PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を座標平面に垂直につくる．P が x 軸上を点 $A(-\frac{\pi}{2},0)$ から点 $B(\frac{\pi}{2},0)$ まで動くとき，この正三角形が動いてできる立体の体積を求めよ．

3.1　定積分とは“ 面積 ” である

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ とは関数 $y=f(x)$ のグラフの曲線と x 軸，左右 $x=a,b$ で区切られた部分の（正負をつけた）“ 面積 ” のことです．まずは簡単な例から．

3.1.1　区分求積法

例 3.1. 曲線 $y=x^2$ の閉区間 $[0,1]$ で区切った部分の面積を求めよう．n を任意の自然数とする．区間 $[0,1]$ を n 等分して

$$0=x_0<x_1=\frac{1}{n}<x_2=\frac{2}{n}<\cdots<x_{n-1}=\frac{1}{n-1}<x_n=1 \tag{3.1}$$

とする．右のような棒グラフを作ってこの長方形達の面積の総和を S_n としよう．すなわち

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})
\end{aligned}
$$

ここで $n \to \infty$ とすると $S_n \to \frac{1}{3}$. これが曲線と囲む面積である．

例 3.2. こんどは曲線 $y = e^x$ で閉区間 $[0, 1]$ で区切った部分の面積を求めよう．同じように式 *(3.1)* で分割する．また同じように棒グラフを作ってこの長方形達の面積の総和を S_n とする．

$$
S_n = e^{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{n} + e^{\frac{2}{n}} \times \frac{1}{n} + \cdots + e^{\frac{n}{n}} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}\right)
$$

となって初項 $e^{\frac{1}{n}}$，公比 $e^{\frac{1}{n}}$ である等比級数になる．

　したがって

$$
S_n = (1-e)\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}\frac{1}{n}
$$

$x = 1-e^{\frac{1}{n}}$ とおくと $S_n = (1-x)\frac{\log(1-x)}{x}(1-e)$. により $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)}{x} = -1$ だから，$\lim_{n\to\infty} S_n = e-1$ となる．

ここでちょっと高校の復習.

1. 等比級数の n 項までの和 S_n，初項を a，公比を $r(\neq 1)$ とする.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

2. 次は応用されている.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

3. 次も応用されている.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

問 1. 上記を計算で確かめよ.

3.2　定積分の意味をもう少し詳しく正確に

さて $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とし，次のような点 $x_i(i = 0,1,\cdots,n)$ でこの区間を n 個の小区間に分割する.

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b \qquad (\Delta)$$

この分割を Δ で表し,$|\Delta| = \max_{1\leqq i\leqq n} \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$ とする．区間の列 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots$ で $|\Delta_m| \to 0 (m \to \infty)$ はこの区間列が閉区間 $[a,b]$ を至るところ細かく分割していくことを意味する．いま, 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の中に点 ξ_i を任意にとり

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

をつくると, 次の定理が成り立つ ($S(\Delta)$ を関数 $f(x)$ の分割 Δ に関する Riemann 和という).

定理 3.1. 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続とする．$|\Delta| \to 0$ のとき

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

の極限は，$[a,b]$ の分割 Δ の仕方および点 $\xi_i (i=1,\cdots,n)$ のとりかたに関係なく唯ひとつの実数 I に収束する．

証明. 定理を証明するには，次のことを示せばよい．すなわち，一定の値 I があって，任意の正数 ε に対して適当な正数 δ を選ぶと，$[a,b]$ の分割 Δ に対して $|\Delta| < \delta$ であるならば，つねに

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon \tag{3.2}$$

が成り立つことを証明すればよい．ただし ξ_i は $[x_{i-1}, x_i]$ 内の任意の点である．

$f(x)$ は $[a,b]$ で連続であるから $[a,b]$ で一様連続である．したがって任意の正数 ε に対して，適当に δ をえらべば，$|x' - x''| < \delta$ であるような $[a,b]$ 内の 2 点 x', x'' に対してつねに

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \tag{3.3}$$

がなりたつようにすることができる．いま $|\Delta'| < \delta, |\Delta''| < \delta$ であるような任意の分割

$$a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_j < \cdots < x'_l = b \tag{Δ'}$$

$$a = x''_0 < x''_1 < \cdots < x''_k < \cdots < x''_m = b \tag{Δ''}$$

を考え，これらに対する $f(x)$ の Riemann 和

$$S(\Delta') = \sum_{j=1}^{l} f(\xi'_j)\Delta x'_j \quad (x_{j-1} \leqq \xi'_j \leqq x'_j, \Delta x'_j = x'_j - x'_{j-1})$$

$$S(\Delta'') = \sum_{k=1}^{m} f(\xi''_k)\Delta x''_k \quad (x''_{k-1} \leqq \xi''_k \leqq x''_k, \Delta x''_k = x''_k - x''_{k-1})$$

をつくる．次に Δ', Δ'' の共通の細分を考える．すなわち Δ', Δ'' の分点を合わせて, これらを大きさの順にならべたものを分点にもつような分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b \tag{Δ}$$

を考え, これに対する Riemann 和

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

をつくる．Δ' の小区間 $[x'_{j-1}, x'_j]$ は Δ によって, 細分されているから, $x'_{j-1} = x_p < x_{p+1} < \cdots < x_{p+q} = x'_j$ のようになっている．式 (3.3) から

$$\begin{aligned}
\left| f(\xi'_j)\Delta x'_j - \sum_{i=p+1}^{p+q} f(\xi_i)\Delta x_i \right| &\leqq \sum_{i=p+1}^{p+q} \left| f(\xi'_j) - f(\xi_j) \right| \Delta x_i \\
&< \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{i=p+1}^{p+q} \Delta x_i \\
&= \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \Delta x'_j
\end{aligned}$$

この式は $j = 1, 2, \cdots, l$ に対して成り立つから, それらを加え合せると,

$$\begin{aligned}
|S(\Delta') - S(\Delta)| &= \left| \sum_{j=1}^{l} f(\xi'_j)\Delta x'_j - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{j=1}^{l} \Delta x'_j = \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

同様にして

$$|S(\Delta'') - S(\Delta)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

したがって

$$|S(\Delta') - S(\Delta'')| \leqq |S(\Delta') - S(\Delta)| + |S(\Delta') - S(\Delta)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.4}$$

となる．

いま $[a,b]$ を n 等分してできる分割 Δ_n を考え，ξ_i としてその分点をと った Riemann 和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{b-a}{n} i) \frac{b-a}{n}$$

をつくり，これに対して上の結果を適用すると，$m, n > \frac{b-a}{\delta}$ であれば，つねに

$$|S_n - S_m| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.5}$$

が成り立つことになる．このことは数列 $\{S_n\}$ が Cauchy 列になっているこ と を表わしている．ゆえに $\{S_n\}$ は収束し，$\lim S_n = I$ が存在する．したがっ て (3.5) で $m \to \infty$ とすると $S_n - I \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ となる．ところが，(3.4) で $\Delta'' = \Delta_n$ と考えると，$|S(\Delta') - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ であるから

$$|S(\Delta') - I| \leqq |S(\Delta') - S_n| + |S_n - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる．Δ' は $|\Delta'| < \delta$ である任意の分割であったから，これは (3.2) の成り立つことを示している． □

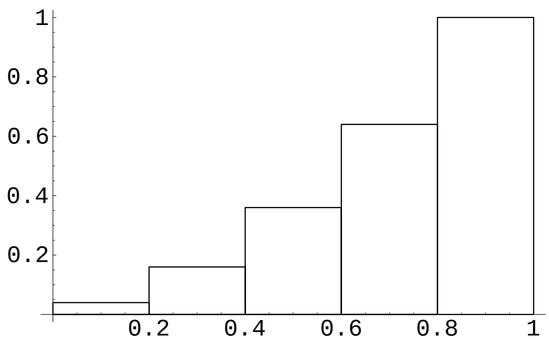

図 3.2　区分求積法

定理 3.1 の $I = \lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta)$ を $\int_a^b f(x)dx$ とかき，これを a から b までの $f(x)$ の定積分，あるいは $[a,b]$ における $f(x)$ の定積分とよぶ．$a \geqq b$ のと

きにも定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を考え,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \int_a^a f(x)dx = 0$$

であるとする.
注意 不定積分 $\int f(x)dx$ は x の関数であるが, 定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は定数である.
定積分の場合にはその意味から文字 x を他の文字でおきかえても値は変わらない. した がって, たとえば

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

である. x, t, u などを積分変数という.

例 3.3. $\int_a^b kdx = k(b-a)$ *(k は定数)* を証明せよ.

証明. $a < b$ とし, $[a, b]$ の任意の分割を

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_< ... < x_n = b$$

として *Riemann* 和 $S(\delta)$ をつくると

$$S(\delta) = \sum_{i=1}^{n} k\delta_{x_i} = k\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} = k(b-a)$$

したがって,

$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$

$a \geqq b$ のときも, $\int_a^b kdx = k(b-a)$ となることは定義から明らかである. □

例 3.4. 例 *3.1* より $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ と書いても良い.
同じく例 *3.2* より $\int_0^1 e^x dx = e - 1$ と書いても良い.

3.2.1　定積分の性質

ここで扱う関数はいちいち断らないがすべて積分区間で連続であるとする.

定理 3.2. *1.* $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.(復号同順)

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$　(k は定数).

3. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

証明.　1. $a < b$ の場合を証明しておけば十分である, 閉区間 $[a, b]$ の任意の分割を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b \tag{Δ}$$

とし, $\xi_i, i = 1, \cdots, n$ を $[x_{i-1}, x_i]$ 内の任意の点として, Riemann 和を考えると,

$$\sum_{i=1}^{n}\{f(\xi_i) + g(\xi_i)\}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

ここで, $|\Delta| \to 0$ とすると, 定理 3.1 から

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. 証明は (1) と同様である.

3. まず, $a < c < b$ の場合を考えよう.　$[a, c]$ の任意の分割を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = c \tag{Δ_1}$$

$[c, b]$ の任意の分割を

$$c = x_{n+1} < x_{n+2} < \cdots < x_j < \cdots < x_m = b \tag{Δ_2}$$

とすれば,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{j=n+1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_j = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ただし, ξ_i は $[x_{i-1}, x_i]$ 内の任意の点である．上の式で, $|\Delta_1|, |\Delta_2| \to 0$ とすると,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

次に, たとえば $a < b < c$ の場合には, 上の結果から

$$\int_a^c f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

したがって

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

他の大小関係のときや, a, b, c のうち 2 数が等しいときにもすべて上と同じようにして証明される．

□

3.3　定積分とその基本的性質

定理 3.3. 閉区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

である．

証明. $[a, b]$ の任意の分割を $(\Delta)\quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ とすれば,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqq \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \quad (x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

したがってここで,$|\Delta| \to 0$ とすると,

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

□

問 2. $[a,b]$ で，$f(x), g(x)$ が連続で $f(x) \geqq g(x)$，しかも $[a,b]$ 内のある点 c で $f(c) > g(c)$ であるときは $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$ である，これを証明せよ

問 3. $a < b$ ならば,$|\int_a^b f(x)dx| \leqq \int_a^b |f(x)|dx$ であることを証明せよ.

定理 3.4 (積分についての平均値の定理)**.** 関数 $f(x)$ が点 a, b を含む区間で連続であれば $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ となるような点 c が *2* 点 a, b の間に必ず存在する.

証明. $a < b$ の場合を考えよう．閉区間 $[a,b]$ で $f(x)$ が一定であれば定理は明らかに 成り立つから, そうでない場合を考える.

閉区間 $[a,b]$ における $f(x)$ の最大値を M, 最小値を m とすれば, 閉区間 $[a,b]$ で $m \leqq f(x) \leqq M$ したがって, 例 3.3 によって $\int_a^b mdx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b Mdx$.

定理 3.3 から, $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$ したがって $m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx < M$ ゆえに中間値の定理 1.9（24 ページ）によって $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)(a < c < b)$ となる点 c が存在する.

すなわち $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ となるような点 c が存在する.

$a \geqq b$ の場合は省略. □

問 4. 閉区間 $[a,b]$ で $f(x), g(x)$ が連続で $g(x) \geqq 0$ ならば,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx, \quad a \leqq \xi \leqq b$$

となる ξ が存在する．これを証明せよ.

3.4　基本定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続であるとき, $[a,b]$ 内の任意の点 x に対して定積分 $\int_a^x f(t)dt$ を考えると，これは $[a,b]$ を定義域にもつ関数になる．この関数を $f(x)$ の不定積分という.

関数 $G(x)$ が在って $[a,b]$ で微分可能，$G'(x) = f(x)$ であるとき，$G(x)$ を

表 3.1　不定積分の公式表

$f(x) = F'(x)$	$F(x)$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert \quad (x \neq 0)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert \quad (x \neq \pm 1)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\log(x+\sqrt{x^2+1})$
$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$
$\sqrt{x^2-1} \quad (\lvert x\rvert \geqq 1)$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}-\log\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert)$
$\sqrt{x^2+1}$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1}+\log\lvert x+\sqrt{x^2+1}\rvert)$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$\log\lvert\sin x\rvert$

$f(x)$ の原始関数とよぶ.

$G(x)$ を $\int f(x)dx$ と書く.

$G_1(x), G_2(x)$ が共に $f(x)$ の原始関数のとき，$G_1(x)$ と $G_2(x)$ は定数の差しかない．すなわち $G_1(x) - G_2(x)$ は定数関数．本書では積分定数を書くのは省略する.

定理 3.5. $f(x)$ が $[a,b]$ で連続あれば, $\int_a^x f(t)dt$ は x について微分可能であって $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)(a < x < b)$ となる.

証明. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とおくと $[a,b]$ に属する 2 点 $x, x+h(h>0)$ に対して, 定理 3.4 から

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x+h\theta) \quad (0<\theta<1)$$

ここで,$h \to 0$ とすれば,$f(x+h\theta) \to f(x)$ であるから $F(x)$ は微分可能であって, $F'(x) = f(x)$ となる. □

注意 この定理は, 連続な関数 $f(x)$ は必ず原始関数をもっていることを示している.

問 5. 関数 $f(x)$ が連続であるとき,

(1) $\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)dt$　*(2)* $\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} f(t)dt$　*(3)* $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt$　を求めよ.

問 6. $f(x)$ を $[a,b]$ で連続な単調増加関数とすれば,

$$E(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$$

は $(a,b]$ で連続な単調増加関数であることを証明せよ.

次の定理は多分，誰でも知っているだろう有名な定理.

定理 3.6 (微分積分法の基本定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ の *1* つの原始関数を $F(x)$，すなわち $a \leqq x \leqq b$ である任意の点 x について $F'(x) = f(x)$ とすれば

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

である.

証明. $F(x)$ も $\int_a^x f(t)dt$ も $f(x)$ の原始関数であるから

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C \quad (C \text{ は定数})$$

ところが，$F(a) = C, F(b) = \int_a^b f(t)dt$ となる.
積分変数 t を x で書いても良いから.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3.6}$$

となる. □

式 (3.6) の右辺を $[F(x)]_a^b$ と書く.
定積分の値を求めるには原始関数が解れば良いということになった[*1].

不定積分と原始関数とは定数の差しかないことも解る．種々の導関数の計算例から沢山の不定積分の例が出来る．94 page に表にしてあるから参考にされたし.

問 7. もう一遍，導関数を求める計算により *94* ページ，表 *3.1* の公式集を確認せよ.

例 3.5. $y = \frac{1}{2}(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2})$ とすると $y' = \sqrt{a^2 - x^a}$.

[*1] これについては基本定理の認識形成の過程についての面白い考察がある．村田全 [5] 第 IV 章 6,202page 参照

したがって $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^a}dx=\frac{1}{2}\left|a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right|_{-a}^{a}=\frac{\pi a^2}{2}$.
これから円の面積が解る.

例 3.6. 次は正しくない計算例. いずれも $x=0$ でその被積分関数が連続でないからです.

1. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=|\log x|_{-1}^{1}=0$
2. 少し手の込んだ誤り例　$(-\arctan\frac{1}{x})'=\frac{1}{x^2+1}$,　$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{1+x^2}dx=|-\arctan x|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=-\frac{\pi}{2}$　この定積分の値は正のはずです.

3.5　不定積分を求める計算

3.5.1　置換積分

$$F(x)=\int f(x)dx$$

において, $x=g(t)$ とすると, $F(x)=F(g(t))$ は t の関数となる. これを t について微分すると, 合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\frac{dx}{dt}=f(x)\frac{dx}{dt}$$

したがって,

$$F(x)=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt$$

ここで,

$$f(x)=f(g(t)),\frac{dx}{dt}=g'(t)$$

であるから, 次の公式がえられる.

定理 3.7 (置換積分の公式:不定積分の場合)**.**

$$\int f(x)dx=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt=\int f(g(t))g'(t)dt \tag{3.7}$$

このように, 変数を置き換えて積分する方法を 置換積分法という.

元来, 記号 dx, dt には各々に独自の意味はないが置換積分の計算においては

$$dx = g'(t)dt$$

と記すのは便利である.
式 (3.7) は左辺から右辺へおよび右辺から左辺へ, と 2 通りのやりかたで応用される. 次の例は左辺から右辺への場合である.

例 3.7. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ 　(a は定数 $a > 0$) は例 *3.5* でもやったがここでは置換積分で求めてみよう.

$x = a\sin t \quad -\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ とおく.

$dx = a\cos t dt$ だから

$$\begin{aligned} I &= a^2 \int \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) \\ &= \frac{1}{2}(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}) \end{aligned}$$

例 3.8.

$$I = \int \arcsin x dx$$

証明. $y = \arcsin x$ とおく. $x = \sin y, dx = \cos y dy$ となる.

$I = \int y \cos y dy = \int y(\sin y)' dy = y \sin y - \int y \sin y dy = y \sin y + \cos y = x \arccos x + \sqrt{1 - x^2}$. □

問 8. $I = \int \arccos x dx$ を求めよ.

次の例は右辺から左辺への場合である.

例 3.9. 不定積分 $\int (2x-3)^4 dx$

$2x - 3 = t$ とおくと, $x = \dfrac{t+3}{2}, \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}$ であるから,

$$\begin{aligned}&\int(2x-3)^4dx\\ &=\int t^4\tfrac{1}{2}dt\\ &=\tfrac{1}{10}t^5+C\\ &=\tfrac{1}{10}(2x-3)^5+C\end{aligned}$$

問 9. 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ [*2]を求めよ.

問 10. 不定積分 $\displaystyle\int\frac{\cos(2\log x)}{x}dx$ を求めよ.

有理関数

有理関数の不定積分の計算例を見よう．有理関数とは $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$（$P(x), Q(x)$ は多項式)，の形の式で書けるものである.

例 3.10. $a, b(\neq)$ を定数とすると

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)$$

であるから

$$\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$$

である.

例 3.11.

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a},\quad (a\neq 0 \text{ は定数})$$

問 11.

$$\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

を求めよ.

[*2] $\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ の意味である．以下でも dx を分子に乗せた形で書くことがある.

例 3.12.

$$\int \frac{dx}{x^3+1}$$

証明.

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}, \quad a, b, c \text{ は定数}$$

とおくと

$$a = \frac{1}{3},\ b = -\frac{1}{3},\ c = \frac{2}{3}.$$

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx$$

$$= -\frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\log|1+x| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

□

有理関数の不定積分は以上の例のように計算 ”出来る ”ことが知られている．すなわち有理関数と対数関数と arctan の和で書けるのである．しかし，その詳細は紙数が無いのでここでは述べない.

三角関数を含んでいる場合

F が $\sin x, \cos x$ の有理式で表されているとき不定積分

$$\int F(\cos x, \sin x)dx$$

は次のように求められるときがある.

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

として置換積分を考える.

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$x = 2\arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

だから

$$\int F(\cos x, \sin x)\, dx = \int F\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

となって t についての有理関数の不定積分を求めることに帰着される．

　このように原理的には計算できるが計算量が大きい場合が殆どである．

例 3.13.

$$I = \int \frac{1}{2+\sin x}dx$$

証明．$t = \tan\frac{x}{2}$ とすると

$$I = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}.$$

□

3.5.2　部分積分

例 3.14. $\int \log x dx = \int x'(\log x) dx = x\log x - \int x(\log x)' dx = x\log x - x$

例 3.15. $\int x\cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x\sin x - \int x'\sin x dx = x\sin x + \cos x$

例 3.16. $\int e^{ax}\sin bx dx$ を求めよ．但し $a^2+b^2 \neq 0$ とする．

証明．典型的な部分積分の計算である．ひとまず $b \neq 0$ としよう．

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^{ax} \sin bx dx \\
&= \int e^{ax} (-\frac{1}{b} \cos bx)' dx \\
&= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{1}{b} \int (e^{ax})' \cos bx dx \\
&= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx \\
&= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} (\frac{1}{b} \sin bx)' dx \\
&= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \left(\frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{1}{b} \int (e^{ax})' \sin bx dx \right) \\
&= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} \left(e^{ax} \sin bx - aI \right) \\
\therefore I &= \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx).
\end{aligned}
$$

この結果は $b = 0$ の場合を含む． □

問 12. $\int e^{ax} \cos bx dx$ を求めよ．但し $a^2 + b^2 \neq 0$ とする．

例 3.17. 次の不定積分は具体的に計算して求めることができます．ただし a, b, c 等は定数, P, Q は多項式, R は有 理式である．

1. $\int P(x) e^{ax} \cos bx dx, \int P(x) e^{ax} \sin bx dx$

2. $\int P(\cos a_1 x, \cdots, \cos a_p x, \sin b_1 x, \cdots, \sin b_q x) dx$

3. $\int e^{cx} Q(x) P(\cos a_1 x, \cdots, \cos a_p x, \sin b_1 x, \cdots, \sin b_q x) dx$

4. $\int R(x) \log x dx, \int R(x) \arctan x dx, \int R(x) \arcsin x dx$

ヒント：*2* では $\cos a_1 x, \sin b_1 x$ 等の積を和に直して簡約する．

　不定積分を求める計算技術は以上以外にも沢山知られている．コンピュータ

のソフトウェアーでもこれを目的にしているのもある[*3]．各自，自分で調べて実際，実験されてみると良い．

3.6　定積分を求める計算

例 3.18.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

証明. 公式の表 3.1（94 ページ）より

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log|x+\sqrt{x^2+1}|$$

$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \Big|\log|x+\sqrt{x^2+1}|\Big|_0^1 = \log(1+\sqrt{2})$. □

3.6.1　置換積分

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を求めるのに，$x = g(t)$ とおく．$a = g(\alpha), b = g(\beta)$ である α, β をもってくる．２つ以上あればどれをとってきても良い．このとき

定理 3.8 (置換積分の公式:定積分の場合)**.**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt. \tag{3.8}$$

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続な x の関数である．$x = \varphi(t)$ とおき，$\varphi(t)$ に関し次の条件をつける．

1. $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$．$t$ が α から β まで変わる間に x は連続的に a から b まで変わる（この途中で x が (a,b) の外に出てもよい）.
2. $\alpha \leqq t \leqq \beta$ の間で $\varphi(t)$ は t につき連続な導関数を持つ.
3. $\alpha \leqq t \leqq \beta$ で $f\{\varphi(t)\}$ は t の連続関数である．（x が途中で (a,b) のそとにでないときにはこれは当然である）.

[*3] Mathematica,Maple 等

不定積分の場合と同じく $dx = g'(t)dt$ と記すのは便利な記法で多くの場面で書かれている．

例 3.19. 不定積分を次のように置換 $1 - x^2 = t$ で行うとする．

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

これによって微分積分学の基本定理をつかえば

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}})$$

であるが，不定積分を最後までもっていかず，t のままで

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sqrt{1-x^2}dx = \left[-\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

としてよいことを示すのが上の方法である．ここに t での上下両端は $1 - x^2 = t$ において $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ または 0 とおいて得られた t の値である．

例 3.20.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta|\cos\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

例 3.21.

$$\int_2^{11} (x+1)\sqrt{x-2}dx$$

を求める．

$x - 2 = t$ とおくと $x = t + 2$ である．x が *2* から *11* まで動くとき t は *0* から *9* まで動く．

また $\frac{dx}{dt} = 1$ である．

よって $I = \int_0^9 (t+2+1)\sqrt{t}dt = \int_0^9 (t+3)t^{\frac{1}{2}}dt = \int_0^9 (t^{\frac{3}{2}} + 3t^{\frac{1}{2}})dt = \frac{756}{5}$

例 3.22.

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{を計算せよ．}$$

証明. $x = \sin\theta$ とすると $dx = \cos\theta d\theta$. 故に $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin\theta} d\theta$. ここで更に $t = \tan\frac{\theta}{2}$ と変数変換すれば $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+t+1} dt$ になる.$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dt = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. □

例 3.23. $a > 0$ を定数とする.

1.
$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^4\pi}{16},$$

2.
$$\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3a^4\pi}{16}.$$

証明. $x = a\sin\theta, \frac{-\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, dx = a\cos\theta,$ と変数変換すると

1.

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\cos^2\theta \cdot a d\theta \\
&= a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{4}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{a^3}{8}[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{a^3}{16}\pi
\end{aligned}$$

2. また

$$\begin{aligned}
\int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx &= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\
&= \frac{3a}{16}\pi
\end{aligned}$$

□

3.7　数値としての定積分を計算する，Simpson の公式

定積分の値は基本定理によって，計算されて求まるのですが，不定積分を求めるのが困難であるときも多い．それに仮に不定積分がわかっても代入したときの関数値を精度良く求めるのはこれまた難しいときがある．定積分は本来，Reimann 和の極限であるのでうまく Riemann 和で近似して定積分値を近似値として計算する技術が昔からあります．それを紹介しましょう．

3.7.1　Simpson の公式

閉区間 $[a, b]$ を $2n$ 等分して分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

を考え，$\Delta x_i = h = \frac{b-a}{2n}, y_i = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \cdots, 2n)$ とする．
そして各区間 $[x_{2k-2}, x_{2k}] \quad k = 1, \cdots, n$ では $f(x)$ を次の関数で近似する．
すなわち，
$x = x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$ のとき各々 $y = y_{2k-2}, y_{2k-1}, y_{2k}$ となるような x の 2 次式 $y = q_k(x)$ で $f(x)$ を近似する．このような 2 次式 $y = q_k(x)$ は

$$q_k(x) = c(x - x_{2k-1})^2 + d(x - x_{2k-1}) + y_{2k-1}, \quad c, d \text{ は定数}$$

と書かれ, $y_{2k-2} = ch^2 - dh + y_{2k-1}, y_{2k} = ch^2 + dh + y_{2k-1}$ が成り立つから, $c = \frac{1}{2h^2}(y_{2k-2} - 2y_{2k-1} + y_{2k}), d = \frac{1}{2h}(y_{2k} - y_{2k-2})$ となる．この 2 次式 $q_k(x)$ については

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} q_k(x)dx = \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \tag{3.9}$$

となっている．
そこで, これを $\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx$ の近似値としてとることにする．すなわち

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \doteqdot \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

そうすると

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx$$

であるから, $\int_a^b f(x)dx$ の近似値 S として

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{n}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}) \\ &= \frac{h}{3}[y_0+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})+y_{2n}] \end{aligned}$$

が得られる．これが Simpson の近似公式といわれているものである．

次に, この公式で定積分の近似値を計算したときの誤差について考えてみ よう．

$f(x)$ は 4 回まで微分可能で, $[a,b]$ では $|f^{(4)}(x)| \leqq M$ であるとする．まず $\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx$ を (3.9) で近似したときの誤差を調べるため,

$$R(h) = \int_{\alpha-h}^{\alpha+h} f(x)dx - \frac{h}{3}[f(\alpha-h)+4f(\alpha)+f(\alpha+h)]$$

とする．ここで α を定数として, h で微分すれば,

$$\begin{aligned} R'(h) &= \frac{2}{3}[f(\alpha+h)+f(\alpha-h)-2f(\alpha)] - \frac{h}{3}[f'(\alpha+h)-f'(\alpha-h)] \\ R''(h) &= \frac{1}{3}[f'(\alpha+h)-f'(\alpha-h)] - \frac{h}{3}[f''(\alpha+h)+f''(\alpha-h)] \\ R'''(h) &= -\frac{h}{3}[f'''(\alpha+h)-f'''(\alpha-h)] \end{aligned}$$

となる．平均値の定理から

$$f'''(\alpha+h)-f'''(\alpha-h) = 2hf^{(4)}(\alpha+\theta h) \quad (|\theta|<1)$$

したがって $[\alpha-h,\alpha+h]$ が $[a,b]$ に含まれていれば $|R'''(h)| \leqq \frac{2}{3}h^2M$ となる．ゆえに

$$|R''(h)| = |\int_0^h R'''(t)dt| \leqq \int_0^h |R'''(t)|dt \leqq \frac{2}{9}h^3M$$

同じようにして

$$|R'(h)| \leqq \frac{1}{18}h^4M, \quad |R(h)| \leqq \frac{1}{90}h^5M$$

となる．これから

$$\left|\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})\right| \leqq \frac{1}{90}h^5M$$

ゆえに, これらを $k = 1, 2, \cdots, n$ として加えると

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\right| \leqq \frac{n}{90}h^5M = \frac{b-a}{180}h^4M$$

したがって, Simpson の近似公式で得られる近似値の誤差は

$$\frac{b-a}{180}h^4M$$

をこえないことがわかる．

例 3.24. 閉区間 $[0, 1]$ を *10* 等分し, *Simpson* の公式によって

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

の近似値を計算せよ．

証明. $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ として

$$y_k = f(x_k) \quad (x_k = \frac{k}{10}, \quad k = 1, 2, \cdots, 10)$$

を少数第 6 位まで計算すると, $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ とおくと $f^{(4)}(x) = 4\arctan^{(5)} x$. 例 2.20（53 ページ）の計算結果から $|f^{(4)}(x)| < 4 \times 24 = 96$. □

3.8 広義積分

我々の定積分の考えは 被積分関数が閉区間における連続関数になっている場合が基本です. しかしこの積分も場面によりその意味を自然に拡張解釈した方が良いときがあります. それは以下の 2 つの場合です.

(1) 有限区間において被積分関数が連続でない点を含んでいても良い場合
(2) 無限区間，例えば区間 $(0,\infty)$ の場合

3.8.1　有限区間の広義積分

$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとき，関数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ は $[a,b]$ で連続になるから

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx,\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx\end{aligned} \tag{3.10}$$

が成り立つ．関数 $f(x)$ が $x=a$ または $x=b$ で連続でないとき，もし式 (3.10) の左辺の極限が有限極限値をもてば，定積分の意味が拡張できる．

例 3.25. 関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は $x=0$ で連続でない. しかし

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \to 2 \quad (\varepsilon\to 0)$$

の計算があるので広義積分として　$\therefore \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$ である.

そこで広義積分の意味を定義しよう.

関数 $f(x)$ が区間 $(a,b]$ すなわち, $a<x\leqq b$ で連続とする. このとき $\varepsilon\to 0$　$(\varepsilon>0)$ のとき $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ の極限が有限である値に収束するならば広義積分は収束するといい，この極限値を $\int_a^b f(x)dx$ と書く. もちろん，収束しないときもある.

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b)$ すなわち, $a\leqq x<b$ で連続としたときも広義積分の意味も上記と同じである. および不連続点が区間の間にある場合も同じである, 例 3.28 参照.

例 3.26. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を求めよ.

証明. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ とおくと, $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ で連続で,

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0} [\arcsin x]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon'} = \pi.$$

ゆえに

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

□

例 3.27. 広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

は発散する

証明. $\int \frac{1}{x} dx = \log x$ より解る. □

例 3.28.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 + 2 = 4.$$

因みに関数 $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ は $x = 0$ で連続でない.

例 3.29.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda} & (\lambda < 1) \\ \text{発散する} & (\lambda \geqq 1) \end{cases}$$

証明.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\lambda} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}(1-\varepsilon^{1-\lambda}) & (\lambda \neq 1) \\ -\log\varepsilon & (\lambda = 1) \end{cases}$$

したがって $\varepsilon \to 0$ としたとき
$\lambda < 1$ のとき　$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda} dx = \frac{1}{1-\lambda}$
$\lambda = 1$ のとき　$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$
$\lambda > 1$ のとき　$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda} dx = +\infty$ □

この例 3.29 の結果は平凡であるが以下に見られるように収束・発散の論証の話の出発点になっている．

もう少し複雑な例を見てみよう．

例 3.30. 広義積分 $\int_0^1 \log x dx$ が収束することを示し，その値を求めよ．

証明．まず $\int \log x dx = x\log x - x$.
$\int_\varepsilon^1 \log x dx = -1 + \varepsilon - \varepsilon \log \varepsilon$.
問 2.23（55 ページ）より $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$ である．
$\therefore \int_0^1 \log x dx = -1$. □

収束・発散を判定するのにもう少し法則的に考えてみよう．

定理 3.9. 関数 $f(x), g(x), h(x)$ は区間 $[a, b)$ で連続で，そこで $g(x) < f(x) < h(x)$ であるとする．このとき広義の積分 $\int_a^b g(x)dx, \int_a^b h(x)dx$ がともに存在すれば, *f(x)* の広義の積分 $\int_a^b f(x)dx$ も存在する．

証明. $a \leqq x_1 < x_2 < b$ とすると, 仮定から

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx < \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx < \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx \qquad (*)$$

また $\lim_{x\to b-0}\int_a^x g(x)dx, \lim_{x\to b-0}\int_a^x h(x)dx$ が存在するから, Cauchy の定理 (演習問題 1,9（37 ページ）) の必要条件によって, $x_1, x_2 \to b-0$ のときは $\int_{x1}^{x_2} g(x)dx \to 0, \int_{x1}^{x_2} h(x)dx \to 0$ したがって式 $(*)$ から $x_1, x_2 \to b-0$ のとき $\int_{x1}^{x_2} f(x)dx \to 0$, ゆえに, 再び Cauchy の定理の十分条件によって

$$\lim_{x\to b-0}\int_a^x f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

が存在する． □

系 3.9.1. 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b)$ で連続で, 点 b の近傍で $f(x)(b-x)^\lambda$ が有界となるような $\lambda < 1$ が存在するときは広義の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ も存在する．

証明. 仮定から, 適当に正数 δ をとれば, $b-\delta < x < b$ では

$$-L \leqq f(x)(b-x)^\lambda \leqq L$$

すなわち,

$$\frac{-L}{(b-x)^\lambda} \leqq f(x) \leqq \frac{L}{(b-x)^\lambda}$$

となるような正数 L が存在する, ところが, 例 3.29 から

$$\int_{b-\delta}^{b} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} dx = \int_0^\delta \frac{dt}{t^\lambda} = \frac{\delta^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

したがって, 広義の定積分

$$\int_a^b \frac{-L}{(b-x)^\lambda} dx, \int_a^b \frac{L}{(b-x)^\lambda} dx$$

が存在する. ゆえに定理 3.9 より $\int_a^b f(x)dx$ は収束する. □

注意 定理 3.9 は $[a, b)$ が $(a, b]$ になっても, そのまま成り立つ. また系は $[a, b)$ が $(a, b]$ になるときは, $(b-x)$ のところを $(x-a)$ でおきかえれば同じように成り立つ.

例 3.31. $s, a > 0$ を定数とする. 広義積分

$$\int_0^a e^{-x} x^{s-1} dx$$

は $s > 0$ のとき収束し, $s \leqq 0$ のとき発散する.

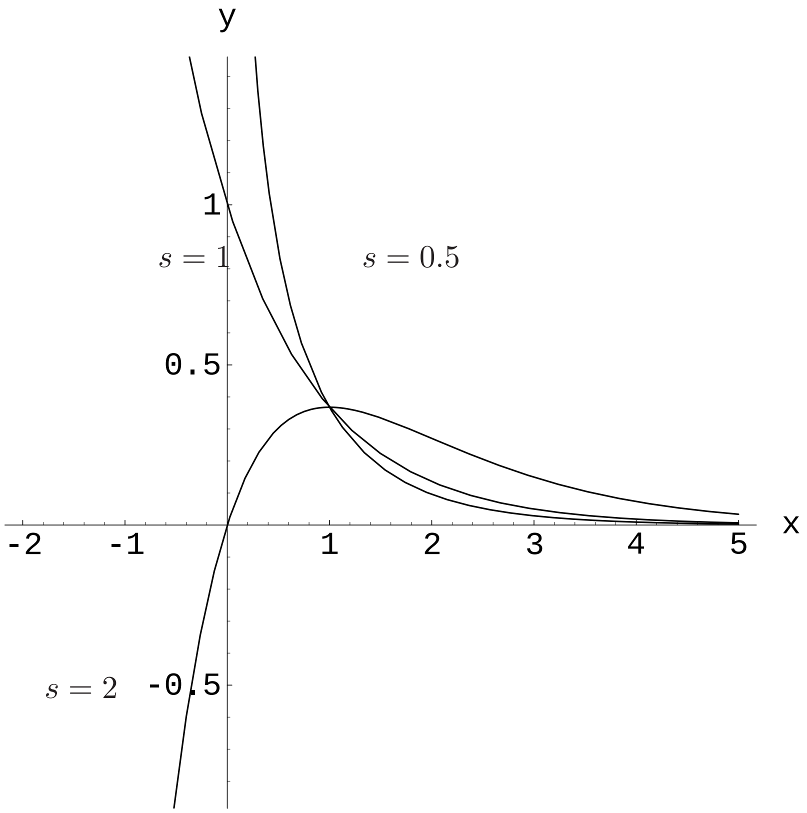

図 3.3　$y = e^{-x}x^{s-1}$ のグラフ，$s = 0.5, 1, 2$ の場合

証明. $s > 0$ のとき[*4] ：
$G(\varepsilon) = \int_\varepsilon^a e^{-x}x^{s-1}dx$ とおく. 関数 $G(\varepsilon)$ は変数 ε の区間 $(0, a)$ で単調減少である.

$$\int_\varepsilon^a e^{-x}x^{s-1}dx < \int_\varepsilon^a x^{s-1}dx = \frac{1}{s}(a^s - \varepsilon^s) < \frac{a^s}{s}.$$

関数 $G(\varepsilon)$ は区間 $(0, a)$ で上に有界である. ゆえに故に定理 1.8（23page）より $\varepsilon \to 0$ のとき, 関数 $G(\varepsilon)$ はある有限な極限値に収束する. すなわち広義積分 $\int_0^a e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.
$s \leqq 0$ のとき：
関数 e^{-x} は $x = 0$ の近傍で下に有界である. すなわち例えば x の区間 $(0, 1)$ で

[*4] $s \geqq 1$ のときは広義でも何でもない. 図**??**を見よ.

は $e^{-x} > e^{-1}$ である. そこで $0 < \varepsilon < a < 1$ として

$$\int_\varepsilon^a e^{-x}x^{s-1}dx > \frac{1}{e}\int_\varepsilon^a \frac{1}{x^{1-s}}dx.$$

例 3.29 より右辺の積分は $\varepsilon \to 0$ のときに $+\infty$ にゆく. □

例 3.32. $p > 0$ かつ $q > 0$ のとき広義積分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{3.11}$$

は存在する.

証明. $p > 1$ かつ $q > 1$ のときには, 被積分関数 $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は閉区間 $[0,1]$ で連続であるから, 本来の定積分の意味として $\int_0^1 f(x)dx$ は存在する.

$0 < p < 1$ のとき, $f(x)$ は $x = 0$ で不連続になる, および $0 < q < 1$ のとき, $f(x)$ は $x = 1$ で不連続になる.

$0 < p < 1$ のときを考えよう.

$\varepsilon \to 0$ のとき $\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ が有限極限値に収束していることを見ればよい.

x の閉区間 $[0, \frac{1}{2}]$ では $(1-x)^{q-1}$ は有界，すなわち正定数 C が在って $(1-x)^{q-1} \leqq C \quad (0 \leqq x \leqq \frac{1}{2})$. [*5]

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f(x)dx \leqq \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} x^{p-1}Cdx = \frac{C}{p}\{(\frac{1}{2})^p - \varepsilon^p\} < \frac{C}{p2^p}.$$

定理 1.8（23 ページ）より解る.

$0 < q < 1$ のときも同様である. □

この $B(p,q)$ は (変数が (p,q) の) Beta 関数とよばれている.

問 13. $p \leqq 0$ または $q \leqq 0$ のとき式（*3.11*）の広義積分は発散する.

例 3.33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx$ が存在することを示し, その値を求めよ.

[*5] この C はもっと具体的に云うことも出来る.

証明. $f(x)=\log(\sin x)$ は区間 $(0,\frac{\pi}{2}]$ で連続である.

いま λ を任意の正数 とすれば, $\lim_{x\to+0}x^{\lambda}\log(\sin x)=0$ である.

したがって, $x^{\lambda}\log(\sin x)$ は $x=0$ の近傍で有界になる.

ここで特に $0<\lambda<1$ ととれば[*6] 系 3.9.1 と注意によって $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx$ が存在する事が判る[*7].

いまその値を I とすれば,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx$$

右辺の第 2 項の積分で $x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\cos x)dx$$

したがって

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\cos x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\sin x\cos x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\frac{\sin 2x}{2})dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\sin 2x)dx-\log 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\end{aligned}$$

ところがこの第 1 項は $2x=t$ とおくと, $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin t)dt=\frac{I}{2}$ になる.

したがって $I=\frac{I}{2}-\frac{\pi}{4}\log 2$ となって $I=-\frac{\pi}{2}\log 2$ □

問 14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx$ を求めよ.

---

*6　$\lambda=\frac{1}{2}$ として特に $\sqrt{x}\log(\sin x)$ は $x=0$ の近傍で有界になる.
　として考えても良い. とにかく $0<\lambda<1$ である正定数 λ を1つ決めておく.

*7　収束することは次のようにしても解る.
$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx=\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}x\log x dx+\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\log(\frac{\sin x}{x})dx$
　右辺の積分は第 1 項, 第 2 項とも閉区間 $[0,\frac{\pi}{2}]$ における連続関数の積分で広義積分で考える必要はない.

問 15. 次の積分を求めよ.

(1) $\int_0^1 (\log x)^2 dx$　　(2) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$　　(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

問 16. $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^\lambda x}$　$(\lambda < 1)$ が存在することを証明せよ.

3.8.2　無限区間での広義積分

関数 $f(x)$ が区間 $[a, \infty)$ で連続であるとき, 有限な極限値 $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ が存在するならば, この極限値を $\int_a^\infty f(x)dx$ で表わし, 積 分 $\int_a^\infty f(x)dx$ が存在するという. このように積分区間が無限区間であるもの を無限積分という.

同じように, $f(x)$ が $(-\infty, b]$ で連続であるとき, 有限な極限値 $\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$ が存在するならば, この極限値を $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ で表わし, 無限積分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ が存在するという.

例 3.34. 広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ は収束して

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

証明. 式

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{t} + 1$$

で $t \to \infty$ より解る. □

例 3.35.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\lambda} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda} & (\lambda < 1) \\ \text{発散する} & (\lambda \geqq 1) \end{cases}$$

証明.

$$\int_1^t \frac{1}{x^\lambda} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}(t^{1-\lambda} - 1) & (\lambda \neq 1) \\ \log t & (\lambda = 1) \end{cases}$$

したがって $t \to \infty$ としたとき

$\lambda < 1$ のとき　$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda} dx = \infty$

$\lambda = 1$ のとき　$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$
$\lambda > 1$ のとき　$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda} dx = \frac{-1}{1-\lambda}$ □

例 3.36. 広義積分 $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ は収束して

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1.$$

広義積分 $\int_0^\infty e^x dx$ は発散する.

例 3.37. 例 *3.16*（*101* ページ）より

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a \sin bx).$$

特に $a < 0$ とすると,

$$\int_0^\infty e^{ax} \sin bx dx = \left[\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a\sin bx)\right]_0^\infty = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

問 17. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx, \quad a > 0$ を求めよ.

例 3.38. s を任意の定数（負であっても良い）, $a > 0$ も定数とする. このとき広義積分

$$\int_a^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

が収束する.

証明. 例 2.22（54page）より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0$ であるから, x の十分大きな値に対してはこの分数の値は 1 より小さい. すなわち, ある正数 x_0 があって

$$x > x_0 \quad \text{ならば} \qquad \frac{x^{s+1}}{e^x} < 1.$$

それ故

$$\int_{x_0}^t e^{-x} x^{s-1} dx < \int_{x_0}^t \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{t} < \frac{1}{x_0} \quad (t > x_0)$$

変数 t の関数 $F(t)=\int_{x_0}^{t} e^{-x}x^{s-1}dx$ は t について単調増加で上に有界である. 故に定理 1.8（23page）より $t\to\infty$ のとき, 関数 $F(t)$ はある有限な極限値に収束する. すなわち広義積分 $\int_a^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する. □

3.8.3　ガンマ関数

$s>0$ のとき 例 3.38, 例 3.31 より広義積分 $\int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ は存在するので

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx \quad (s>0)$$

とおきこれをガンマ関数とよぶ.

例 3.39.

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \quad (s>0).$$

したがって n を正整数とすれば $\Gamma(1)=1$ だから

$$\Gamma(n+1)=n!$$

である.

証明.

$$\Gamma(s+1)=\left[-e^{-x}x^{s}\right]_0^{\infty}+s\int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

より解る. □

問 18.　*(1)* $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$,　*(2)* $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ [*8]

3.8.4　Euler の定数

$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ とするとき数列 $\{a_n\}$ について次の 2 つのことがいえる.

[*8] 例 5.25（235 ページ）参照

1. 不等式 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\log(n+1)$ より
   不等式 $a_n>\log\frac{n+1}{n}>0$ が解る.
   すなわち数列 $\{a_n\}$ は下に有界.
2. 不等式 $a_{n+1}<a_n$.
   なんとならば $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}<0$
   このことは $y=\frac{1}{x}$ のグラフで区間 $[n,n+1]$ の部分を観察することから解る.
   すなわち数列 $\{a_n\}$ は単調減少である.

数列 $\{a_n\}, a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ は下に有界である単調減少数列である.
　したがって数列 $\{a_n\}$ はある実数 C に収束する.
　$C=0.5772156\ldots$ という近似値をもち, Euler の定数と呼ばれている[*9].

3.8.5　応用を少し

こんな事もある... 回転体

例 3.40. $y=\frac{1}{x}$ のグラフを見る.x 軸の区間 $[1,\infty)$ を中心とした回転体を考えよう.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\infty.$$

このように断面積は無限大 .

$$\pi\int_1^\infty\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi.$$

しかし回転体の体積は有限.

例 3.41. 曲線 $r=a\cos 2\theta$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

[*9] 有理数か無理数であるかさえ現在の数学では解っていない.

証明. $\theta=0$ と $\theta=\frac{\pi}{4}$ との間の部分の 8 倍が求める面積になるから,

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\theta d\theta \\ &= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4\theta}{2}d\theta \\ &= 2a^2\left[\theta+\frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{2}a^2. \end{aligned}$$

□

問 19. 次の部分の面積を求めよ.

1. 懸垂線 *(catenary)*　$y=a\cosh\dfrac{x}{a}$ と *2* 直線 $x=-a, x=a$ および x 軸で囲まれる部分
2. 曲線 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1(a,b>0)$ と両軸で囲まれる部分
3. サイクロイド $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\,(a>0, 0\leqq t\leqq 2\pi)$ と x 軸で囲まれる部分
4. レムニスケ-ト *(lemniscate)* $r^2=2a^2\cos 2\theta(a>0)$ で囲まれる部分
5. 正葉線 *(folium of Descartes)* $x^3+y^3-3axy=0\,(a>0)$ で囲まれる部分 *(*極方程式になおして考えよ. *)*

例 3.42. 外力の作用を受けて x 軸上を動いている質点がある. 力は x 軸の方向で大きさは点 x では $f(x)$ であるとする. このとき質点が $x=a$ から $x=b$ まで動くとき, 外力が質点に対してした仕事は $\int_a^b f(x)dx$ である.
いま深さ h の海底にあるいかりを海面まで引き上げたい. 海中でのいかりの重さは w, ついている鎖の重さは単位の長さあたり ρ であるとき, 重力に抗してする仕事を求めよ.

証明. 鉛直方向を x 軸にとり, 海面を $x=0$ とする. いかりが海面下 x にある

とき, いかりと鎖とに働く重力は $w + \rho x$ である. したがって要する仕事は

$$\int_0^h (w + \rho x)dx = wh + \frac{\rho}{2}h^2$$

である. □

問 20. 地球の中心から距離 r のところにある質量 m の物体に作用する地球の引力は $F = \frac{cm}{r^2}$ *(c:*定数*)* である. *1 kg* の物体を地球の表面 *(*$r = r_0$*)* から月の表面 *(*$r = R_0$*)* まで動かすとき, 地球の引力に抗してする仕事は概略いくらか.

問 21. 半径が a cm である半球形の容器にみたしてある水を全部くみ出すのに要する仕事を求めよ.

曲線の曲率

平面曲線の曲がり具合について調べてみよう.

曲線上の 1 点 P で接線を引き, P に近い曲線上の任意の点 Q における接線が これとなす角を $\Delta\theta$ とする. P, Q 間の曲線がの弧の長さを Δs とすると $\Delta\theta$ は曲線の間に曲がった量になっている. したがって $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ を考えると, これは P, Q 間の曲線が曲がった量の平均を表わす. そこで Q を P に近づけた極限, すなわち $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ が曲線の P における曲がりの度合いを表わす. これを曲線の P における曲率とよぶ.

曲線が円の場合には, 曲率は円周上どこでも同じで, 半径の逆数になっている. いいかえると曲率の逆数は円の半径に等しい. そこで一般の曲線の場合にも, 曲率の逆数の絶対値を曲率半径と呼ぶことにする. すなわち, 曲率半径とは, 曲線と同じ曲率を持つ円の半径である.

平面上の曲線の曲率を求める式を導こう.

曲線の方程式を $y = f(x)$ とする.

曲線の接線が x 軸となす角を θ とすれば, $\tan\theta = y' = f'(x)$ であるから, $\sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = y''$ すなわち $\frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2}$ となる. ところが点 $P(x_0, f(y_0)$ から点

$Q(x, f(x))$ までの弧の長さを s と すると

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f'^2(u)}du$$

[*10] であるから, s は x の関数になり

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + y'^2}$$

である. 点 P における曲率 κ は定義によって

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta \theta}{\Delta x}}{\dfrac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\dfrac{d\theta}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}$$

であるから

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となる. したがって曲率半径を ρ とすると,

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{(1 + y')^{\frac{3}{2}}}{y''} \tag{3.12}$$

である.

例 3.43. 懸垂線 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})(a > 0)$ の曲率半径が最小になる点を求めよ.

3.9　曲線の長さ

次に, 曲線の長さについて考えてみよう.
xy 座標平面上で 2 点 A, B を結ぶ曲線 C の方程式が t を媒介変数として

$$x = f(t), y = g(t) \quad (\alpha \leqq t \leqq \beta) \tag{3.13}$$

[*10] 点 P から x がふえる向きにはかった弧の長さを正にとる.

$$A(f(\alpha), g(\alpha)), B(f(\beta), g(\beta))$$

で与えられているとする．
いま変数 t の区間 $[\alpha, \beta]$ の分割

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta \tag{Δ}$$

を考え，$P_i = (f(t_i), g(t_i))(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ とする．曲線 C 上の点 $A = P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}, P_n = B$ を順に結んで折れ線 $P_0P_1, \cdots, P_{n-1}P_n$ をつくる．分割 Δ を限りなく細かくするとき，折れ線の長さが，ある一定の有限な値 l に収束するならば，この l が曲線 C の長さである．

定理 3.10. 曲線の方程式において，とくに $f'(t), g'(t)$ が $[\alpha, \beta]$ で連続であれば，曲線 C は長さをもち，その長さ l は次の式で与えられる．

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}dt.$$

証明．$[\alpha, \beta]$ の分割 Δ に対応する折れ線において，

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}$$

であるが，微分法の平均値の定理から，

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta t_i,$$
$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\eta_i)\Delta t_i,$$
$$(t_{i-1} < \xi_i, \eta_i < t_i, \Delta t_i = t_i - t_{i-1})$$

である．したがって

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i)}\Delta t_i$$

となる．さて $g'(t), h'(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で一様連続になるから，任意の正数 ε に対して，十分小さい正数 δ をとると，$|t' - t''| < \delta$ である限り

$$|g'(t') - g'(t'')| < \varepsilon$$

となる. そこでベクトル

$$\vec{a} = (f'(\xi_i), g'(\eta_i)), \vec{b} = (f'(\xi_i), g'(\xi_i))$$

を考えると,

$$||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leqq |\vec{a} - \vec{b}|$$

であるから, $|\Delta| < \delta$ であれば, 次の式が成り立つ.

$$|\sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i)} - \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\xi_i)}| \leqq |g'(\eta_i) - g'(\xi_i)| < \varepsilon \qquad (3.14)$$

定義によって $l = \lim \sum_i \overline{P_{i-1}P_i}$ であるから,

$$l = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i)}\Delta t_i$$

となる. ところが, 式 (3.14) から, $|\Delta| < \delta$ であれば

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i)}\Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\xi_i)}\Delta t_i \right| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \varepsilon(\beta - \alpha)$$

一方, 連続関数 $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}$ は $[\alpha, \beta]$ で積分可能だから δ_1 を十分小さくとれば, $|\Delta < \delta_1|$ である限り

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\xi_i)}\Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}dt < \varepsilon$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\xi_i)}\Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}dt < \varepsilon(\beta - \alpha + 1)$$

となる. ここで ε は任意の正数であったから,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i)}\Delta t_i$$

が存在し, 次の式が成り立つ.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}dt.$$

□

例 3.44. 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の全長 $(x \geqq 0, y \geqq 0)$ を求める.

証明. $x=\cos^4\theta, y=\sin^4\theta, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ とパラメ-タ-表示する.
$\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}=\sqrt{2}\sin 2\theta\sqrt{1+\cos^2 2\theta}$.
$t=\cos 2\theta$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\sqrt{1+\cos^2 2\theta}d\theta \\
&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}dt \\
&=\frac{1}{4}\left[t\sqrt{t^2+1}+\log(t+\sqrt{t^2+1})\right]_{-1}^{1} \\
&=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

□

系 3.10.1. 関数 $y=f(x)$ の表す曲線の，区間 $[a,b]$ での長さ l は

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$$

証明. 式 (3.13) で $x=x, y=f(x)$ と見做せばよい. □

例 3.45. 曲線 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ の区間 $[0,1]$ の部分の長さ l を計算せよ.

証明.

$$\begin{aligned}
y'&=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}) \\
1+y'^2&=\{\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\}^2 \\
l&=\int_0^1\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})dx \\
l&=\frac{a}{2}(e^{\frac{1}{a}}+e^{-\frac{1}{a}}-2).
\end{aligned}$$

□

系 3.10.2. 平面上の曲線が $r = f(\theta)$,　$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ で表されているとき曲線の長さ l は

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

である.

証明. 式 (3.13) で $x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$ と見做せばよい. □

例 3.46. 中心が原点, 半径 R の円は極形式で書くと $r = R$.
したがって $\frac{dr}{d\theta} = 0$. 故に円周の長さ l は $l = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$.

例 3.47. カ-ジオイド $r = a(1+\cos\theta)\,(a > 0)$ の長さを求めよ.

証明. 曲線は始線に関して対称であるから,
$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2} d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta = 8a.$ □

問 22. 次の曲線の指定された部分の長さを求めよ.

1. アステロイド $x = a\cos 3t, y = a\sin 3t (a > 0, 0 \leqq t \leqq 2\pi)$ の全長
2. 追跡線 $x = a\log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}\,(a > 0)$ の $0 < y_1 \leqq y \leqq y_2$ に 対応する部分の長さ
3. 曲線 $r = \theta^2$ の $\theta = 0$ から 2π までの弧の長さ

問 23. 曲線 $r = e^{a\theta}$ 上の *2* 点間の弧の長さは, その *2* 点の動径の差に比例することを 証明せよ.

問 24. 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ の全長は $4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta$ で与えられることを示せ. ただし k は楕円の離心率 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ である. *(*不定積分 $\int \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta$ は初等関数では表わせないので, 上の定積分の値 を計算するのには特別の工夫をしなければならない.*)*

♡♠3 章の演習問題 ♡♠

1. (1)

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n}{2}\theta \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

(2) 区分求積法で定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ を求めよ.

2. 次の定積分を求めよ.

(1) $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx$　(2) $\int_0^a x\sqrt{ax-x^2} dx$　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$　(5) $\int_0^2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{|x-1|}} dx$　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{2+\cos x}$

(7) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx (a > 0)$　(8) $\int_0^{\infty} \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

3. 次の定積分を計算せよ (m, n は自然数とする).

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$

4.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

であれば,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

となることを証明せよ. 283 ページも参照.

5. $f(x), g(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続であるとき, 任意の実数 t について, $\{tf(x)-g(x)\}^2 \geqq 0$ であることを利用して,

$$\{\int_a^b f(x)g(x)dx\}^2 \leqq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx$$

が成り立つことを証明せよ (この不等式を Schwarz[*11] の不等式という). なお, 上の不等式で等号の成り立つのは, どんなときか.

6. $f(x), g(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続であるとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$[\int_a^b \{f(x)+g(x)\}^2dx]^{1/2} \leqq [\int_a^b f(x)^2dx]^{1/2} + [\int_a^b g(x)^2dx]^{1/2}$$

7. (1)

$$\int_a^b f(x)g(x)dx > \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

となっている関数 $f(x), g(x)$ および定数 a, b の例をあげよ.

(2)

$$\int_a^b f(x)g(x)dx < \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

となっている関数 $f(x), g(x)$ および定数 a, b の例をあげよ.

8. 不等式 $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}dx < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ を証明せよ.

9. (1) xy 座標平面上の 2 定点 $F(-a,0), F'(a,0)$ からの距離の積 $FP \cdot FP'$ が一定である動点 P の軌跡を
xy 座標で書くと　$x^4+y^4+2x^2y^2-2a^2x^2+2a^2y^2=0$,
極座標で書くと　$r=a\sqrt{2\cos 2\theta}$. 但しは $a>0$ は定数.
この曲線はレムニスケート (lemniscate) と呼ばれている.

(2) lemniscate $r^2 = 2a^2\cos 2\theta \quad (a>0)$ の全長 L は

$$L = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}}dt$$

[*11] シュワルツ (1843-1921), ドイツ

の形になることを示せ.Hint:変数変換 $t = \arcsin(\sqrt{2}\sin\theta)$ も考えよ.

10. 直角双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の第 1 象限にある任意の点を $P(x, y)$ とし, 座標の原点を O, 双曲線が x 軸の正の部分を切る点を A とする. このとき OP, OA と双曲線とで囲まれる部分の面積を $\frac{s}{2}$ とすれば $x = \cosh s, y = \sinh s$ となることを証明せよ.
11. $f(x)$ は $[a, b]$ で n 回微分可能で, $f^{(n)}(x)$ は連続であるとする. このとき, $\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)dx$ に部分積分法を適用して, 次の式の成り立つことを証明せよ.

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)dx.$$

また, R_n の積分の部分に問 4（93 ページ）を応用すれば Lagrange の剰余が導ける.

12. Beta 関数 $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (p, q > 0)$ について, 次の式を証明せよ.
    (1) $B(p, q) = \frac{q-1}{p}B(p+1, q-1)$
    (2) p, q が正整数であれば, $B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$
13. (1) 関数 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ は多項式である. 次数は n 次で, x^n の係数は 2^n である. これを Hermite[*12] の多項式という.
    (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & (m = n) \end{cases}$$

を証明せよ.

14. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて正規曲線

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma, m \text{ は定数})$$

[*12] エルミート（1822-1901）, フランス

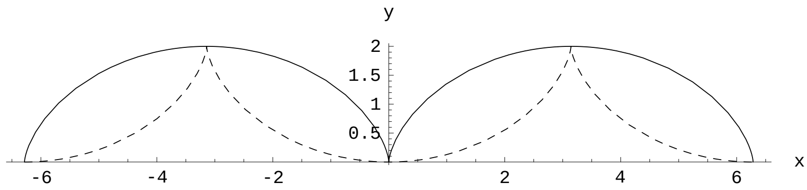

図 3.4　実線はサイクロイド，点線は問題図

について, 次の式を証明せよ.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = m$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \sigma^2$

15. 曲線（図 3.4 を参照）

$$x = t + \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

について次を示せ.

(1)

$$\frac{dy}{dx} = \tan\frac{t}{2}$$

したがって点 $P(x, y)$ における接線が x 軸となす角は $\frac{t}{2}$ である.

(2) 原点から曲線上の点 P までの弧の長さを s とすると

$$s = 4\sin\frac{t}{2}$$

16. 曲線 $y = f(x)$ が原点で x 軸に接するとき, この点における曲率半径は

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2}{2y}\right|$$

であることを証明せよ.

17. 式 (3.12) 122 ページ を極座標 (r, θ) で表現することにより曲線 $r = f(\theta)$ 上の点 (r, θ) における曲率半径は

$$\frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}$$

であることを計算して証明せよ. 問題 4（77 ページ）も参照.

18. カ-ジオイド $r = a(1+\cos\theta)$ 上の点 (r, θ) における曲率半径を求めよ. 但し a は正の定数.

19. θ を媒介変数として, 方程式

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^\theta \cos t^2 dt, \quad y = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^\theta \sin t^2 dt \quad (k \text{ は定数})$$

であらわされる曲線はクロソイド (clothoid) （ 図 3.5 参照）といわれ, 高速自動車道路の設計に使われている. これについて, 次のことを証明せよ.

(1) 曲線上の点 P における接線が x 軸となす角は原点 O から P までの弧の長さの 2 乗に比例する.

(2) P における曲率は原点 O から P までの弧の長さに比例する.

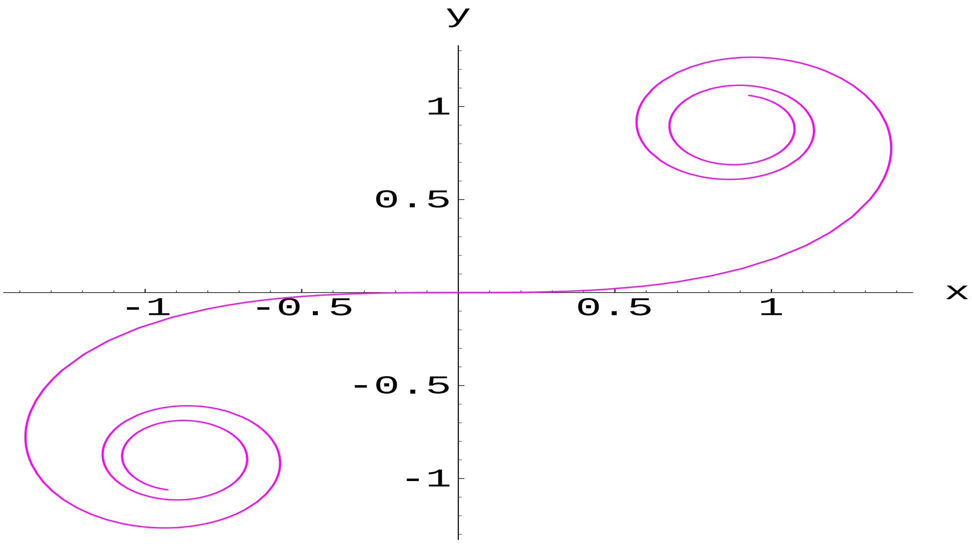

図 3.5　クロソイド (clothoid)

20. (1)

$$\int \cos x dx = \sin x, \int \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x$$

(2)　$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ だから

$$\int \cos^3 x dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

(3)

$$\int \cos^{2m} x dx = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m}C_k \frac{\sin(2m-2k)x}{2m-2k} + \frac{1}{2^{2m}} {}_{2m}C_m x$$

(4)

$$\int \cos^{2m+1} x dx = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1}C_k \frac{\sin(2m-2k+1)x}{2m-2k+1}$$

21.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, \cdots$$

に対して，次を示せ.

(1) $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ を具体的に書き下せ.

(2) $P_n(x)$ は n 次多項式である（Legendre[*13]多項式という）.
さらに詳しく

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2k-1)}{k!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

(3) $Q(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式，$F(x)$ は C^n-級関数とすると

$$\int_a^b QF^{(n)} dx = \Big[QF^{(n-1)} - Q'F^{(n-2)} + \cdots \pm Q^{(n-1)}F \Big]_a^b.$$

(4)

$$m < n \text{ ならば} \quad \int_{-1}^{1} x^m P_n(x) dx = 0.$$

(5)

$$m \neq n \text{ ならば} \quad \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0$$

22. (1) 広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{\log u} du$ は発散する.
(2) $\varepsilon \to 0$ のとき，$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{e^u}{u} du + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^u}{u} du$ は収束する.

[*13] ルジャンドル，フランス,(1752-1833)

第 II 部

多変数の微積分

printout 2008 年 6 月 2 日

第 4 章

偏微分

物理現象の波動，熱伝導は多変数の微分方程式で表現される. 波動方程式, 熱伝導方程式 etc の偏微分方程式.

図 4.1　Gauss(1777-1855). ドイツの Göttingen 大学の数学者. 青年期に早くも整数論の著書 Disquisitiones Arithmeticae を書き上げて発表している.Göttingen の街に行ってあなたが如何に人々に尊敬されているかがよくわかりました.

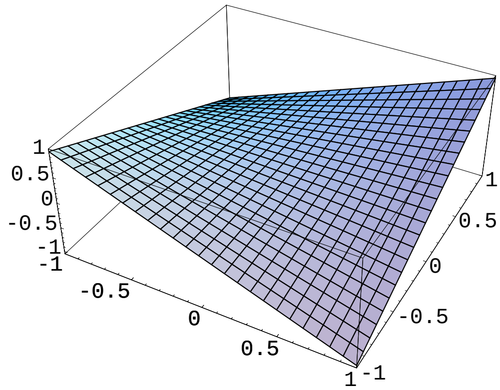

図 4.2　$z = xy$

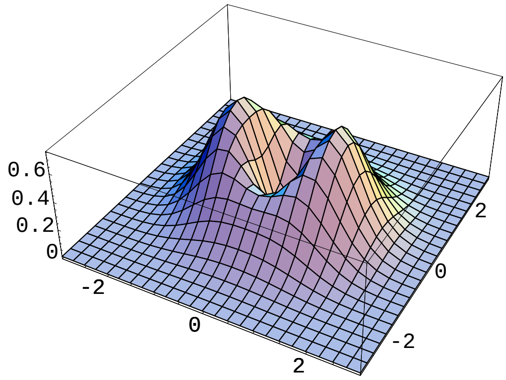

図 4.3　$z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2)$

4.1　2 変数関数 – 例および極限について

平面上の各点 (x, y) に, 実数 z をある規則で対応させる対応のことを, 2 変数 (x, y) の関数, 略して 2 変数関数とよぶ. 記号で

$$z = f(x, y)$$

などと表す. x と y は自由に動くので, これらを独立変数とよぶ.

例 4.1.

$$
\begin{aligned}
&z = x^2 + y^2, \\
&z = xy, && (4.1) \\
&z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2), && (4.2) \\
&z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \quad (x^2 + y^2 \leqq 1), && (4.3) \\
&z = \log(x^2 + y^2), \quad ((x, y) \neq (0, 0)) && (4.4)
\end{aligned}
$$

などは 2 変数関数である. ただし式 (4.3), (4.4) の関数においては, (x, y) は全く自由ではなく, () 内の制限がつく. これらを各々の関数の 定義域とよぶ.

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し, 3 次元空間の点 $(x, y, f(x, y))$ の集合をこの関数の グラフとよぶ. それは普通, 空間内の 曲面を表す.

図 4.3 は式（4.1），(4.2）で表されるそれぞれの関数のグラフを表している.

同様に, n 変数関数 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ および, その定義域やグラフを考えることができる. しかし $n \geqq 2$ のときは関数のグラフが $(n+1)-$ 次元空間にありこのような関数を 多変数関数とよぶ.(前章までの関数を 1 変数関数とよぶ.)

以下の議論は, 当面のところ, 主として 2 変数関数で行うが, n 変数関数でも同様である場合が殆んどである.

２変数の微分（偏微分）の定義が極限で考えるので, ２変数の極限を少し一般の立場から見てみよう. 平面上に動く点 (動点) $P(x, y)$ がある. P が定点 $Q(a, b)$ に限りなく近づくとは, P と Q の距離 PQ が限りなく 0 に近づくことを意味する.$P \to Q$ で表す.(距離 PQ は $d(P, Q)$ と書くこともある.)

$$\begin{cases} |x-a| \leqq PQ = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad, |y-b| \leqq PQ, \\ |PQ| \leqq |x-a| + |y-b| \end{cases}$$

定義　 $(x, y) \to (a, b)$ のとき関数 $f(x, y)$ がある一定の実数 A に限りなく近づくとは,

任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して $0 \neq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ となるすべての点 (x, y) に対し

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

となることである.

$f(x, y) \to A \quad ((x, y) \to (a, b))$ または $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A$ と表す. A を $(x, y) \to (a, b)$ のときの $f(x, y)$ の 極限値とよぶ.

注意　　１変数の場合 $x \to a$ は, x が数直線上を右からと左から a に限りなく近づいてゆくことを表すが, 2 変数の場合の $(x, y) \to (a, b)$ という場合は, いろいろな近づき方がある. そのため, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ が存在する

定義 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で 連続とは, $A = f(a, b)$ すなわち

$$f(x, y) \to f(a, b) \qquad ((x, y) \to (a, b))$$

となることである.
定義域の各点で連続な関数を 連続関数とよぶ.

連続関数のグラフは空間内の曲面を表す. 例 4.1 の関数はいずれも連続関数である.

例 4.2. 大概の関数は，これまた大概の点で連続である. すなわち,$f(x,y) \to f(a,b) \quad ((x,y) \to (a,b))$. となっている場合が殆どである.

x, y の多項式は任意の点で連続. 有理関数は分母が零にならない点で連続.$\sin x, \cos x$，指数関数 e^x，対数関数 $\log x$，etc を有限回加減乗したものは連続関数である. 例えば $\sin(x+y) + e^{x^2-y}$ 等.

しかしながら以下の例に見る通り場面により，関数の点での正確な議論を要するときがある.

例 4.3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

証明. $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = r|\cos^2\theta \sin\theta| < r$ より任意に $\varepsilon > 0$ をとったとき δ を $\delta = \varepsilon$ ととれば $f(x,y) \to f(0,0)((x,y) \to (0,0))$ であることが解る. □

例 4.4.

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (\ (x,\ y) \neq (0,\ 0)\ )\ , \\ \quad 0 & (\ (x,\ y) = (0,\ 0)\ ) \end{cases}$$

は, 各 y を固定すると x の連続関数であり, 各 x を固定すると y の連続関数であるが, $f(x,y)$ 自身は点 $(0,0)$ で連続でないことを示せ.

証明. 傾き k の原点を通る直線 $y = kx$，を考えよう，ここで k は任意の定数.$f(x,kx) = \frac{k}{1+k^2}$. 関数 $f(x,y)$ は原点にいくらでも近い点で互いに異なった値 $\frac{k}{1+k^2}$ をとる. 例えば $f(x,0) = 0, f(x,x) = \frac{1}{2} \quad etc.$ 故に $(x,y) \to (0,0)$ のとき，$f(x,y)$ は収束しない. □

平面における点の集合 (**点集合**) D が **領域**とは, 次の 2 条件 (1), (2) をみたすことである:

(1) D の各点 $Q(a,b)$ に対し, 適当に小さい正数 δ をとると, 点 Q 中心, 半径 δ の**円板**

$$\{P(x,y)|PQ<\delta\}$$

(これを点 P の **δ-近傍**ともよぶ) が領域 D に含まれる.

(2) D の任意の 2 点が D に含まれる連続曲線で結べる.

(1) をみたす集合を, 一般に**開集合**とよぶ.)

(4.5) の関数の定義域は領域である. 一方, (4.4) の関数の定義域は (原点中心の) **閉円板**である. これは円板と, その境界である円 $x^2+y^2=1$ の和集合である. 一般に, 領域とその境界を合わせた集合を**閉領域**とよぶ. また,

$$\{(x,y)|0\leqq x<1,\quad 0\leqq y<1\}$$

のように, 領域とその境界の一部分との和集合を**半開領域**とよぶ.

平面における点集合が, 半径の十分大きい円板

$$\{(x,y)|x^2+y^2<R^2\}$$

の中に含まれているとき**有界である**という. 例えば領域

$$\{(x,y)|1>x>0,1>y>0\}$$

は有界である.

平面上の点の列 (**点列**)

$$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),\cdots,P_n(x_n,y_n),\cdots \tag{4.5}$$

が点 $P_0(x_0,y_0)$ に**収束する**とは

$$P_nP_0\to 0\quad(n\to\infty)$$

となることである. これは

$$x_n\to x_0\quad(n\to\infty)\qquad \text{かつ}\qquad y_n\to y_0\quad(n\to\infty)$$

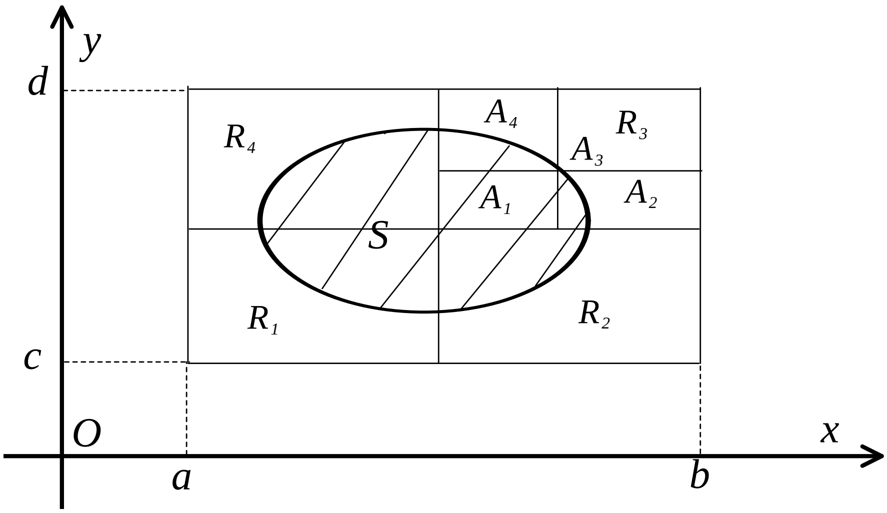

図 4.4　Bolzano-Weierstrass の定理の証明

と同値である.

$$P_n \to P_0 \quad (n \to \infty) \qquad \text{または} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

とも書かれる. なお, 点列（4.5）は $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ とも書かれる.

次に定理 1.5(16 ページ）の 2 次元版である次の定理を見よう.

定理 4.1 (Bolzano-Weierstrass の定理)**.** 平面上の点集合 S が有界な無限集合とする. このとき, S に属する点列 $\{P_n\}$ で, *(ある点に)* 収束するものが存在する.

証明. S が有界なので, 実数 a, b, c, d を適当にとると, S は長方形

$$R = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}$$

に含まれる．$S \subset R$．この R を 4 つに分けて

$$R_1 = \left\{(x,y)|a < x < \frac{a+b}{2}, c < y < \frac{c+d}{2}\right\},$$
$$R_2 = \left\{(x,y)|\frac{a+b}{2} < x < b, c < y < \frac{c+d}{2}\right\},$$
$$R_3 = \left\{(x,y)|\frac{a+b}{2} \leqq x \leqq b, \frac{c+b}{2} \leqq y \leqq d\right\},$$
$$R_4 = \left\{(x,y)|a \leqq x \leqq \frac{a+b}{2}, \frac{c+b}{2} \leqq y \leqq d\right\}$$

とおく (図 4.4). S は無限集合ゆえ, 長方形 R_1, R_2, R_3, R_4 の少なくともひとつは S の点を無限に含む.

R_1 が S の点を無限に含むとき $A_1 = R_1$ とおく．もし R_1 が S の点を有限個しか含まず, R_2 が S の点を無限に含むならば $A_1 = R_2$ とおく．もし R_1 と R_2 が S の点を有限個しか含まず, R_3 が S の点を無限に含むならば $A_1 = R_3$ とおく．もし R_1, R_2, R_3 が S の点を有限個しか含まず, R_4 のみが S の点を無限に含むなら $A_1 = R_4$ とおく.

このように A_1 を定めておき, A_1 から任意に S の 1 点 P_1 を選ぶ．いまの操作を A_1 と, 無限集合 S - P_1 について同様に行い, A_2 を定義し, A_2 と S -P_1 の共通部分から点 P_2 を選ぶ．さらにこの操作を同様に続け, $A_n, (n = 1, 2, \dots)$ と, S に含まれる点列 P_n を選ぶ．P_n は A_n の点で, A_{n+1} は A_n に含まれる．長方形 A_{n+1} の辺の長さはは A_n の辺の長さの半分の大きさである．したがって (座標を用いて考えると, 各座標に 37 ページ, 4 番にある区間縮小法の原理が使えて) すべての A_n に含まれる点 P_0 がただ一つ存在して

$$P_n \to P_0 \quad (n \to \infty)$$

となる. □

定理 1.9 の系と同様の方法で次が示される.

系 4.1.1. 有界な点列は収束する部分列を含む.

この系を用いることにより, 定理 1.9,（24 ページ） 定理 1.10,（26 ページ）それぞれ 1 変数の場合と同じように次の定理達が証明される.

点 $P(x,y)$ における $f(x,y)$ の値 を $f(P)$ とも書く.

定理 4.2 (最 大 値, 最 小 値 の 存 在). 有界閉領域 D 上の連続関数 $f(x,y)$ は最大値 M と最小値 m をもつ. すなわち, D の点 P_0, Q_0 が存在して, D のすべての点 P に対し $m = f(P_0) \leqq f(P) \leqq f(Q_0) = M$ が成り立つ.
(m を D における $f(x,y)$ の最小値, M を D における $f(x,y)$ の最大値とよぶ.)

定理 4.3 (中間値の定理). $f(x,\ y)$ を有界閉領域 D 上の連続関数とする. P, Q を D の 2 点で $f(P) < f(Q)$ となるものとする. このとき $f(P) < c < f(Q)$ となる任意の数 c に対し, $f(R) = c$ となる D の点 R が存在する. （実際, P と Q を結ぶ D 内の曲線を任意にとると, この曲線上に $f(R) = c$ となる点 R が存在する. ）

系 4.3.1. 有界閉領域 D 上の連続関数 $f(x,y)$ の値域 (関数値の集合) は, 閉区間 $[m, M]$ である. ここに m, M はそれぞれ $f(x,y)$ の D 上の最小値, 最大値である.

定理 4.4 (一様連続性). $f(x,\ y)$ を有界閉領域 D 上の連続関数とすると, $f(x,\ y)$ は D 上で**一様連続** である. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して, $PQ < \delta$ となる D の任意の 2 点 P, Q に対し

$$|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

♣◇4.1 節の演習問題 ♣◇

1. $f(x,\ y)$ が点 $(a,\ b)$ で連続ならば, x の関数 $f(x,\ b)$ は $x = a$ で連続であり, y の関数 $f(a,\ y)$ は $y = b$ で連続であることを示せ.

2. 次の関数は点 (0, 0) で連続であるか否かを調べよ.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{x^2+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(hint:曲線 $y=kx^2, k\neq -1$ は定数 を考えよ.)

3. 次の関数は点 (0, 0) で連続であることを示せ.

$$(1)\quad f(x,\ y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)\ )\ ,\\ 0 & (\ (x,\ y)=(0,\ 0)\ )\end{cases}$$

$$(2)\quad f(x,\ y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)\ )\ ,\\ 0 & (\ (x,\ y)=(0,\ 0)\ )\end{cases}$$

4. $f(x,y)$ を連続関数, $g(t)$ を変数 t の連続関数とするとき, **合成関数** $g(f(x,y))$ は連続関数であることを示せ.

5. $f(x,y)$ を連続関数,$G(s,t), H(s,t)$ を変数 (h,t) の連続関数とするとき, **合成関数** $f(G(h,t),H(h,t))$ は変数 (h,t) の連続関数であることを示せ.

4.2 偏 微 分 と 全 微 分

4.2.1 偏微分

点 (a,b) を領域 D の 1 点とする. D 上の関数 $z=f(x,y)$ において, $y=b$ とおいた x の関数 $f(x,b)$ が $x=a$ で微分可能のとき, すなわち

極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

が収束して存在するとき $f(x,y)$ は点 (a,b) で x **に関して偏微分可能**であるといい, 収束するこの極限値を $f(x,y)$ の点 (a,b) での x **に関する偏微分係数**と

よび, 記号は

$$f_x(a,b) \quad \text{または} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \text{または} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(a,b)$$

などで表す (∂ は例えば $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ の場合はラウンド ディーゼット，ディーエッキス と読もう．).

同様に y の関数 $f(a,y)$ が $y=b$ で微分可能なとき, $f(x,y)$ は点 (a,b) で y **に関して偏微分可能**であるといい, $y=b$ での微分係数を, $f(x,y)$ の点 (a,b) での y **に関する偏微分係数**とよび,

$$f_y(a,b) \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(a,b)$$

などで表す.

だから偏微分可能のとき

$$f_y(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

である.

各点で x に関して偏微分可能のとき，偏微分係数を新しい関数と考え，これを x **に関する偏導関数**とよび,

$$f_x(x,y) \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$$

などで表す.　y **に関する偏導関数**も同様で,

$$f_y(x,\ y) \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,\ y)$$

などで表す．偏導関数を求めることを**偏微分する**という.

例 4.5. 関数 $f(x,\ y)=x^2-y^2$ を偏微分すると

$$f_x(x,\ y) = 2x\ , \qquad f_y(x,\ y) = -2y\ .$$

偏導関数 $f_x(x,\ y)$，$f_y(x,\ y)$ がともに連続であるような関数 $f(x,\ y)$ を C^1-関数とよぶ.

偏導関数 $f_x(x,\ y)$, $f_y(x,\ y)$ がさらに偏微分可能のとき, それらの偏導関数を $f(x,\ y)$ の**第 2 次偏導関数**とよぶ.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_x}{\partial x}(x,\ y) &= f_{xx}(x,\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\ y)\ , \\
\frac{\partial f_x}{\partial y}(x,\ y) &= f_{xy}(x,\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,\ y)\ , \\
\frac{\partial f_y}{\partial x}(x,\ y) &= f_{yx}(x,\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\ y)\ , \\
\frac{\partial f_y}{\partial y}(x\ ,y) &= f_{yy}(x,\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\ y)
\end{aligned}$$

などと記す. これらがすべて連続であるような関数 $f(x,\ y)$ を C^2-関数とよぶ.

例 4.6.

$$f(x,\ y) = 2x^3 + x^2 y - xy^2 - 4y^3$$

については

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,\ y) &= 12x + 2y\ , & f_{xy}(x,\ y) &= 2x - 2y\ , \\
f_{yx}(x,\ y) &= 2x - 2y\ , & f_{yy}(x,\ y) &= -2x - 24y\ .
\end{aligned}$$

例 4.7.

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2)$$

については

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= -2xe^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2 - 2) \\
f_y(x, y) &= -2ye^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2 - 1) \\
f_{xx}(x, y) &= 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2y^2 + 4x^4 - 10x^2 - y^2 + 2) \\
f_{xy}(x, y) &= 4xye^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2 - 2) - 4xye^{-(x^2+y^2)} \\
f_{yx}(x, y) &= 4xye^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2 - 1) - 8xye^{-(x^2+y^2)} \\
f_{yy}(x, y) &= 2e^{-(x^2+y^2)}(2y^4 + 4x^2y^2 - 2x^2 - 5y^2 + 1)
\end{aligned}$$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}(2x^2+y^2-3)$ である.

例 4.6 の場合も例 4.7 の場合も共に $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ となっている.

一般に,

定理 4.5. $f(x,y)$ が C^2-関数ならば $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ が成り立つ.

証明. 定義域の各点 (a,b) で $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ を示そう.

$$F(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a,b)$$

とおく.h を固定して, y の関数

$$g(y) = f(a+h, y) - f(a,y)$$

を考えると, これは C^2-関数であり,$F(h,k)$ は

$$F(h,k) = g(b+k) - g(b)$$

と書ける. 平均値の定理 (定理 2.8) より

$$F(h,k) = kg'(b+\theta k) = k\{f_y(a+h, b+\theta k) - f_y(a, b+\theta k)\}$$

をみたす $\theta(0 < \theta < 1)$ がある. 次に k を固定して $f_y(x, b+\theta k)$ を x の関数と考えると, 再び平均値の定理より

$$F(h,k) = hkf_{yx}(a+\theta' h, b+\theta k)$$

をみたす $\theta'(0 < \theta' < 1)$ がある.

いまの議論で, x と y を交換すると, ρ, ρ' $(0 < \rho,\ \rho' < 1)$ があって,

$$F(h,k) = hkf_{xy}(a+\rho h, b+\rho' k)$$

となる. ゆえに, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ の連続性より

$$f_{yx}(a,b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)_{h\neq 0, k\neq 0}} \frac{F(h,k)}{hk} = f_{xy}(a,b)\ .$$

□

定理 4.5 で仮定が C^2 でないと成立しない. その例は, 問題 3（152 ページ）を参照せよ.

3 次の偏導関数

$$f_{xxx}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)\ ,\quad f_{xxy}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y)\ ,\quad \ldots$$

なども同様に定義される. これらがすべて連続であるような関数 $f(x,y)$ を C^3- 関数 とよぶ. C^3- 関数 $f(x,y)$ は定理 4.5 より (例えば)

$$f_{xxy}(x,y) = f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y)\ .$$

さらに **高次 (n 次) 偏導関数,** C^n – 関数 の定義も同様である. 何回でも偏微分可能な関数を C^∞- 関数 とよぶ. 我々が普通とり扱う関数は C^∞- 関数である.

4.2.2 全微分

１変数関数の場合の微分可能という概念は, ２変数関数の場合は２次元の新しい見方が必要である.

次の例は

$f(x,y)$ が定義域の点 (a,b) で偏微分可能でも, (a,b) で連続とは限らない例を示している.

例 4.8. 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

をもう一度考えてみよう.（(例 *4.4*) *138* ページ 参照）

$f(x)$ は明らかに 点 $(0,0)$ で偏微分可能で

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0$$

だが, 点 $(0,0)$ で連続でないのであった. 1 変数の関数の場合と大分事情が違うところである.

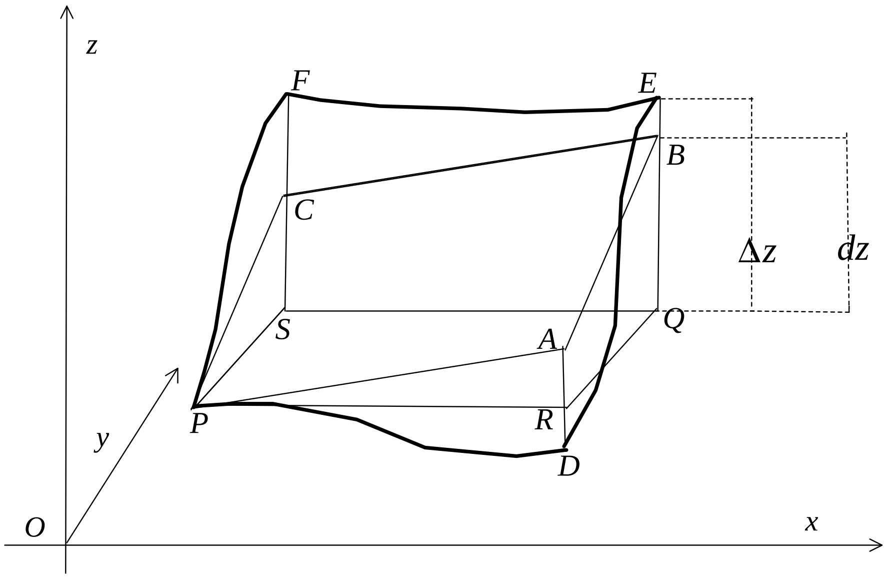

図 4.5　全微分の図

図 4.5「全微分の図」の説明をしておこう.
点の 3 次元座標は以下の通り.

$$P(a,b,f(a,b)), Q(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a,b)),$$
$$R(a+\Delta x, b, f(a,b)), S(a, b+\Delta y, f(a,b)),$$

$$A(a+\Delta x, f(a,b)+f_x(a,b)\Delta x), B(a+\Delta x, b+\Delta y, f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y),$$
$$C(a, b+\Delta y, f(a,b)+f_y(a,b)\Delta y),$$

$$D(a+\Delta x, b, f(a+\Delta x, b)),$$
$$E(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a+\Delta x, b+\Delta y)),$$
$$F(a, b+\Delta y, f(a, b+\Delta y))$$

4 点 $PDEF$ で囲まれた曲面は，$z=f(x,y)$ のグラフの部分である．4 辺形 $PRQS$ はその面が xy 平面に平行な長方形.$PR=\Delta x, PS=\Delta y$. 4 辺形 $PABC$ は平行四辺形で，$PABC$ を含む平面は点 P での曲面 $z=f(x,y)$ の接平面である.$AR=f_x(a,b)\Delta x, CS=f_y(a,b)\Delta y, BQ=AR+CS$ となっている.

1 変数の「微分可能」(定理 2.1 参照) に対応する概念は, 次の「全微分可能」である.

定義 $z = f(x, y)$ が点 (a, b) で **全微分可能** とは,

定数 μ, ν と, (a, b) の周りで定義され, (a, b) で連続で $\varepsilon(a, b) = 0$ となる関数 $\varepsilon(x, y)$ があって, $f(x, y)$ が (a, b) の近傍で次のように書けることである:

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a)\mu + (y - b)\nu + \rho(x, y)\varepsilon(x, y)\ , \tag{4.6}$$

ここに $\rho(x, y) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$.

次は定義より明らかである:

定理 4.6. $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能ならば,

(i) $f(x, y)$ は (a, b) で連続である.
(ii) $f(x, y)$ は (a, b) で, x に関しても, y に関しても, 偏微分可能である.
(iii) 実は式 *(4.6)* の定数 μ, ν はそれぞれ

$$\mu = f_x(a, b), \quad \nu = f_y(a, b)$$

である.

式 (4.6) は, (x, y) が (a, b) から $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ に微小の変化をするとき, 関数値の変動量

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

が, ほぼ

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(a, b)\Delta y \tag{4.7}$$

に等しいことを示している. 式 (4.7) は Δz のいわば第 1 次近似である.

特に関数 $z = x$ のときを考えると $\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ だから $dx = \Delta x$. 同様にして $dy = \Delta y$ である

$\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ と書いて, 式 (4.7) を ((a, b) を省いて)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

と書き，dz を $z=f(x,y)$ の**全微分**とよぶ.

定義　点 (a,b) で $z=f(x,y)$ が全微分可能とする. 方程式

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

で定義される (空間内の) 平面を，点 $(a,b,f(a,b))$ での $z=f(x,y)$ のグラフの**接平面**とよぶ.

例えば $z=f(x,y)=x^2+y^2$ とすると，グラフ上の点 $(1,2,5)$ での接平面の方程式は

$$z-5=2(x-1)+4(y-2)$$

であたえられる.

定理 4.7. *C^1-関数 $f(x,y)$ は各点で全微分可能である.*

証明.

$$\begin{aligned}f(a+h,b+t)-f(a,b+t)=&\{f(a+h,b+t)\\&-f(a,b+t)\}+\{f(a,b+t)-f(a,b)\}\end{aligned}$$

に平均値の定理 (定理 2.8) を適用すると,

$$f(a+h,b+t)-f(a,b+t)=hf_x(a+\theta h,b+t)\ ,$$
$$f(a,b+t)-f(a,b)=tf_y(a,b+\theta' t)$$

となる　$\theta,\theta'(0<\theta,\theta'<1)$　がある.

$u(h,t)=f_x(a+\theta h,b+t)-f_x(a,b)$,

$v(h,t)=f_y(a,b+\theta' t)-f_y(a,b)$

とおけば $f_x(x,y)$,　$f_y(x,y)$ の連続性より

$$u(h,t)\to 0\ \ ((h,t)\to(0,0))\ ,\quad v(h,t)\to 0\ \ ((h,t)\to(0,0))$$

である. そこでいま

$$\varepsilon(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)u(x-a,y-b)+(y-b)v(x-a,y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} & (x,y)\neq(a,b)\\ 0 & (x,y)=(a,b)\end{cases}$$

とおけば，$\varepsilon(x,y)$ は (a,b) で連続で，$f(x,y)$ は点 (a,b) の周りで

$$f(x,y)-f(a,b)=(x-a)f_x(a,b)+(y-b)f_y(a,b)+\rho(x,y)\varepsilon(x,y)$$

と書ける．ここに，

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\ .$$

これは $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であることを示している．□

4.2.3 波動方程式

偏微分が応用数学で使われている例として物理学・力学で登場する波動方程式を導いてみよう．

長さ L，線密度（単位あたりの質量）μ の弦が x 軸に沿って張力 S で張ってある．この弦の 2 点 x と $x+\Delta x$ の間の長さ Δx の微小部分（質量 $\mu\Delta x$）に対する Newton の運動方程式を導こう．
弦の各点の振動方向は弦に垂直なので，これを y 方向とすると，弦の変位は $y(x,t)$ と表される．したがって，弦の加速度は，x を一定に保って，$y(x,t)$ を t で 2 度微分（つまり偏微分）したものである．これを $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ と記す．弦の微小部分の「質量」×「加速度」は

$$\mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{4.8}$$

である．曲線 $y=y(x)$ の点 x での接線の勾配は $\frac{dy}{dx}$ なので，点 x での弦の勾配は，$y(x,t)$ を t を一定に保ったまま，x で微分（偏微分）した $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ である．勾配が小さく $\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta$ の場合を考えると，弦の張力 S の y 成分は $S\frac{\partial y}{\partial x}$ となる．したがって，弦の微小部分に両側から作用する張力の合力の y 成分は

$$S\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t)-S\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$$

である．平均値定理から

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)=\Delta x\frac{\partial^2 y(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\quad 0<\theta<1$$

の形になる. 微小部分に作用する y 軸方向の合力は

$$S\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{4.9}$$

である. したがって，式（4.8）と式（4.9）から，微小部分の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\quad (c=\sqrt{\frac{S}{\mu}}) \tag{4.10}$$

となる. これを弦の波動方程式という.

問 1. 1 変数関数 $f(z), g(z)$ が変数 z について C^2-級とする. このとき

$$y=f(x-ct)+g(x+ct), c \text{ は定数}$$

は波動方程式 *(4.10)* をみたす.

♣◇4.2 節の演習問題 ♣◇

1. 次の関数の (各変数に関する) 導関数を求めよ.

(1)$x^3+3axy+y^3$　(2) $\arctan\frac{y}{x}(x\neq 0)$

(3)$e^x\cos^2 y-e^y\sin^2 x$　(4)$\sqrt{x^2+xy+y^2}((x,y)\neq(0,0))$

(5)$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}((x,y,z)\neq(0,0,0))$　(6) $\sin(x+y)\sin(y+z)\sin(z+x)$

2. 次の関数が原点 $(0,0)$ で偏微分可能か否か判定せよ.

(1) $f(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$

3. 次の関数 $f(x,y)$

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

について

(1) 関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$ の値を求めよ.

定理 4.5（146 ページ）参照.

4. 次の関数の第 2 次偏導関数を求めよ.

(1) $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \qquad (x^2 + y^2 < a^2)$

(2) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

5. $f(x,y) = (xy)^{\frac{2}{3}}$ は $(x,y) = (0,0)$ で全微分可能だが, C^1-関数ではないことを示せ.

6. θ を定数とする.

$f(x,y)$ が点 (a,b) で θ 方向に微分可能とは

$$\lim_{\rho \to +0} \frac{1}{\rho}\{f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) - f(a,b)\}$$

が存在する（収束する）ことである.

この極限値を θ 方向の微分係数とよぶ.(θ が 0 と π のときが x に関する偏微分係数, θ が $\frac{\pi}{2}$ と $\frac{3\pi}{2}$ のときが y に関する偏微分係数である.)

さて

$$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

は, 点 $(0,0)$ ですべての方向に微分可能だが, 全微分可能でないことを示せ.

7. $z = f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能とする. 点 (a,b) を通る直線で接平面に直交するもの (法線とよぶ) を求めよ.

4.3 合成関数の偏微分

合成関数 (合成写像) の偏微分を考えよう. いろいろな公式があるが 一般形は行列の積の形で書ける. まずは最も基本的な次の定理から始める:

定理 4.8. $z = f(x, y)$ を *2* 変数の C^2-関数, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ を *1* 変数の C^2-関数とするとき, 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ は *1* 変数の C^2-関数で, その微分は次式で与えられる:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{4.11}$$

証明. 変数 t の定義域の一点 $t = c$ で $a = \varphi(c), b = \psi(c)$ とする.

定理 2.2（44 ページ）より, $t = c$ の近傍で

$$\varphi(t) - a = \varphi'(c)(t - c) + A(t)(t - c), \tag{4.12}$$
$$\phi(t) - b = \psi'(c)(t - c) + B(t)(t - c) \tag{4.13}$$

と書ける. ここに $A(t), B(t)$ は $t = c$ の近傍での関数で, $t = c$ で連続で $A(c) = 0, B(c) = 0$ となるものである. 一方, 定理 4.7 より $f(x, y)$ は点 (a, b) で全微分可能なので, (a, b) の周りで

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a.b)(y - b) + \rho(x, y)\varepsilon(x, y)$$

と書ける. ここに $\varepsilon(x, y)$ は (a, b) の近傍での関数で, (a, b) で連続で, $\varepsilon(a, b) = 0$ となるものであり, $\rho(x, y)$ は次式で与えられる:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

式（4.12）と式（4.13）を式（4.11）に代入すると

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = f(a, b) + (t - c)\{f_x(a, b)\varphi'(c) + f_y(a.b)\psi'(c)\}$$
$$+(t - c)\{f_x(a, b)A(t) + f_y(a, b)B(t) + \varepsilon(\varphi(t), \psi(t))\}$$

となる. この式 (と定理 2.2（44 ページ）) より

$$\frac{dz}{dt}(c) = \frac{\partial z}{\partial x}(a, b)\ \varphi'(c) + \frac{\partial z}{\partial y}(a, b)\ \psi'(c)$$

が得られ, 式（4.11）が示された. □

式（4.11）の右辺が t の連続関数なので, 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ は C^1-関数である.

例 4.9.

$$z = x^2 - xy + 3y^2; \quad x = t, y = t^2$$

のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y; \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 6y; \frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 2t.$$

なので $\frac{dz}{dt} = (2x - y) \cdot 1 + (-x + 6y) \cdot 2t = 12t^3 - 3t^2 + 2t$
もちろん, 直接代入して $z = t^2 - t \cdot t^2 + 3(t^2)^2 = t^2 - t^3 + 3t^4$, $\frac{dz}{dt} = 2t - 3t^2 + 12t^3$ としても良いがこの計算は定理 *4.8* とは関係ない.

例 4.10. 定理 *(4.8)* を使って第 2 次導関数の公式もある. もちろん微分可能性は必要度に応じて仮定される.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dt^2} =& \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ &+ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2}.\end{aligned}$$

証明.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{dy}\right)\frac{dy}{dt} + \\ &\quad \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2}.\end{aligned}$$

□

例 4.11.

$$z = f(x, y); x = a + ht, y = b + kt, a, b, h, k \quad \text{は定数}$$

としたとき,

$$\frac{d^n z}{dt^n} = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n f(a + ht, b + kt)$$

ただし
$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial y}\right) f = h\frac{\partial f}{\partial x} + t\frac{\partial f}{\partial y}$,

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2ht\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,
$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2t\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+3ht^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+t^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ などである.

系 4.8.1. 一般に

$$z=f(x_1,\cdots,x_n),\quad x_1=\varphi_1(t),\cdots,x_n=\varphi_n(t)$$

のとき

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

である.

定理 4.9.

$$z=f(x,y),x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v)$$

がすべて C^2-関数ならば, 合成関数 $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ は C^2-関数で,

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

*1

証明. u,v のいずれか一方を固定して考えると, 定理 4.9 に帰着される. □

系 4.9.1. 一般に

$$z=f(x_1,\cdots,x_n),\ x_i=g(u_1,\cdots,u_m),\ 1\leqq i\leqq n$$

のとき

$$\frac{\partial z}{\partial u_j}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_j}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_j},\quad 1\leqq j\leqq m$$

である.

*1 以下の計算の考えは <u>誤り</u>: $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial u}$, 「同様にして」$\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial u}$, 右辺は $2\frac{\partial z}{\partial u}$???

(4.14) は次のように (関数を成分とする) 行列の積で書ける:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

例 4.12. 次の z_u, z_v を求めよ.

$$z = e^x \cos y, \quad x = u - v, y = 2u + 3v$$

証明.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

(4.15) を一般の写像の場合に拡張しよう.

n 変数の空間を $\mathbf{R}^n$ と書く. 集合としては, $\mathbf{R}^n$ は n 個の数の組全体の集合である:

$$R^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \text{は実数}, i = 1, \cdots, n\}$$

$\mathbf{R}^n$ の 2 点 $P = (x_1, \cdots, x_n), Q = (y_1, \cdots, y_n)$ の**距離**を

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で定義する. 中心が点 P, 半径 $\delta > 0$ の超球体とは, 集合

$$\Delta(P, \delta) = \{Q \in \mathbf{R}^n | d(P, Q) < \delta\}$$

のことである.$\mathbf{R}^n$ の部分集合 W が**領域**であるとは,

1. W の各点 P に対し, ある正数 $\delta > 0$ があって, 超球体 $\Delta(P, \delta)$ が W に含まれること, ((i) をみたす集合を $\mathbf{R}^n$ の**開集合**とよぶ.)
2. W の任意の 2 点が W 内の曲線で結べること,

の 2 条件をみたすことである.

さて, $\mathbf{R}^n$ の領域 W から R^m への**写像**とは, W の各点 P に $\mathbf{R}^m$ の点 $F(P)$ を対応させる対応 F のことである. 記号で

$$F : W \to \mathbf{R}^m$$

と書く.

W 上の関数は, W から $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ への写像に他ならない.

W から $\mathbf{R}^m$ への写像 F は, 座標を用いると

$$F(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_m) = (y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m(x_1, \cdots, x_n))$$

と書ける. 各 $y_i(x_1, \cdots, x_n)$ は $(x_1, \cdots, x_n)$ の関数である. 各 $y_i(x_1, \cdots, x_n)$ が C^k-関数のとき, F を $\mathbf{C}^k$ -**写像**であるという. 特に C^0 -写像を**連続写像**ともよぶ. これは次のように特徴づけられる (証明は開集合の定義と (4.6) より簡単に示される):

定理 4.10. *$F : W \to \mathbf{R}^m$ が連続写像であるための必要十分条件は, $\mathbf{R}^m$ の任意の開集合 V に対し, V の 逆像 $F^{-1}(V)$, すなわち $F(P)$ が V の点となる P 全体のなす集合が R^n の開集合になることである.*

F が C^1 -写像のとき, 関数 $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$ を (i, j) 成分とする $(m \times n)$-行列

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

を dF と書き, F の**ヤコビ行列**と呼ぶ.

さて, W を $\boldsymbol{R}^n$ の領域とし, W から (同じ次元の) $\boldsymbol{R}^n$ への C^1-写像

$$F : (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (y_1, \cdots, y_n)$$

を考えよう (各 y_i は $(x_1, \cdots, x_n)$ の C^1-関数である). F のヤコビ行列

$$dF = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

の行列式

$$J_F = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

を, F の**ヤコビアン**とよぶ. これを

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}$$

と書く.W 上の連続関数である.

例 4.13. $m \times n$ 行列 $M = (a_{ij})$ により R^n から R^m への写像 F を 次のように決める.

$$(x_1, \cdots, x_n) \to (y_1, \cdots, y_m)$$
$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad 1 \leqq i \leqq m$$

このとき線形写像 $F : R^n \to R^m$ のヤコビ行列は行列 $M = (a_{ij})$ 自身である.

特に M が 2×2 行列のときを見てみよう.

例 4.14. a, b, c, d を定数とするとき

$$y_1 = ax_1 + bx_2$$
$$y_2 = cx_1 + dx_2$$

で決まる写像 $F : R^2 \to R^2$ について

$$dF = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

である.

例 4.15.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 - x_2^2 \\ y_2 &= 2x_1x_2 \end{aligned}$$

で決まる写像 $F : R^2 \to R^2$ について

$$dF = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix}$$

である. 特に円周上 $x_1 = \cos\theta, x_2 = \sin\theta$ に注目すれば $y_1 = \cos 2\theta, y_2 = \sin 2\theta$ であるから x_1x_2 平面上の円周を 1 回転するとき F によるその像は y_1y_2 平面上を 2 回転することになる. 図 4.6 参照.

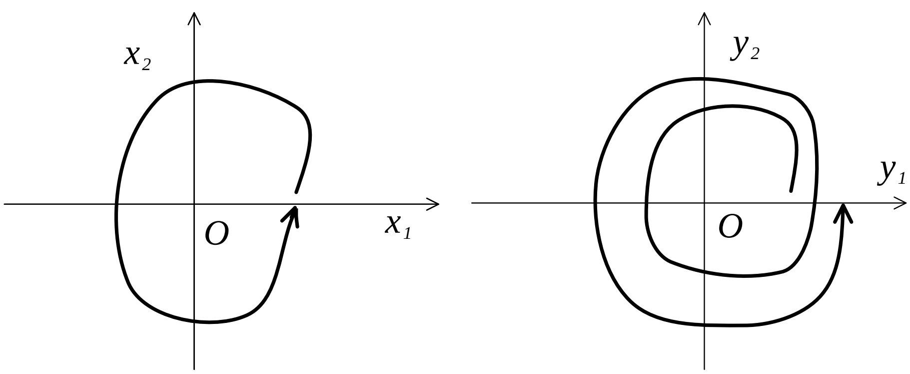

図 4.6　x_1x_2 平面上の原点の回りを 1 回転するとき F によるその像は y_1y_2 平面上を 2 回転することになる.

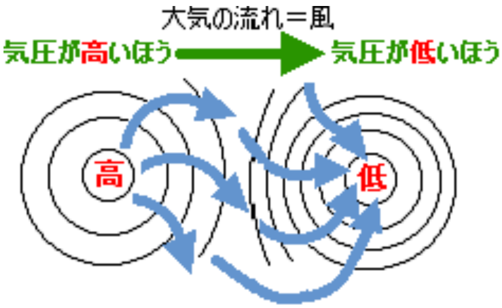

図 4.7　等圧線の図.

$$df = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

を考えると，これは $(1 \times n)$ -行列，すなわち関数を成分とする n 次ベクトル，

すなわち W 上の**ベクトル場**である．これを関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の **グラディアント** (**勾配**) とよび，$\mathrm{grad}\, f$ と書く：

$$df = \mathrm{grad} f.$$

W の各点でのベクトル $\mathrm{grad}\, f$ の向きは，関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の値が最も増加する方向であって，**等高線** ($n = 2$ のとき) ($f(x_1, x_2) = a$ (一定) となる (x_1, x_2) の集合)，**等高面** ($n = 3$ のとき) につねに直交している．

さて，F を W から R^m への写像とし，その**像集合**

$$F(W) = \{F(P) \quad | \quad P \in W\}$$

が R^m の領域 V に含まれているとする．V から R^l への写像 G を考え，**合成写像** $G \circ F$ を考える．これは

$$(G \circ F)(P) = G(F(P))$$

で定義される W から R^l への写像である．このとき，

定理 4.11. *F, G が C^1-写像ならば $G \circ F$ も C^1 -写像で*

$$d(G \circ F) = (dG)(dF)$$

(右辺は行列の積).

証明. $G(y_1, \cdots, y_m) = (z_1(y_1, \cdots, y_m), \cdots, z_l(y_1, \cdots, y_m))$
の各 y_i に $y_i(x_1, \cdots, x_n)$ を代入したものが $G \circ F$ である. 各 z_i の x_k に関する偏微分は, (4.15) のように $(1 \times m)$ -行列と $(m \times n)$ -行列 dF との積で書ける.
これを上から並べたものが (4.16) である. 左右の式を行列で書いてみよう.

$$d(G \circ F) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial z_l}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_l}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_l}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

$$(dG)(dF) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial z_l}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_l}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial z_l}{\partial y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

系 4.9.1（156 ページ）より

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \frac{\partial z_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}, \quad 1 \leqq i \leqq l, 1 \leqq j \leqq n \tag{4.16}$$

行列の積の定義から定理の結論式をうる. □

例 4.16. 2 次元極座標変換　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$
には, 写像

$$\Phi : (r, \theta) \longmapsto (x, y)$$

が対応している. ヤコビ行列は

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$ である.

$z = f(x, y)$ を (x, y) の C^2-関数とすると, 合成関数

$$z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

の偏微分は

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta.$$

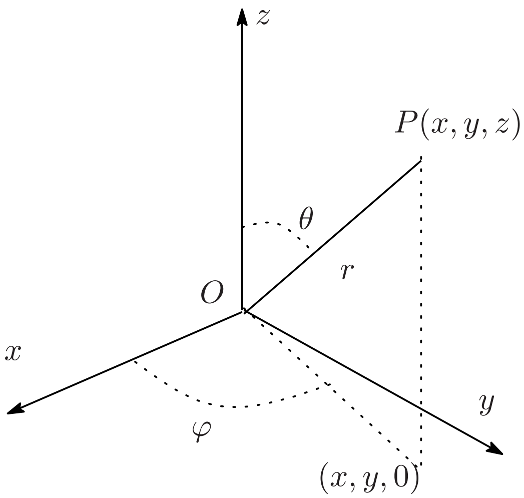

図 4.8　3 次元極座標

例 4.17. *3* 次元空間 R^3 においては, 図 *4.8* のように, 原点 O から $P(x, y, z)$ までの距離 r と角 $\theta(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ と角 $\varphi(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を用いて

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

と書き, (r, θ, φ) を**極座標系** とよぶ. これに対応する写像は

$$\Phi : (r, \theta, \varphi) \longmapsto (x, y, z)$$

で, ヤコビ行列は次で与えられる*:*

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

例 4.18. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r, \theta)$ とおけば,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

が成り立つことを示せ.

証明. 例 4.16 よりヤコビ行列は

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

であるので, その逆行列である

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$$

となり,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta,\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta,\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r},\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

となる. ゆえに,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned}$$

となり, f に $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) \\
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r} \\
&\qquad - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) \\
&= \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r} \\
&\qquad + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\partial g}{\partial r} \\
&\qquad + \frac{1}{r^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

□

定理 4.12 (2 変数の平均値の定理)**.** $f(x,y)$ を C^2-関数とし, 点 (a,b) をその定義域の *1* 点とする. このとき, 点 (a,b) の近傍での各点 $(a+h, b+k)$ に対し $\theta (0<\theta<1)$ が存在して次式が成り立つ*:*

$$\begin{aligned}
f(a+h, b+k) = f(a,b) &+ hf_x(a+\theta h, b+\theta k) \\
&+ kf_y(a+\theta h, b+\theta k).
\end{aligned}$$

証明.　(h,k) を固定して, u を $0 \leqq u \leqq 1$ で動く変数として, u の関数 $g(u) = f(a+hu, b+ku)$ に平均値の定理 (定理 2.8) を適用すると (定理 4.9 より) 求める式が得られる. □

系 4.12.1.　領域 D 上の C^2-関数 $f(x,y)$ が恒等的に $f_x = 0, f_y = 0$ をみたすならば, $f(x,y)$ は定数である.

証明.　点 $P(a,b)$ を D より任意にとる. 定理 4.12 より 点 (a,b) の近傍での各点 (x,y) に対し $\theta (0 < \theta < 1)$ が存在して

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ (x-a)f_x(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)) \\ &+ (y-b)f_y(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)) \end{aligned}$$

仮定から

$$= f(a,b)$$

となるので, (a,b) の周りで $f(x,y)$ はつねに一定となる. 次に D の点 $Q(c,d)$ を任意にとり, P と Q を曲線で結ぶと, 曲線上の各点の周りで $f(x,y)$ が一定となってゆき, 結局 $f(c,d) = f(a,b)$ となる. □

定理 4.13 (2 変数テイラ-の定理)**.** *$f(x,y)$ を C^2-関数とし, 点 (a,b) をその定義域の 1 点とする. このとき点 $(0,0)$ の近傍での各点 (h,k) に対し $\theta (0 < \theta < 1)$ が存在して次式が成り立つ.*

$$f(a+h,b+k) = \begin{cases} f(a,b) \\ +\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b) \\ +\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(a,b) \\ +\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k). \end{cases} \tag{4.17}$$

証明. 前定理の証明と同様に (h,k) を固定して , 変数 u の関数

$$g(u) = f(a+hu, b+ku)$$

に変数 u の区間 $[0,1]$ でテイラ-の定理 (定理 2.16(66 ページ)) を 適用すれば,

$$g(1)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}+\frac{g'(0)}{2!}+\cdots+\frac{g^{n-1}(0)}{(n-1)!}+\frac{g^{n}(\theta)}{n!},0<\theta<1 \quad (4.18)$$

である.

$$\begin{aligned} g(1)&=f(a+h,b+k)\\ g^{(k)}(0)&=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k}f(a,b) \quad 1\leqq k\leqq n-1\\ g^{(n)}(\theta)&=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(a+\theta h,b+\theta k). \end{aligned}$$

になっている.

式 (4.17) は式 (4.18) の書き換えに過ぎない. □

例 4.19. 2 変数 n 次多項式

$$\begin{aligned} f(x,y)&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k}a_{ij}x^{i}y^{j}\\ &=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\cdots+a_{0n}y^n \end{aligned}$$

ここで $a_{ij},0\leqq i\leqq n,0\leqq j\leqq n$ は定数,

の *Taylor* 展開はこの総和の順序である.

式（4.17）の $n=2$ の場合は後で応用されるので次式を書いておこう.

系 4.13.1.

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+$$
$$\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a+h\theta,b+k\theta)h^2+2f_{xy}(a+h\theta,b+k\theta)hk+f_{yy}(a+h\theta,b+k\theta)k^2\right\} \quad (4.19)$$

問 2. 次の関数のマクロ-リン級数展開を *3* 次の項まで求めよ.

$$f(x,y)=e^{x}\log(1+y)$$

定理 4.13, 4.14 は $n(\geqq 3)$ 変数でも同様に成り立つ.

♣♢4.3 節の演習問題 ♣♢

1. $z = f(s,t)$ とする.$x+y=s, x-y=t$ と変数変換することにより，次の各々を関数 z の変数 s,t に関する偏微分で表せ.
   (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$　(2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$　(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$　(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$　(5) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
2. C^2-関数 $f(x,y)$ が $f_x = f_y$ (恒等的) をみたすならば, 1 変数 s の C^1-関数 $g(s)$ があって $f(x,y) = g(x+y)$ (恒等的) と書けることを示せ.
   (ヒント：$s = x+y, t = x-y$ とおけ.)
3. D を長方形の領域とし $f(x,y)$ を D 上の C^2-関数で $f_{xy} = 0$(恒等的) をみたすとする．このとき C^2-関数 $g(x), h(y)$ があって，$f(x,y) = g(x) + h(y)$(恒等的) となることを示せ.
4. 記号
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$$
   を (n 変数の) **ラプラシアン**[*2]とよぶ. C^2-関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ に
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$
   と 作用する. 熱伝導の式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u$，波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\Delta u$ が数理物理で現れる. 特に方程式
$$\Delta f = 0$$
   をみたす C^1-関数を**調和関数**とよぶ. さて, 次の関数 f は調和関数であることを示せ
   (1) $f(x,y) = \log(x^2+y^2), \quad (x,y) \neq (0,0)$
   (2) $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}, \quad (x \neq 0)$

---
*2 Laplacian

(3) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad ((x,y,z) \neq (0,0,0))$

(4) $f(x_1,\cdots,x_n) = (x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1-\frac{n}{2}}, \quad ((x_1,\cdots,x_n) \neq (0,\cdots,0))$

5. $f(x,y), \quad x = \varphi(s,t), \quad y = \psi(s,t)$ がいずれも C^2-関数で

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial y}{\partial s}$$

とする.

(1) x, y は各々 (s,t) について調和関数である，すなわち

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

(2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

(3)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left(\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\right)$$

6. *3 3 変数のラプラシアン $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ は, 極座標系 (r,θ,φ) (例 4.17 参照) で

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

と書けることを示せ.

4.4 極値と最大, 最小問題

多変数関数の極大, 極小の定義も, 1 変数関数の場合と同様である:

定義 領域で定義されている関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ がその領域の 1 点 $P(a_1,\cdots,a_n)$ で **極大** (または**極小**) であるとは, $\delta > 0$ が存在して

*3 この問題は長い計算で相当難しい. 物理学書から持ってきた.

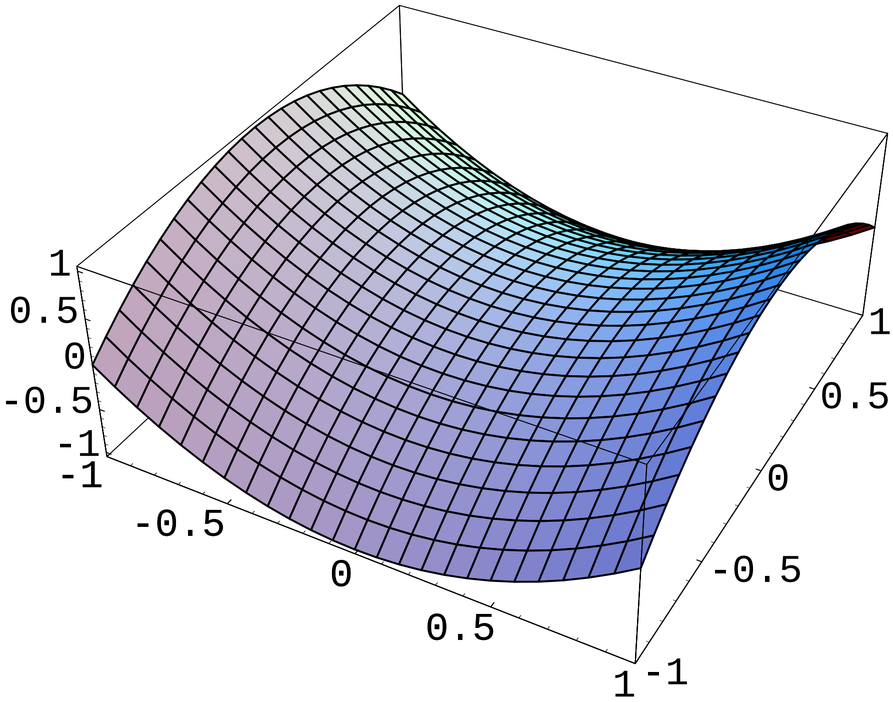

図 4.9　$z = x^2 - y^2$ のグラフ

$0 < d(P,Q) < \delta$ となるすべての点 Q に対し $f(Q) < f(P)$ (または $f(Q) > f(P)$) となることである. ($d(P,Q)$ は 2 点 P,Q 間の距離としている) このように極大, 極小の考えは微分可能の考えよりより一般的である[*4].

例 4.20.　*1.* 関数 $-(x^2+y^2)$ は原点 $(0,0)$ で極大値 0 をとる.

2. および関数 x^2+y^2 は原点 $(0,0)$ で極小値 0 をとる.

3. 関数 xy は, 原点で極値をとらない. なぜならば xy 座標の上で各象限での関数値の正負をみれば解る.<u>原点以外の点でも極値を取らない.</u>

4. 関数 x^2-y^2 を原点 $(0,0)$ で同様な事を考えてみよう.

問 3. 上のアンダ-ライン部分を確かめよ.

以下, この節でも議論をわかりやすくするため, 主として 2 変数の場合を取

[*4] このことは 1 変数のときもそうだった. 例えば $y = |x|$ は $x = 0$ で極小

り扱うが, n 変数でも同様である.

定理 4.14. C^1-関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるならば

$$f_x(a,b)=0, \quad f_y(a,b)=0$$

が成り立つ.

証明. $f_x(a,b)\neq 0$ とする. $f_x(x,y)$ は連続であるので, $f_x(a,b)>0$ ならば (a,b) の周りではつねに $f_x(x,y)>0$ である. それゆえ定理 2.3(45page) より $f(x,b)$ は $x=a$ の周りで単調増加となり $f(a,b)$ が極値であることに反する.
同様に $f_x(a,b)<0$ としても矛盾が生ずるので $f_x(a,b)=0$.
$f_y(a,b)=0$ の方も同様である. □

この定理から, $f_x(a,b)=0, f_y(a,b)=0$ は, $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるための必要条件であることがわかったが, しかし十分条件ではない.

例 4.21. $f(x,y)=xy$ は, $f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$ をみたすが, 例 *4.20* で見たように原点 $(0,0)$ で極値を取らない.

十分条件として次の有力な定理がある.

定理 4.15. C^2-関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で $f_x(a,b)=0, f_y(a,b)=0$ をみたすとする.
$A=f_{xx}(a,b), B=f_{xy}(a,b), C=f_{yy}(a,b)$ とおく. このとき,

1. $A>0, B^2-AC<0$ ならば, $f(x,y)$ は点 (a,b) で極小である.
2. $A<0, B^2-AC<0$ ならば, $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大である.
3. $B^2-AC>0$ ならば, $f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとらず, 点 $(a,b,f(a,b))$ はグラフの峠の点である.

証明. 定理 4.13(166 ページ) より, (0, 0) の近傍での各点 (h,k) に対し $\theta(0<\theta<1)$ があって
$f(a+h,b+k)-f(a,b)$
$=\dfrac{1}{2}\ f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)h^2+f_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)hk+\dfrac{1}{2}\ f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)k^2$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) &= A+\varepsilon_1 \\ f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) &= B+\varepsilon_2 \\ f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) &= C+\varepsilon_3 \end{aligned}$$

として $\varepsilon_i (i = 1,2,3)$ を決めよう.f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} は各々連続関数だから $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_i = 0 \quad (i=1,2,3)$.

$$\begin{cases} h &= r\cos\varphi \\ k &= r\sin\varphi \end{cases}$$

として極座標で表そう. そうすると

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{r^2}{2}\{g(\varphi)+\varepsilon\} \tag{4.20}$$

$$g(\varphi) = A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \tag{4.21}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1\cos^2\varphi + 2\varepsilon_2\cos\varphi\sin\varphi + \varepsilon_3\sin^2\varphi \tag{4.22}$$

式 (4.20) より $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ と $g(\varphi)+\varepsilon$ は同符号（正負を同じくしている）であることがわかる.

式 (4.22) より

$$\lim_{r\to 0} \varepsilon = 0, \tag{4.23}$$

になっている.

$g(\varphi)(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ の最大値，最小値を $M = g(\varphi_1), m = g(\varphi_2)$ とすると，式 (4.21) の右辺の変形を計算することにより

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}(A+C+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}), \\ m &= \frac{1}{2}(A+C-\sqrt{(A-C)^2+4B^2}), \\ Mm &= AC-B^2, \end{aligned} \tag{4.24}$$

であることもわかる.

1. $A > 0, AC - B^2 > 0$ のとき式 (4.24) より $M > m > 0$ である.
式 (4.23) より適当に正数 δ_1 を小さくとって $r < \delta_1$ では $|\varepsilon| < \frac{m}{2}$ と出来る. 故に円内 $r < \delta_1$ では $g(\varphi) + \varepsilon > \frac{m}{2} > 0$. したがって円内 $r < \delta_1$ では $f(a+h, b+k) - f(a,b) > 0$. ゆえにこのとき関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で極小値をとっている.
2. $A < 0, AC - B^2 > 0$ のとき式 (4.24) より $0 > M > m$ である. 上と同様な議論で極大値をとっている. 詳しく言えば式 (4.23) より適当に正数 δ_2 を小さくとって $r < \delta_2$ では $|\varepsilon| < \frac{-M}{2}$ と出来る. 故に円内 $r < \delta_2$ では $g(\varphi) + \varepsilon < \frac{M}{2} < 0$. したがって円内 $r < \delta_2$ では $f(a+h, b+k) - f(a,b) < 0$. ゆえにこのとき関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大値をとっている.
3. $AC - B^2 < 0$ のときは, 式 (4.24) より $m < 0 < M$ となっている. 式 (4.23) より δ_3 を適当に小さく取って $r < \delta_3$ では $|\varepsilon| < \min(-m, M)$ となるようにとる. そうするとこの円内の角度 φ_1 の方向の半径では $f(a+h, b+k) - f(a,b) > 0$, 同じくこの円内の角度 φ_2 の方向の半径では $f(a+h, b+k) - f(a,b) < 0$. 故に関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大でも極小でもない. 点 (a,b) では峠の点になっている.

□

注意　この定理は $B^2 - AC = 0$ のときは, 何も言っていない. このときは極値をとるときもあるし, 取らないときもある. 問題 7(177 ページ) 参照.

例 4.22. 式（*4.2*）（*136* ページ ）の関数 $z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2)$ において例 *4.7*（*145* ページ）の計算結果を使おう.

連立方程式 $f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = 0$ の解を座標で書けば

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (0,-1), \quad (1,0), \quad (-1,0)$$

である. したがって次の表が出来る.

	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(-1,0)$
A	4	$2e^{-1}$	$2e^{-1}$	$-8e^{-1}$	$-8e^{-1}$
B	0	0	0	0	0
C	2	$-4e^{-1}$	$-4e^{-1}$	$-2e^{-1}$	$-2e^{-1}$
B^2-AC	-8	$8e^{-2}$	$8e^{-2}$	$-16e^{-2}$	$-16e^{-2}$

したがって定理 *4.15* より

点 $(0,0)$ で極小値 *0*, 点 $(1,0),(-1,0)$ で極大値 $2e^{-1}$ をとる.

問 4. 次の関数の極値を求めよ.

(1) $x^3-3xy+y^3$　　*(2)* $x^2+xy+y^2+x-y+2$

定理 4.15 は, n 変数の関数に対し次の形に一般化される.(証明は, 線形代数学における固有値および 2 次形式の理論による.)

定理 4.16. $f(x_1,\cdots,x_n)$ を C^2-関数とし, 点 $P(a_1,\cdots,a_n)$ で

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)=\cdots=\frac{\partial f}{x_n}(P)=0$$

をみたすとする.n 次対称行列

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)\right]$$

からできる二次形式が

(1) 正定値ならば $f(x_1,\cdots,x_n)$ は P で極小,
(2) 負定値ならば $f(x_1,\cdots,x_n)$ は P で極大,
(3) 不定符号ならば, $f(x_1,\cdots,x_n)$ は P で極値をとらず, $(P,f(P))$ がグラフの峠の点となる.

この定理において, n 次正方行列 A の**固有値**とは, λ を未知数とする n 次方

程式

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

(E は n 次単位行列, $\det B$ は正方行列 B の行列式) の解のことである.

(この方程式を A の**固有方程式**とよぶ.)

一般に固有値は複素数だが[*5] A が**対称行列** ($a_{ij} = a_{ji}$ をみたす正方行列 $A = [a_{ij}]$) のときは, 固有値がすべて実数であることが知られている.

定理 4.16 の内容は, $n = 2$ の場合, 定理 4.15 の主張と一致することに注意されたい.

さて, 閉領域 D で連続な関数 $f(x, y)$ は D で最大値, 最小値をもつ (定理 4.2). いま, D の内部では, $f(x, y)$ が C^2-関数であると仮定する. 1 変数関数の場合と同様に, 最大値, 最小値を与える点は,

1. D の内部の点 P か, または
2. D の境界の点

$$f_x(P) = 0, \quad f_y(P) = 0$$

をみたす点である.

(なぜなら最大値, 最小値をあたえる点 P に対する $(P, f(P))$ でのグラフの接平面は平面 $z = 0$ と平行でなければならない.)

最大値, 最小値をさがすには, これらの候補点の関数値を比較すればよい.

例 4.23. 周の長さが一定 $2a$ の三角形の中で最大面積をもつものを求めよう.

三角形の 3 辺の長さを x, y, z とおくと, 一辺の長さは他の 2 辺の長さの和より小さいので

$$0 < x < y + z, \quad 0 < y < x + z, \quad 0 < z < x + y$$

が成り立つ. 逆に, これらの不等式をみたす x, y, z は三角形の 3 辺の長さとなりうる. さて,

$$L = 2a = x + y + z \qquad (\text{一定})$$

[*5] 1 変数代数方程式は複素数の範囲では必ず根を持つ, 代数学の基本定理と呼ばれるときがある.

とおく．三角形の面積は, ヘロンの公式より

$$S = \sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}\ .$$

そこで

$$z = L - x - y = 2a - x - y$$

とおき, 関数

$$f(x,y) = \frac{S^2}{a} = (a-x)(a-y)(x+y-a)$$

を考えると, (4.21) より, $f(x,y)$ の定義域は図 $4-9$ の陰影部分の三角形 D の内部である．D における $f(x,y)$ の最大値をあたえる点をさがそう．

$f(x,y)$ は D で正の値をとる．$f(x,y)$ は (x,y) の多項式なので, D の境界の各点での $f(x,y)$ の値を 0 と定義すると, $f(x,y)$ は境界もこめた閉領域 $\bar{D}$ 上で連続な関数である．最小値は 0 で, 境界上の各点であたえられる．したがって最大値は, 内部 D のある点であたえられ, それは

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (a-y)(2a-2x-y) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (a-x)(2a-x-2y) = 0$$

を同時にみたす点 (の 1 つ) である．これを解くと, ただ一つの解

$$x = y = \frac{2}{3}a = \frac{L}{3}(=z)$$

が得られる．それゆえ, この点が最大値をあたえる点である．

したがって, 答は正三角形である．

なお, この点で定理 4.16 の A, B, C を計算すれば

$$A = C = -\frac{2}{3}a < 0, \qquad B = -\frac{a}{3}, \qquad B^2 - AC = -\frac{a^2}{3} < 0$$

となり, この点が極大点となっている．

この解答のように, 連続関数の定義域を閉領域におきかえて, 最大値, 最小値の存在を保証して議論をすすめるのが普通である．

問 5. 鋭角三角形の内部の動点 P から各辺に下した垂線の長さの積が最大となる点 P の位置を求めよ.

♣♢4.4 節の演習問題 ♣♢

1. 次の関数の極値と, それを与える点を求めよ.

   (1) $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$　　(2) $f(x, y) = x^2 + y^2 + y^3$

   (3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$

2. 平面上に n 個の点 $Q_1(a_1, b_1), \cdots, Q_n(a_n, b_n)$ があたえられている. 平面上の動点 $P(x, y)$ に対し

$$PQ_1^2 + \cdots + PQ_n^2$$

   の最小値を求めよ.

3. 閉領域 $x \geqq 0, y \geqq 0, x + y \leqq 1$ 上の関数

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$$

   の最大値と最小値を求めよ.

4. 定円に内接する三角形のうちで, 面積最大のものを求めよ.

5. 直角三角形 $\triangle ABC$ の内部に動点 P を考える. $AP + BP + CP$ を最小にする点 P の位置を求めよ.

6. x, y, z を正の変数で $x + y + z = a$ (一定) となるものとする. l, m, n を正定数とするとき, $x^l y^m z^n$ の最大値を求めよ.

7. 次の例は定理 4.15（171 ページ）の記号でいずれも $B^2 - AC = 0$ となっている.

   (1) $f(x, y) = x^4 + y^4$ は原点 $(0, 0)$ で極小である.

   (2) $f(x, y) = x^4 - y^4$ は原点 $(0, 0)$ で極小でも極大でもない.

4.5　陰関数

中心が原点, 半径 2 の円の方程式は

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{4.25}$$

であたえられる．これを y について解くと

$$y = \pm\sqrt{4-x^2} \quad (-2 \leqq x \leqq 2) \tag{4.26}$$

と, 2 つの関数に分解する．したがって, 式（4.25）で定義される y は, x の普通の関数でなく, 値がいくつか同時に定まっている「多価の関数」である．多価の関数を陰関数とよぶ．一般に 2 変数の関数 $f(x,y)$ に対し, 方程式

$$f(x,y) = 0 \tag{4.27}$$

によって y を x の多価の関数と考え, これを方程式 (4.27) で定義された **陰関数**とよぶ．式 (4.26) の 2 つの関数を式（4.27）で定義された陰関数の **分枝**とよぶ．分枝の 1 つ

$$y = \sqrt{4-x^2} \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$$

を考えると, $x \neq \pm 1$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

である．もう 1 つの分枝

$$y = -\sqrt{4-x^2} \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$$

をとっても, $x \neq \pm 2$ のとき, やはり

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

となる．これは次のようにしても得られる．式（4.25）の両辺を x について偏微分すると (便宜上, y を x の関数と考えて)

$$f_x + f_y y' = 2x + 2yy' = 0$$
$$\therefore y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x}{y}.$$

一般に,

定理 4.17 (陰関数の定理, その 1)**.** *$f(x,y)$ を C^1-関数とし，点 (a,b) で $f(a,b)=0, \quad f_y(a,b) \neq 0$ とする．このとき, x 軸上で $x=a$ の周りで*[*6]*, 陰関数 $f(x,y)=0$ の分枝 $y=\phi(x)$　($\phi(x)$ は C^1-関数) で $\phi(a)=b$ となるものがただ一つ存在する．すなわち,*

C^1-関数 $y=\phi(x)$ で次の (1),(2) をみたすものが, $x=a$ の周りでただ一つ存在する:

1. $f(x,\phi(x))=0$　　*2.* $\phi(a)=b.$

および, 導関数 $\phi^{'}(x)$ は次の形をしている:

$$\phi^{'}(x) = -\frac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}.$$

証明．$f_y(a,b)>0$ と仮定する．（ $f_y(a,b)<0$ のときの証明も同様である.)

$f_y(x,y)$ は連続関数なので, (a,b) を中心に十分小さい長方形をとると, この周上および内部で $f_y(x,y)>0$ と仮定してよい．点 $(a,c),(a,d)\,(c<d)$ を結ぶ線分上で $f(x,y)$ は単調増加なので

$$f(a,c) < f(a,b) = 0 < f(a,d).$$

$f(x,y)$ の連続性より, (必要ならさらに横幅のせまい長方形でとりかえて) この長方形の下辺でつねに $f(x,c)<0,$　上辺でつねに $f(x,d)>0$　としてよい．さて, 点 (x,c) と (x,d) を結ぶ直線上を点 (x,y) が下から上へと動くとき $f(x,y)$ は単調増加なので

[*6] すなわち適当な正数 δ があって区間 $(a-\delta, a+\delta)$ で

$$f(x, y) = 0$$

となる点 $y \quad (c < y < d)$ がただ一つ定まる．y は x によりただ一つ定まるので，x の関数である. これを

$$y = \phi(x)$$

と書く．$\phi(x)$ はその定義から，次式をみたしている:

$$f(x, \phi(x)) = 0, \quad \phi(a) = b.$$

$\phi(x)$ が連続関数であることを示そう.

$x = x_0$ で $\phi(x)$ が連続でないと仮定する.

$\varepsilon > 0$ と $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$ となる点列 $\{x_n\}$ が存在して,

$$|\phi(x_n) - \phi(x_0)| \geqq \varepsilon$$

となる．点列 $\{(x_n, \phi(x_n))\}$ は長方形の点列ゆえ，定理 4.1 の系より，長方形の　ある点 (x_0, y_0) に収束するような部分列が存在する．(この点の $x-$ 座標は x_0 である.)　$|\phi(x_n) - \phi(x_0)| \geqq \varepsilon \quad (n = 1, 2, \cdots)$ なので

$$|y_o - \phi(x_0)| \geqq \varepsilon$$

一方，$f(x_n, \phi(x_n)) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$ ゆえ，$f(x, y)$ の連続性より

$$f(x_0, y_0) = 0$$

である．$\phi(x)$ の唯一性より　$y_0 = \phi(x_0)$ となり矛盾である. 故に $\phi(x)$ は連続関数である.

次に, (x, y) を長方形の内部の点とし, $(h, k)(h \neq 0)$ を $(0, 0)$ の十分近くにとると,2 変数平均値の定理 (定理 4.13) より, $\theta(0 < \theta < 1)$ が存在して

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + hf_x(x + \theta h, y + \theta k) + kf_y(x + \theta h, y + \theta k)$$

と書ける．特にいま, $y = \phi(x)$,　$y + k = \phi(x + h)$ とすると

$$0 = hf_x(x + \theta h, y + \theta k) + kf_y(x + \theta h, y + \theta k)$$

だから,

$$\frac{\phi(x,h)-\phi(x)}{h}=\frac{k}{h}=-\frac{f_x(x+\theta h,y+\theta k)}{f_y(x+\theta h,y+\theta k)}.$$

ここで　$h\to 0$ とすると,$\phi(x)$ の連続性より $k\to 0$ となり, この式の右辺は

$$-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))}$$

に限りなく近づく. すなわち $\phi(x)$ は微分可能で

$$\phi^{'}(x)=-\frac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))}.$$

右辺が連続関数ゆえ, $\phi(x)$ は C^1-関数である. □

問 6. 次の形で与えられた陰関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

1. $y^2-3xy+x^2=0$　　*2.* $x-5y=\log(x^2+y^2+1)$

式 (4.27) の陰関数の定義は, 変数がふえても同様である. すなわち, 変数 $(x_1,\cdots,x_n,y)$ の関数 $f(x_1,\cdots,x_n,y)$　に対し, 方程式

$$f(x_1,\cdots,x_n,y)=0 \tag{4.28}$$

で定義される y を $(x_1,\cdots,x_n)$ の多価の関数と考え, これを 式（4.28 ）で定義された**陰関数**とよぶ. 定理 4.17 は次のように一般化される. 証明は同様である.

定理 4.18 (陰関数定理, その 2)**.**　 *$f(x_1,\cdots,x_n,y)$ を C^1-関数とし, 点 $(a_1,\cdots,a_n,b)$ で $f(a_1,\cdots,a_n,b)=0, f_y(a_1,\cdots,a_n,b)\neq 0$ とする. このとき, $(a_1,\cdots,a_n)$ の周りで定義された C^1-関数 $y=\phi(x_1,\cdots,x_n)$ で, 次の (1) , (2) を満たすものがただ一つ存在する:*

(1) $f(x_1,\cdots,x_n,\phi(x_1,\cdots,x_n))=0,$
(2) $\phi(a_1,\cdots,a_n)=b.$

さらに次が成り立つ :

$$(3)\ \frac{\partial\phi}{\partial x_i}=-\frac{f_{x_i}(x_1,\cdots,x_n,\phi(x_1,\cdots,x_n))}{f_y(x_1,\cdots,x_n,\phi(x_1,\cdots,x_n))}\qquad (i=1,\cdots,n).$$

陰関数定理の一般形は次の定理である.

定理 4.19 (陰関数定理 , 一般形). $f_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_p) \quad (i = 1, \cdots, p)$ を C^1-関数とする.

点 $P(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_p)$ で $f_i(P) = 0 \quad (i = 1, \cdots, p)$ および

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_p)}{\partial(y_1, \cdots, y_p)}(P) \neq 0$$

このとき, 点 $(a_1, \cdots, a_n)$ の近傍での C^1- 関数 $\phi_i(x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 1, \cdots, p)$ で次の *(1)* , *(2)* をみたすものがただ一組存在する *:*

(1) $f_i(x_1, \cdots, x_n, \phi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \phi_p(x_1, \cdots, x_n)) = 0 \quad (i = 1, \cdots, p)$,
(2) $\phi_i(a_1, \cdots, a_n) = b_i \qquad (i = 1, \cdots, p)$.

さらに , 全微分 $d\phi_i \quad (i = 1, \cdots, p)$ は次の連立 *1* 次方程式を満たす*:*

(3) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} dx_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial y_i} d\phi_i = 0 \qquad (k = 1, \cdots, p).$$

証明. 簡単のため, $p = 2$ の場合を証明する. また, 記号を簡単にするため, $n = 2$ とする. (一般の n でも全く同様である.)

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y_1, y_2)}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(P) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.29}$$

ゆえ, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(P)$ と $\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}(P)$ は同時に 0 にはならない. $\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}(P) \neq 0$ としよう.

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(P) \neq 0$$

の場合も同様である.

定理 4.19 により, (a_1, a_2, b_1) の近傍での C^1 の場合も同様である.C^1-関数 $\psi(x_1, x_2, y_1)$ がただ一つ存在して次をみたす :

$f_1(x_1, x_2, y_1, \psi(x_1, x_2, y_1)) = 0$,
$\psi(a_1, a_2, b_1) = b_2$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=-\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial y_2}},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2}=-\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial f_1}{\partial y_2}},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y_1}=-\frac{\frac{\partial f_1}{\partial y_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial y_2}}.$$

いま,

$$g(x_1,x_2,y_1)=f_2(x_1,x_2,y_1,\psi(x_1,x_2,y_1))$$

とおけば, (4.29) より $g(a_1,a_2,b_1)=0$.

また,

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}=\frac{\partial f_2}{\partial y_1}+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{\partial\psi}{\partial y_1}=\frac{\partial f_2}{\partial y_1}-\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}}=\frac{-1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}}\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,y_2)}$$

は, (4.27) より (a_1,a_2,b_1) で 0 でない. したがって ((4.32) より) 再び定理 4.19 を適用すると, (a_1,a_2) の近傍での C^1-関数 $\phi(x_1,x_2)$ がただ一つ存在して次をみたす：

$$g(x_1,x_2,\phi(x_1,x_2))=0,$$
$$\phi(a_1,a_2)=b_1,$$
$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial y_1}},\quad \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial y_1}}.$$

そこでいま

$$\phi_2(x_1,x_2)=\psi(x_1,x_2,\phi_1(x_1,x_2))$$

とおけば $\varphi_2(x_1,x_2)$ も (a_1,a_2) の近傍での C^2-関数で, (4.28) と (4.33) より

$$f_1(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2),\varphi_2(x_1,x_2))=0,$$
$$f_2(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2),\varphi_2(x_1,y_2))=0$$

をみたす. また, (4.34), (4.29) より

$$\varphi_1(a_1,a_2)=b_1,\qquad \varphi_2(a_1,a_2)=b_2$$

である.

(4.36) と (4.37) の両辺の全微分を求めると, (移項して)

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}dy_2=-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}dy_2=-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1-\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2.$$

これらの式を dy_1, dy_2 を未知数とする連立 1 次方程式とみて解くと

$$dy_1 = \frac{-1}{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y_1, y_2)}} \left\{ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} dx_1 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} dx_2 \right\},$$

$$dy_2 = \frac{-1}{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y_1, y_2)}} \left\{ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{vmatrix} dx_1 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} dx_2 \right\}.$$

かくして, $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ は (i), (ii), (iii) をみたす.

(i), (ii) をみたす $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ がただ一組しか存在しないことは, 上の議論の逆をたどれば示される. すなわち, (a_1, a_2) の近傍での関数 $\mu_1(x_1, x_2)$, $\mu_2(x_1, x_2)$ が

$$f_1(x_1, x_2, \mu_1(x_1, x_2), \mu_2(x_1, x_2)) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, \mu_1(x_1, x_2), \mu_2(x_1, x_2)) = 0,$$
$$\mu_1(a_1, a_2) = b_1, \qquad \mu_2(a_1, a_2) = b_2$$

をみたすとする.(4.28) の y_1 に $\mu_1(x_1, x_2)$ を代入すると

$$f_1(x_1, x_2, \mu_1(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2, \mu_1(x_1, x_2))) = 0.$$

これと (4.39) を比べると, $\psi(x_1, x_2, y_1)$ の唯一性より

$$\mu_2(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2, \mu_1(x_1, x_2))$$

となる. この式を (4.40) に代入すると, (4.31) より

$$g(x_1, x_2, \mu_1(x_1, x_2)) = 0.$$

ところが, (4.33), (4.34) をみたす φ_1 はただ一つゆえ

$$\mu_1(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2)$$

となる. ゆえに,

$$\mu_2(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2)) = \varphi_2(x_1, x_2)$$

となる. したがって, (i), (ii) をみたす $\varphi_1(x_1,x_2)$, $\varphi_2(x_1,x_2)$ の組はただ一つある. □

上の証明は $p=2$ の場合を,$p=1$ の場合 (定理 4.19) に帰着させている.

一般の p の場合も, $p-1$ の場合に (同様の議論で) 帰着させることができる. 数学的帰納法により, 定理の証明が完成する.

次の定理は, 少し専門的な研究などで基本的に重要な定理である:

定理 4.20 (逆写像定理)**.** *W を R^n の 領域, $F:W\to R^n$ を C^1-写像とする. W の 1 点 P で $J_F(P)\neq 0$ ならば, P を 含 む 領域 U と, $F(P)$ を含む 領域 V が存在して, F は U から V の上への 1 対 1 写像 (V の各点 S に対し, $F(R)=S$ となる U の点 R がただ一つ存在する写像) で, 逆写像*

$$F^{-1}:V\to U$$

($F(R)=S$ のとき, $F^{-1}(S)=R$ で定義される写像) も C^1-写像である. また $d(F^{-1})=(dF)^{-1}$ が成り立つ.

証明. 座標を与えて $P(a_1,\cdots,a_n), Q=F(P), Q(b_1,\cdots,b_n)$ とおく. 変数としての y_i と関数としての $y_i(x_1,\cdots,x_n)$ を区別するため, 関数の方をとおく. いま

$$f_i(y_1,\cdots,y_n,x_1,\cdots,x_n)=g_i(x_1,\cdots,x_n)-y_i \quad 1\leqq i\leqq n$$

とおく.

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(Q,P)=\frac{\partial(g_1,\cdots,g_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(P)=J_F(P)\neq 0$$

ゆえ, 陰関数定理 (定理 4.20) より, Q を含む領域 V' 上の C^1-関数

$$\varphi_i(y_1,\cdots,y_n) \quad (1\leqq i\leqq n)$$

が存在して

$$f_i(y_1,\cdots,y_n,\varphi_1(y_1,\cdots,y_n),\cdots,\varphi_n(y_1,\cdots,y_n))$$

$$= g_i(\varphi_1(y_1,\cdots,y_n),\cdots,\varphi_n(y_1,\cdots,y_n)) - y_i = 0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

および

$$(\varphi_1(Q),\cdots,\varphi_n(Q)) = P$$

が成り立つ. すなわち

$$G(y_1,\cdots,y_n) = (\varphi_1(y_1,\cdots,y_n),\cdots,\varphi_n(y_1,\cdots,y_n))$$

は V' 上の C^1-写像で

$$F \circ G = I(\text{恒等写像}), F(Q) = P$$

をみたす.

連鎖律より $(dF)(dG) = E$(n 次単位行列), したがって $dG = (dF)^{-1}$(逆行列) が成り立つ. 両辺の行列式をとると

$$J_F J_G = 1, \quad J_G = \frac{1}{J_F}$$

となる. とくに $J_G \neq 0$ である.

この G について, 上と同じ議論を行えば, P を含む領域 U と, C^1-写像

$$H : U \to \mathbf{R}^n$$

で

$$G \circ H = I, \qquad H(P) = Q$$

をみたすものが存在する. ところが,

$$H = I \circ H = (F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H) = F \circ I = F$$

なので, H は F に他ならない:

$$G \circ F = I, \qquad F \circ G = 1.$$

これらの式は, F が U から像集合 $F(U)$ への 1 対 1 写像で,G がその逆写像であることを示す (図 4-12). $V = F(U)$ が 領域であることを示そう.

$V = F(U) = G^{-1}(U)$ なので, 定理 4.11 より V は開集合である U の 2 点が曲線で結べるので, (その F による像曲線を考えれば)V の 2 点も曲線で結べる. したがって V は領域である.

結局 F は領域 U から領域 V への 1 対 1 で且つ C^1-写像で, 逆写像 $F^{-1} = G$ も V 上 C^1-写像である. $\square$

♣♢4.5 節の演習問題 ♣♢

1. C^1-関数 $f(x,y)$ を用いて定義される曲線

$$C : f(x,y) = 0$$

上の点 (a,b) での C の曲線の接線の方程式は

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = 0$$

であたえられることを示せ. ただし $f_x(a,b), f_y(a,b)$ は同時に 0 ではない, とする. (ヒント:陰関数定理を用いよ.)

2. C^1-関数 $f(x,y,z)$ を用いて定義される**曲面**

$$S : f(x,y,z) = 0$$

上の点 (a,b,c) での**接平面**の方程式は

$$f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

であたえられることを示せ. ただし $f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c)$ は同時に 0 ではない, とする.

3. $f(x,y)$ が C^2-関数ならば, 定理 4. 18 であたえられる陰関数 $f(x,y) = 0$ の分枝 $y = \varphi(x)$ も C^2-関数で,

$$\varphi''(x) = \frac{-1}{f_y^3}(f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2)$$

が成り立つことを示せ. (一般に $f(x,y)$ が C^k-関数ならば $\varphi(x)$ も C^k-関数である. このことは一般の陰関数定理でも同様である. また逆写像定理で F が C^k- 写像ならば, $F^{-1} : V \to U$ も C^k- 写像である.)

4. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $lx+my+nz=p$ ($a>0$, l,m,n は定数) のとき, $ny \neq mz$ をみたす点 (x,y,z) において $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ を求めよ.
5. $x=u^2-v^2$, $y=uv$, $z=u^2+v^2$ (ただし $(u,v)\neq(0,0)$) のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.
6. $F:\ (u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ を平面の領域 W から R^3 への C^1- 写像とし, 次の 2 条件をみたすとする.

   (i)　F は W から像集合 $F(W)$ への 1 対 1 写像 ($F(u,v)=F(u',v')$ ならば $(u,v)=(u',v')$ となる写像) である.

   (ii)　W の各点で $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ は同時に 0 でない.

   このとき, 像集合 $F(W)$ は R^3 の中の曲面を定義する. これを (u,v) をパラメ-タ-とするなめらかな曲面 とよぶ.
   さて $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$ となる (x,y,z) の近傍で, $F(W)$ は C^1-関数 $\varphi(x,y)$ を用いて $z=\varphi(x,y)$ であたえられることを示せ.

4.6　条件付き最大, 最小問題

領域または閉領域全体でなく, その一部分での関数の最大値, 最小値を求める問題がしばしば生ずる.

例えば, 曲線

$$x^4+y^4-1=0$$

(図 4 - 13) 上の点 (x,y) が動くときの関数

$$f(x,y)=x^3+2y^3$$

の最大値, 最小値はどのようにして求めたらよいであろうか.

定理 4.21 (Lagrange の未定乗数法, その 1). 閉領域上 D 上に C^1-関数 $f(x,y)$ と $\varphi(x,y)$ があたえられているとする. λ (これが 未定乗数) をパラメ-タ-として,

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

とおく.

$$\text{条件}\quad \varphi(x,y)=0$$

のもとでの関数 $f(x,y)$ の最大値, 最小値をあたえる点 (x,y) は, 次の *(i), (ii), (iii)* のどれかの点である*:*

(i) D の境界点で $\varphi(x,y)=0$ をみたす点.

(ii) 曲線 $\varphi(x,y)=0$ の特異点（ $\varphi_x(x,y)=0,\ \varphi_x(x,y)=0$ をみたす点 ）.

(iii) x,y,λ を未知数とする次の連立方程式の解が与える点*:*

$$F_x(x,y,\lambda)=0, F_y(x,y,\lambda)=0, \varphi(x,y)=0.$$

証明. 点 (a,b) で $f(x,y)$ が, 条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで最大値または最小値をとったとする. (a,b) が D の境界点でも, 曲線 $\varphi(x,y)=0$ の特異点でもないとする.

$\varphi_y(x,y)\neq 0$ とすると陰関数定理 (定理 4.18) より, a の近傍で, 陰関数 $\varphi(x,y)=0$ の分岐 $y=\psi(x)$ で $b=\psi(a)$ となるものがある. これを代入すると

$$z=f(x,\psi(x)).$$

したがって,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx}(a)&=f_x(a,b)+f_y(a,b)\psi'(a)\\&=f_x(a,b)-\frac{\varphi_x(a,b)}{\varphi_y(a,b)}f_y(a,b)\end{aligned}$$

点 (a,b) で ($\varphi(x,y)=0$ のもとで) $f(x,y)$ が最大値または最小値ゆえ, この微分係数が 0 でなければならない. したがって, $\varphi_x(a,b)\neq 0$ のときは

$$\frac{f_x(a,b)}{\varphi_x(a,b)}=\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}.$$

この等しい値を $-\lambda$ とおけば, (a,b,λ) は

$$F_x(a,b,\lambda)=0, F_y(a,b,\lambda)=0, \varphi(a,b)=0$$

をみたす. $\varphi_x = 0$ のときは, $f_x(a,b) = 0$ となるので,

$$\lambda = -\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}$$

とおけば, (a,b,λ) がやはり連立方程式 (4. 42) の解である.
$\varphi_y(a,b) = 0$, $\varphi_x(a,b) \neq 0$ のときも同様である. □

注意 (i) 定理の条件下で最大値, 最小値が存在することは, 定理 4. 2, 定理 1. 18 と同様の方法で示される.
(2) 連立方程式 (4. 42) の解をあたえる点 (x,y) は, 一般に「 条件 $\varphi(x,y) = 0$ のもとでの極値 」 をあたえる. この定理を, 条件

$$\varphi(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$$

のもとでの関数

$$f(x,y) = x^3 + 2y^3$$

に適用してみよう.

$$D = \{(x,y) || x| \leqq 2, |y| \leqq 2\}$$

としてよい. D の境界は曲線と交わらないので, D の境界点は考える必要がない. また, 曲線 $x^4 + y^4 - 1 = 0$ 上には特異点がない.

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) \\ &= x^3 + 2y^3 + \lambda(x^4 + y^4 - 1) \end{aligned}$$

とおき, 連立方程式

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda) &= 3x^2 + 4\lambda x^3 = 0. \\ F_x(x,y,\lambda) &= 6y^2 + 4\lambda y^3 = 0. \\ \varphi(x,y) &= x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{aligned}$$

を解くと, 次の 6 組の解がえられる:

$$(x,y,z) = \left(\ 0, 1, -\frac{3}{2}\ \right), \left(\ 0, 1, \frac{3}{2}\ \right), \left(\ 1, 0, -\frac{3}{4}\ \right), \left(\ -1, 0, \frac{3}{4}\ \right),$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{17}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{17}}, \frac{3}{4}\sqrt[4]{17}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{17}}, \frac{2}{\sqrt[4]{17}}, -\frac{3}{4}\sqrt[4]{17}\right).$$

各点での $f(x,y)$ の値は, それぞれ (順に)

$$2, \quad -2, \quad 1, \quad -1, \quad -\sqrt[4]{17}, \quad \sqrt[4]{17}$$

である. これらのうちの最大値 $\sqrt[4]{17}$, 最小値 $-\sqrt[4]{17}$ が, それぞれ問題の最大値, 最小値をあたえる.

Lagrange の未定乗数法は変数をふやしても同様である (証明も同様である).

定理 4.22 (Lagrange の未定乗数法, その 2). *n 次元空間 $\mathcal{R}^n$ の閉領域 $\mathcal{D}$ 上に, $\mathcal{C}^1-$ 関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ と $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ があたえられているとする.λ をパラメ-タとして*

$$\mathcal{F}(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = f(x_1, \cdots, x_n) + \lambda\varphi(x_1, \cdots, x_n)$$

とおく. 条件

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

のもとでの $f(x_1, \cdots, x_n)$ の最大値, 最小値をあたえる点 $(x_1, \cdots, x_n)$ は, 次の (i), (ii), (iii) のどれかの点である:
(i)$\mathcal{D}$ の境界点で $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0$ をみたす点.
(ii) 超曲面 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0$ の 特異点 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n)\right)$ をみたす点
(iii)　$x_1, \cdots, x_n, \lambda$ を未知数とする次の連立方程式の解をあたえる点:

$$\mathcal{F}(x_1) = 0, \quad \cdots, \quad \mathcal{F}(x_n) = 0, \quad \varphi = 0.$$

また, 条件をふやしても同様である.

定理 4.23 (Lagrange の未定乗数法, 一般形). *n と k を自然数で $k < n$ とする.n 次元閉領域 $\mathcal{D}$ 上に, $k+1$ 個の C^1- 関数 $f(x_1, \cdots, x_n), \varphi_1(x_1, \cdots, x_n), \quad \cdots, \quad \varphi_k(x_1, \cdots, x_n)$ があたえられているとする. $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ を k 個のパラメ-タとして*

$$\mathcal{F}(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) = f(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j(x_1, \cdots, x_n)$$

とおく.

$$\text{条件}\qquad \varphi_j(x_1,\cdots,x_n)=0 \qquad (1\leqq i\leqq k)$$

のもとでの $f(x_1,\cdots,x_n)$ の最大値, 最小値をあたえる点 $(x_1,\cdots,x_n)$ は, 次の *(i), (ii), (iii)* のどれかの点である:

(i)　$\mathcal{D}$ の境界点で $\varphi_j(x_1,\cdots,x_n)=0$ $(1\leqq j\leqq k)$ をみたす点.

(ii)　$\mathcal{D}$ から $\mathcal{R}^k$ への写像

$\Phi:(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_k(x_1,\cdots,x_n))$

のヤコビ行列 $d\Phi$ の階数が k より小さくなる点.

(iii)　$x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ を未知数とする次の連立方程式の解をあたえる点:

$$\mathcal{F}_(x_i)=0 \quad (1\leqq i\leqq n), \qquad \varphi_j=0 \quad (1\leqq j\leqq k)$$

注意 行列 A の 階数とは, A の行ベクトルの一次独立のものの最大個数である. 列ベクトルといっても同じである. 線形代数学のテキストを見られたし.

♣♢4.6 節の演習問題 ♣♢

1. 条件 $x^2+y^2=1$(円) のもとで, 次の関数の最大値, 最小値を求めよ.

   (1)　$f(x,y)=x^3+y^3$　　(2)　$f(x,y)=x+2y$

   (3)　$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$　(a,b,c は定数)

2. 条件 $x^2+y^2+z^2=1$(球面) のもとで, 次の関数の最大値, 最小値を求めよ.

   (1)$f(x,y,z)=x+2y+3z$　　(2)$f(x,y,z)=xy+\frac{z}{2}$

   (3)$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2qyz+2rxz$

   (a,b,c,p,q,r は定数)

3. 2 条件

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c>0) \qquad (\text{楕円面}),$$

$$lx+my+nz=0 \qquad (\text{原点を通る平面})$$

のもとでの, 関数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ の最大値, 最小値は次の方

程式の 2 解であることを示せ:

$$\frac{a^2l^2}{X-a^2}+\frac{b^2m^2}{X-b^2}+\frac{c^2n^2}{X-c^2}=0.$$

ただし,X は未知数で

$am-bl, bn-cm, an-cl$ は同時に 0 でない，とする.

4. 点 (x_0, y_0) から直線 $ax+by=c$ までの最短距離と, それをあたえる直線上の点 (x_1, y_1) を求めよ.
5. 点 (x_0, y_0, z_0) から平面 $ax+by+cz=d$ までの最短距離と, それをあたえる平面上の点 (x_1, y_1, z_1) を求めよ.
6. 体積が一定の直方体のうちで, 表面積が最小となるものはなにか.
7. 楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a, b, c>0)$ に内接する直方体のうちで, 体積が最大となるのは何か.

図 4.10　自由と独立?，フランス革命 (1789 年).

第 5 章

重積分

この章で多変数関数の定積分である重積分を学ぶ．1 節 でその基礎理論をやるがこれは論理が複雑であり，難しい．3 章の 1 節とよく似ている. 実際の計算方法である累次積分, 多変数の場合の変数変換 (これは 1 変数の場合の置換積分に相当する), 重積分の場合の広義積分を論じる. この章の 1 節はある程度の納得度でやりすごし後に続く計算問題が正しく出来るように学んだ方が得策である.[*1] さらに, 微分積分学の基本定理の多変数版に相当する Green の定理, Gauss の定理を論じる. これらは数理科学で頻発して使われている.

図 5.1　L.Euler（オイラ-）Euler はスイス，ロシアの数学者. 多産な計算結果を残している.

[*1] もちろん，理論体系の中では意味・意義がある.

5.1　重積分の話の始まり

第 3 章 §3.2 で, 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ の定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

の存在と性質を論じた. この節では多変数連続関数の定積分 - これを重積分と呼ぶ - の存在と性質を論じる.n 変数 (n 重積分) でも議論は同様なのだが, ここでは簡単のため 2 変数 (2 重積分) の場合に議論を限定する. 1 変数関数の場合は積分区間が閉区間 $[a,b]$ であったが, 2 変数関数の場合は, いろいろな有界閉領域上での 2 重積分を考察せねばならないので議論が複雑になる.
重積分というのは，感覚的に言えば次の例のようなものである.

例 5.1. 水を満々と蓄えた湖がある.$d(x,y)$ を池の上の点 (x,y) での深さとする。そうするとこの池の水の容積は

$$\iint_{\text{池全体}} d(x,y)dxdy$$

である。

ここで記号 $\iint$ および $dxdy$ というのはあとで説明します．だから容積がどれ位かを推察したければ沢山の点の深さを観測して，2 次元の区分求積法で容積の近似が解るはずです.

まず初めに, 有界閉領域が長方形[*2]

$$R = \{(x,y)|a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\}$$

の場合を考える. 取り扱う R 上の関数 $f(x,y)$ は, さしあたって連続性を仮定せず, 有界性のみを仮定する. すなわち, 定数 M, m が存在して, R の各点 (x,y)

[*2] ここで長方形とは縦の辺が y 軸に平行，横の辺が x 軸に平行なものをいう. 以下，１節ではこの意味で使う

に対し

$$m \leqq f(x,y) \leqq M$$

が成り立つとする. しばらくは §3.2 と似た議論が続く. R を図 5-1 のように, mn 個の小さい長方形に分ける分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

を考える. この分割によって生ずる小さい長方形

$$R_{ij} = \{(x,y)|x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_i\}$$

での関数値 $f(x,y)$ の集合の上限を M_{ij}, 下限を m_{ij} とおく. そして, 和

$$S(\Delta, f) = \sum_{i,j} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$
$$s(\Delta, f) = \sum_{i,j} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

をつくる. ここに $\displaystyle\sum_{i,j}$ は $1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n$ である全ての i,j に亘る総和という意味. また, 点 $P_{ij}(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ を R_{ij} から任意に選ぶと

$$\begin{aligned} m(b-a)(d-c) &\leqq s(\Delta, f) \\ &\leqq \sum_{i,j} f(P_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &\leqq S(\Delta, f) \leqq M(b-a)(d-c) \end{aligned}$$

が成り立つ.i,j を動かす時, R_{ij} の対角線の長さ

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}, \quad 1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n$$

の最大値を $\delta(\Delta)$ とおく. いろいろな分割 Δ をとったときの $s(\Delta, f)$ の上限を $s(f), S(\Delta, f)$ の下限を $S(f)$ とおくと (§3.2 と同様の議論で)

$$s(f) \leqq S(f)$$

が得られる．また, 次の定理は定理 3.3(Darboux [*3]の定理) と同様に証明される:

定理 5.1. $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_k, \cdots$ を分割の列で $\delta(\Delta_k) \to 0 (k \to \infty)$ をみたすとする. このとき

$$\lim_{k\to\infty} s(\Delta_k, f) = s(f), \lim_{k\to\infty} S(\Delta_k, f) = S(f)$$

が成り立つ.

さて,

$$s(f) = S(f)$$

が成り立つとき, 関数 $f(x,y)$ は長方形 R 上で **可積分**[*4]であるという. この等しい値を

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

と書き, R 上の**二重積分**とよぶ[*5].
(5.4) と定理 5.1 より, $f(x,y)$ が可積分のとき次が成り立つ:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\delta(\Delta)\to 0} \sum_{i,j} f(P_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

定理 5.2. 関数 $f(x,y)$ が長方形 R で連続とする.

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

例 5.2.

$$I = \iint_R (x+y^2)dxdy \quad R: 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$$

を求めよ.

[*3] ダルブー,（1842-1917）フランス
[*4] Riemann 積分可能であるともいう.
[*5] 記号 $\iint_R f(x,y)dxdy$ は $\iint_R f(x,y)dydx$ 又は 2 次元重積分であることを強調して $\iint_R f(x,y)dS$ とも書くこともある.

証明.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (x+y^2)dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

□

系 5.2.1. 関数 $f(x,y)$ が長方形 R で連続とする.

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

としても良い.

定理 5.3. 図 *5-2* のように長方形 R が（重なり合わない）いくつかの長方形 $R_i(i=1,\cdots,l)$ に分割されたとする.R 上の有界な関数 $f(x,y)$ が各 R_i 上で可積分ならば R 上でも可積分で, 次が成り立つ*:*

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)dxdy + \cdots + \iint_{R_l} f(x,y)dxdy$$

証明. 長方形 R_i の辺の延長線がすべて分割の切り口に用いられているような分割 Δ をとり, $\delta(\Delta)$ を十分小さくとれば, あたえられた $\varepsilon > 0$ に対し

$$S(\Delta_i, f) - s(\Delta_i, f) < \varepsilon \, (i = 1, \cdots, l)$$

ととれる. ここに Δ_i は Δ から生ずる R_i の分割である.

$$S(\Delta, f) = \sum_{i=1}^{l} S(\Delta_i, f), s(\Delta, f) = \sum_{i=1}^{l} s(\Delta_i, f)$$

なので, (5.7) を i について加え合わせると

$$S(\Delta, f) - s(\Delta, f) < l\varepsilon$$

が得られる.l は固定され ε は任意ゆえ, $S(f) = s(f)$ となり $f(x,y)$ は R 上可積分となる.(5.6) は (5.8) より得られる. □

定理 5.4. 長方形 R 上連続な関数は可積分である.

証明. R 上連続な関数 $f(x,y)$ は一様連続である (定理 4.4). すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta' > 0$ が存在して, $d(P,Q) < \delta'$ となるすべての R の点 P, Q に対し

$$|f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

が成り立つ.$\delta(\Delta) < \delta'$ となる分割 Δ をとれば

$$\begin{aligned} 0 &\leqq S(\Delta, f) - s(\Delta, f) \\ &= \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &< \varepsilon(b-a)(d-c) \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので, これより $S(f) = s(f)$ が得られ, $f(x,y)$ は R 上可積分である. □

注意 $f(x,y)$ が連続関数でつねに $f(x,y) > 0$ のときは, (5.5) より

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

は図 5.2 のようなグラフと (5 つの[6]) 平面で囲まれた立体の「体積」に等しい.

例 5.3.

$$I = \iint_D (x^2 + 2y^2)dxdy, \quad D : |x| \leqq 1, |y| \leqq 1$$

図 *5.2* 参照.

[6] xy 平面と 4 つの側面

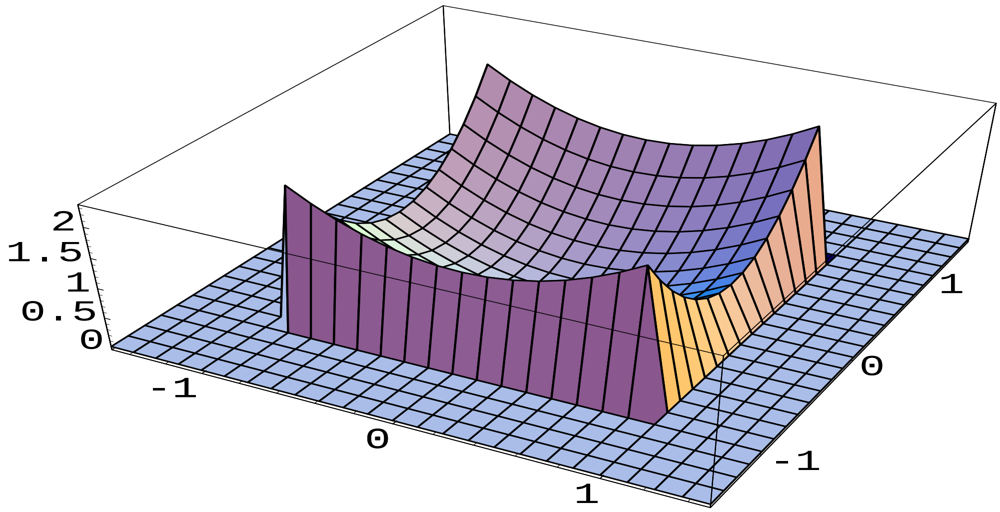

図 5.2　$z = x^2 + 2y^2, D : |x| \leqq 1, |y| \leqq 1.$

証明. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+2y^2)dy = 2x^2 + \frac{4}{3}.$

$$\int_{-1}^{1}(2x^2+\frac{4}{3})dx = 4. \qquad \therefore \quad I = 4. \qquad \square$$

次の例も一応言っとこう.

長方形 R 上で可積分でない不連続関数の例として,

例 5.4.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x, y \text{ がともに有理数のとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

はどんな分割 Δ に対しても $s(\Delta, f) = 0$, $S(\Delta, f) = 1$ となり, $s(f) = 0$, $S(f) = 1$ となって $f(x,y)$ は可積分でない.

さて, なめらかな曲線 (§ 3. 6) を有限個つなぎ合わせた曲線を 区分的になめらかな曲線とよぶ. 例えば長方形の境界は区分的になめらかな曲線である. この章では主としてこのような曲線を取り扱う.

次に, 長方形とは限らない有界閉領域 D 上有界な関数 $f(x,y)$ を考える. D を含む長方形 R をとり, R 上の関数 $f^*(x,y)$ を

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ((x,y)\text{ が } D \text{ の点のとき}), \\ 0 & ((x,y)\text{ が } D \text{ の点でないとき}) \end{cases}$$

と定義する. $f^*(x,y)$ は R 上有界である.

定義　$f(x,y)$ が D 上**可積分**とは $f^*(x,y)$ が R 上可積分なことを意味する.

また $f(x,y)$ の D 上の **2 重積分**を

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_R f^*(x,y)dxdy$$

で定義する.

この定義が R のとり方に無関係であることを示すのは容易である.

(R と他の R' の共通部分も長方形だからである)

2 重積分には次の性質があるが殆ど自明だろう.

定理 5.5. 有界閉領域 D 上有界な関数 $f(x,y), g(x,y)$ が可積分とする. このとき,

1. 定数 a,b に対し $af+bg$ も可積分で
$$\iint_D (af+bg)dxdy=a\iint_D f(x,y)dxdy+b\iint_D g(x,y)dxdy.$$
2. D でつねに $f(x,y)\leqq g(x,y)$ ならば
$$\iint_D f(x,y)dxdy\leqq\iint_D g(x,y)dxdy.$$
3. $|f(x,y)|$ も可積分で
$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right|\leqq\iint_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

4. （定理 *5.3* の一般化）D が区分的になめらかな境界のみを共有する *2* つの有界閉領域 D_1, D_2 に分割され, f が D_1 でも D_2 でも可積分ならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

問 1. 定理 *5.5* を確かめよ.

さて, 次の定理は基本的に重要である.

定理 5.6. 有限個の区分的になめらかな曲線で囲まれた有界閉領域 D 上の連続関数 $f(x,y)$ は可積分である.

証明. ∂D を D の境界とする.R を D を含む長方形とする.

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \text{ が } D \text{ の点のとき}), \\ 0 & ((x,y) \text{ が } D \text{ の点でないとき}) \end{cases}$$

は R 上有界で $R - \partial D$ で連続である. ゆえに定理 5.4 より $f^*(x,y)$ は R 上可積分である.
すなわち $f(x,y)$ は D 上可積分である. □

定理 5.7. 閉区間 $[a,b]$ 上の *2* つの連続関数 $g(x), h(x)$ が $[a,b]$ でつねに $g(x) \leqq h(x)$ をみたすとする.
このとき有界閉領域

$$D = \{(x,y) | g(x) \leqq y \leqq h(x), a \leqq x \leqq b\}$$

上の連続関数 $f(x,y)$ は可積分である.

証明. $g(x), h(x)$ は $[a,b]$ で連続ゆえ $[a,b]$ で一様連続である, すなわち:任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して $|x - x'| < \delta$ となる x, x' に対し $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$, $|h(x) - h(x')| < \varepsilon$ となる. 図 5 - 7 のような長方形 R をとり, R の分割 Δ で各小長方形 R_{ij} の横幅が δ より小さく, 縦幅が ε より小さいようにとれ

ば, (5.3) より

$$S(\Delta, f^*) - s(\Delta, f^*) = \sum{}' (M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ + \sum{}'' (M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \tag{5.1}$$

ここに $\sum'$ は $y = g(x), y = h(x)$ のグラフが交わる長方形 R_{ij} についての和で, $\sum''$ はグラフと交わらず D に含まれる長方形 R_{ij} についての和である.
$[x_{i-1}, x_i]$ 上の長方形 R_{ij} で, $y = g(x)$ のグラフと交わる可能性のあるものは, (5．11) より高々 2 個である．(図 5 - 8)．$y = h(x)$ のグラフについても同様で, 合わせて高々 4 個である．それゆえ

$$\sum{}' < 4(M - m)\varepsilon(b - a).$$

一方, $\sum''$ に属する小長方形 R_{ij} の和集合は D に含まれる有界閉領域なので (必要なら, さらに分割 Δ をさらに細かい分割 Δ' でおきかえることにより), 一様連続性より $M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$ とできるのだから

$$\sum{}'' < \varepsilon(b - a)(d - c)$$

$$\therefore \quad S(\Delta, f^*) - s(\Delta, f^*) < \varepsilon\{4(M - m) + d - c\}(b - a).$$

$\varepsilon > 0$ は任意ゆえ, $S(f^*) = s(f^*)$ となり, $f(x, y)$ は D 上可積分となる.

□

注意　変数 y の閉区間 $[c, d]$ 上の連続関数 $x = g(y), x = h(y)$ が (c, d) でつねに $g(y) < h(y)$ をみたすとき, 有界閉領域

$$D = \{(x, y) | g(y) \leqq x \leqq h(y), c \leqq y \leqq d\}$$

(図 5 - 9) 上の連続関数 $f(x, y)$ は可積分である．図 5 - 7 のような有界閉領域を**縦線閉領域** とよび, 図 5 - 9 のような有界閉領域を **横線閉領域** とよぶ.

定義　D を有界閉領域とする．定数関数 1 (これは D 上連続である) が D 上可積分のとき, D は**面積確定** であるといい

$$m(D) = \iint_D 1 dxdy = \iint_D dxdy$$

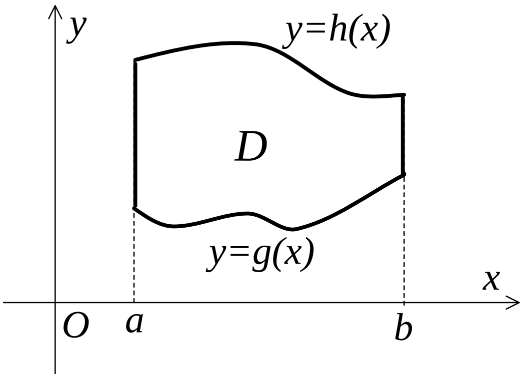

図 5.3　縦線閉領域

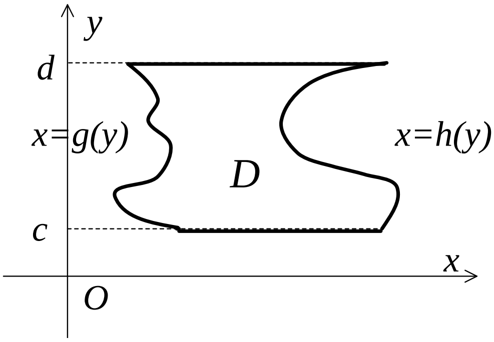

図 5.4　横線閉領域

を D の**面積** とよぶ. $m(D)$ は D の measure (**測度**) の意味である. 3 次元空間の立体 V の体積に対しても同じ $m(V)$ が用いられる. n 次元空間の場合 (超立体の超体積という) でも同様である.

例 5.5. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ を閉円板とすると, 定数関数 *1* のグラフは図 *5 - 10* のようになっている. この円柱の体積は *(*単位は異なるが*)* D の面積 *(*$=\pi a^2$*)* に等しい.

定理 5.8. 区分的になめらかな曲線で囲まれた有界閉領域や, 縦線閉領域, 横線閉領域は面積確定である.

定理 5.9. 有界閉領域 D が面積確定となるための必要十分条件は, D を含む長方形 R をとるとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し R の分割 Δ が存在して,

$$\Sigma'(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) < \varepsilon$$

となることである. ここに Σ' は D の点と D 以外の点を同時に含む小長方形 R_{ij} にわたる和である.

証明.

$$1^*(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \text{ は } D \text{ の点,} \\ 0 & (x, y) \text{ は } D \text{ の点では ない} \end{cases}$$

とすると, (5.3) より

$S(\Delta, 1^*) - s(\Delta, 1^*) = \Sigma'(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ となる. したがって (5.12) がみたされれば $s(1^*) = S(1^*)$ となり, D は面積確定である.
逆に, 関数 1^* が可積ならば

$$\mathbf{S}(\Delta', 1^*) - m(D) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \qquad m(D) - s(\Delta'', 1^*) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

となる分割 Δ', Δ'' が存在する. これらをあわせた分割を Δ とすれば (5.12) がみたされる. □

定理 5.10. 面積確定な有界閉領域 D 上の連続関数 $f(x, y)$ は可積分である.

証明. (定理 5.4 の証明に似ている) D を含む長方形 R の分割 Δ に関して ((5.3) と同じ記号を用いて)

$$\begin{aligned} S(\Delta, f^*) - s(\Delta, f^*) &= \Sigma'(M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &\quad + \Sigma''(M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \end{aligned}$$

と書ける. ここに Σ' は D の点と D 以外の点を同時に含む小長方形 R_{ij} についての和で, Σ'' は完全に D に含まれる小長方形 R_{ij} についての和である. 定理 5.9 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して Δ を十分細かくとると

$$\Sigma'(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) < \varepsilon$$

とできる. 一方, Σ'' に属する小長方形 R_{ij} の和集合は, D に含まれる有界閉領域なので, (必要なら分割 Δ をさらに細かい分割 Δ' でおきかえることにより) 一様連続性によって

$M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$ とできる. これらを合わせると

$$S(\Delta, \varepsilon) - s(\Delta, f^*) < \varepsilon\{(M - m) + (b - a)(d - c)\}$$

となり, f^* が可積分となるので $f(x, y)$ は D 上可積分である. □

定理 5.11 (2 重積分の平均値の定理)**.** $f(x, y)$ は面積確定の有界閉領域 D 上で連続な関数とする. このとき,

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = f(x_0, y_0)m(D)$$

をみたす D の点 (x_0, y_0) が存在する.

証明. $f(x,y)$ の D 上での最大値を M, 最小値を m とすると, D の各点 (x,y) で

$$m \leqq f(x,y) \leqq M$$

ゆえ, 定理 5.5 の (i), (ii) より

$$m \cdot m(D) \leqq \iint_D f(x,y)dxdy \leqq M \cdot m(D).$$

それゆえ, 中間値の定理 (定理 4.3) より

$$\frac{\iint_D f(x,y)dxdy}{m(D)} = f(x_0, y_0)$$

をみたす D の点 (x_0, y_0) が存在する. □

有界な集合 A の**直径** $d(A)$ とは, 数の集合

$$\{d(P,Q)|P,Q \text{ は } A \text{ の任意の点 }\}$$

の上限のことである.(円板では直径, 長方形では対角線の長さである.)

定理 5.12. *D を面積確定の有界閉領域, $f(x,y)$ をその上の連続関数とする.*

D を区分的になめらかな境界のみを共有する面積確定な有界閉領域 $D_1, \cdots, D_n$ に分割し, 各 D_i から点 P_i を選ぶ.$d(D_i)$ の最大値を d とするとき

$$\lim_{d\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)m(D_i) = \iint_D f(x,y)dxdy. \tag{5.2}$$

証明. 定理 5.11 より, 各 D_i の点 Q_i が存在して

$$\iint_{D_i} f(x,y)dxdy = f(Q_i)m(D_i)$$

が成り立つ. したがって定理 5.5 の項目 4（203 ページ）より

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)m(D_i).$$

$f(x, y)$ は D で一様連続ゆえ, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して,
$d(P, P') < \delta$ となる D の任意の 2 点 P, P' に対し

$$|f(P) - f(P')| < \frac{\varepsilon}{m(D)}$$

が成り立つ. したがって $d < \delta$ のとき

$$\left|\iint_D f(x, y)dxdy - \sum_{i=1}^{n} f(P_i)m(D_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(P_i) - f(Q_i)m(D_i)\right|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n} |f(P_i) - f(Q_i)|m(D_i) < \frac{\varepsilon}{m(D)} \sum_{i=1}^{n} m(D_i) = \varepsilon.$$

これは式（5.2）を示している. □

注意　2 重積分の定義では, 長方形や分割がつねに座標軸に平行になっていた.(5.13) は, 例えば区分的になめらかな曲線族による分割を用いても, それによって生ずる小閉領域の直径が $\to 0$ のとき, 同じ積分値が得られることを示している.

以上に述べた 2 重積分に関するいろいろな定義 (可積分性, 面積確定, 面積), 定理などは, 3 重積分, 一般に n 重積分 (これらを総称して**重積分**とよぶ) についても同様に成り立つ.

空間 R^3 内の立体である有界閉領域 V 上 可積分な関数 $f(x, y, z)$ の 3 重積分を

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

で表す. とくに**体積確定**のときは, V の**体積**は

$$m(V) = \iiint_V dxdydz$$

で表せる.

5.2　累次積分

重積分の値を実際に計算するとき，大切な方法がある. それは累次積分と呼ばれているもので，３章の意味の積分，すなわち１変数積分の繰り返しの計算でその値を求めるものである. 重積分といえども１変数積分に帰着できるのである.

初めに 2 重積分の場合を論じ, 後で 3 重積分の場合を取り扱う.

D を平面上の縦線閉領域とする. すなわち D は, 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $g(x), h(x)$ で, 閉区間 $[a, b]$ でつねに $g(x) \leqq h(x)$ となるものを用いて

$$D = \{(x, y) | g(x) \leqq y \leqq h(x), \quad a \leqq x \leqq b\} \tag{5.3}$$

と表されているとする.$f(x, y)$ を D 上の連続関数とする.　x を固定すると $f(x, y)$ は y 軸上の閉区間 $[g(x), h(x)]$ 上の, 変数 y のみの連続関数と見做せる. 積分

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy$$

を x の関数と考えるとこれは x の連続関数である.

定理 5.13 (累次積分の公式)**.** *$f(x, y)$ を式 (5.3) で定義された D 上の連続関数とするとき*

$$G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy \tag{5.4}$$

は x の連続関数であって, 次の等式が成り立つ:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy \right) dx \tag{5.5}$$

*(この式の右辺を 累次積分と呼ぶ[*7].)*

[*7] $\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy$ と書く事もある.

証明.

$$
\begin{aligned}
G(x+\Delta x) - G(x) &= \int_{g(x+\Delta x)}^{h(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)dy - \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \\
&= \int_{g(x)}^{h(x)} \{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\}\, dy \\
&\quad + \int_{h(x)}^{h(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)dy \\
&\quad - \int_{g(x)}^{g(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)dy
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

と書ける. 第 1 項は $f(x,y)$ の一様連続性により, 第 2 項は $f(x,y)$ の有界性と $h(x)$ の連続性により, 第 3 項は $f(x,y)$ の有界性と $g(x)$ の連続性により, いずれも $\Delta x \to 0$ のとき $\to 0$ である. したがって $G(x)$ は連続関数である.

次に式 (5.5) を示そう.R を図 5-7 のような長方形とする. 定理 5.7 の証明と同じ記号を用いる.

$$
R_{ij} = \{(x,y) | x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\}
$$

とおく.$x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$ のとき

$$
m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(x,y)dy \leqq M_{ij}(y_j - y_{j-1})
$$

である. ここに m_{ij}, M_{ij} は R_{ij} における $f^*(x,y)$ の値の集合の下限と上限である. ゆえに

$$
m_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) \leqq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(x,y)dy)dx = \clubsuit
$$

$$
\clubsuit \leqq M_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}).
$$

これを i, j について加え合わせると

$$
s(\Delta, f^*) \leqq \int_a^b (\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy)dx \leqq S(\Delta, f^*)
$$

が得られる. これより式 (5.5) が得られる. □

注意　(i)　$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$
である.y の関数 $f^*(x,y)$ は $[c,d]$ 上で有界で 2 点 $g(x), h(x)$ で不連続だが, 可積分で積分値は右辺に等しい (§3.2 参照).

(iii)　横線閉領域についても同様の定理が成り立つ.

累次積分を用いると 2 重積分が実際に計算される.

例 5.6.　$D = \{(x,y)|0 \leqq y \leqq 1-x, 0 \leqq x \leqq 1\}$ は縦線閉領域である.
D 上の *2* 重積分

$$I = \iint_D (x^2+3y^2)dxdy$$

は, 累次積分を用いると次のように計算される.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2+3y^2)dy \\
&= \int_0^1 \left[x^2y+y^3\right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \{x^2(1-x)+(1-x)^3\}dx \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

なお, この D は横線閉領域でもあるので

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x^2+3y^2)dx$$

としても計算される.

問 2. 上の例で D を横線閉領域と見て計算してみよう.

$$\left[\frac{1}{3}x^3+3xy^2\right]_0^{1-y} = \frac{1}{3}(1-y)^3+3y^2-3y^3$$

$$\left[\frac{-1}{12}(1-y)^4+y^3-\frac{3}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

例 5.7. 半径 r の球の体積を求めよう.

$D = \{(x,y) | -\sqrt{r^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-x^2}\}$ は縦線閉領域である. D 上の 2 重積分

$$I = \iint_D \sqrt{r^2-x^2-y^2}dxdy$$

は球の体積の $\frac{1}{2}$ である.

証明. 定理 5.13 より

$$I = \int_{-r}^{r} \left\{ \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}dy \right\} dx.$$

中の括弧 $\{\cdots\}$ にある積分を求めねばならない. まず

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right\}$$

を確認しておこう. 不定積分の公式表 3.1(94 ページ) 参照.

$$\begin{aligned}\{\cdots\} =& \frac{1}{2}\left[(r^2-x^2)\arcsin\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}} + y\sqrt{r^2-x^2-y^2}\right]_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \\ =& \frac{\pi}{2}(r^2-x^2)\end{aligned}$$

$$\therefore I = \int_{-r}^{r} \frac{\pi}{2}(r^2-x^2)dx = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

□

例 5.8. 2 重積分

$$I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy \quad \left(D : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1\right) \quad a, b \text{ は正定数}$$

を求めよう.

証明. 累次積分の公式から

$$I = \int_{-a}^{a} \{\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} (x^2+y^2)dy\}dx$$

となる. したがって

$$I = \int_{-a}^{a} \{2bx^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \frac{2}{3}(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^3\}dx$$
$$= \frac{4b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx + \frac{4b^3}{3a^3}\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

となって結局 1 変数定積分の計算になる.

例 3.23(105 ページ) の結果を使おう.

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^4\pi}{16},$$

$$\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{3a^4\pi}{16}.$$

$\therefore I = \frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$ □

例 5.9. 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $h(x)$ で, (a,b) でつねに正の値をとるも の に対し
$D = \{(x,y)|0 \leqq y \leqq h(x), a \leqq x \leqq b\}$ は縦線閉領域である.

したがって

$$m(D) = \iint_D dxdy$$
$$= \int_a^b dx \int_0^{h(x)} dy$$
$$= \int_a^b h(x)dx$$

となる. 左辺は D の面積を表わす. 右辺の積分値を §*3.2* で D の面積とよんだが, 両方の定義が一致している.

以下のような例もあるから注意が必要である.

例 5.10. 関数 $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ は原点 $(0,0)$ で連続でない。

$\int f(x,y)dy = -\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{2x}{(x+y)^3}$ 等で計算すれば

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$

となる．積分変数の順序の変更は出来ない場合もあることを表している．

今の場合，重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ の意味は広義積分で考えねばならない．

累次積分の公式の定理は 3 重積分, 一般に n 重積分で成り立つ．

例 5.11.

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(2+x+y+z)^3} \quad (V = \{(x,y,z)|x,y,z \geqq 0, x+y+z \leqq 1\})$$

証明．求める積分値を I とする．

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(2+x+y+z)^3} dz \right\} dy \right] dx,$$
$$\{\cdots\} = -\frac{1}{2}(\frac{1}{9} - (2+x+y)^{-2}),$$
$$\int_0^{1-x} (\frac{1}{9} - (2+x+y)^{-2}) dy = \frac{4}{9} - \frac{x}{9} - \frac{1}{2+x},$$
$$\therefore \quad I = \frac{1}{36} - \frac{1}{2}\log\frac{2}{3}.$$

□

例 5.12. $V = \{(x,y,z)|0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq a\}$ *(4 面体)*　とする．V の yz-平面への正射影は三角形 $D = \{(y,z)|0 \leqq y \leqq z \leqq a\}$ である．ゆえに

$$\begin{aligned} m(V) &= \textstyle\iiint_V dxdydz = \iint_D dydz \int_0^y dx = \iint_D dydz \\ &= \textstyle\int_0^a dz \int_0^z dy = \int_0^a \frac{a^2}{2} dz = \frac{a^3}{6}. \end{aligned}$$

また, 同じ V 上で *(*同様の反復積分の計算で*)*

$$\iiint_V x^2y^2z^2 dxdydz = \frac{a^9}{162}$$

例 5.13. $V = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqq a^2\}$ *(*球*)* に対し, これを x=一定の平面で切った切り口は, 円板 $D(x) = \{(y,z)|y^2+z^2 \leqq a^2 - x^2\}$ である. の定理は, 次の形にも使える*:*

$m(V) = \iiint_V dxdydz = \int_{-a}^{a} dx \iint_{D(x)} dydz = \int_{-a}^{a} \pi(a^2-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi a^3.$

例 5.14. （ 回転体の体積） $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で, (a,b) でつねに正の値をとるとする.$y = f(x)$ のグラフを x-軸の回りに回転させると 回転体 V が生ずる. これを x=一定の平面で切った切り口は円板

$$D(x) = \{(y,z)|y^2+z^2 \leqq f(x)^2\}$$

である.

次も成り立つ*:*

$$m(V) = \iiint_V dxdydz = \int_a^b dx \iint_{D(x)} dydz = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

すなわち

$$m(V) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

この公式はすでに高校で学んだものである.

次の定理も一応載せておこう.

定理 5.14. [*8]　3 次元空間に体積確定の有界閉領域 V があり, V の存在する z-座標の変域は $c \leqq z \leqq d$ とする.V を平面 $z = t$ で切った切り口が平面上面積確定の有界閉領域で, その面積を $S(t)$ とすれば

$$m(V) = \iiint_V dxdydz = \int_c^d S(t)dt.$$

♣◇5.2 節の演習問題 ♣◇

1. 次の 2 重積分の値を求めよ.

[*8] Cavalieri の定理と言われるときもある.

(1)

$$\iint_D (x^3+y^2)dxdy \quad (D=\{(x,y)|0 \leqq x, y \leqq 1\})$$

(2)

$$\iint_D (\sqrt{|x|}-y^2)dxdy \quad (D=\{(x,y)|-1 \leqq x \leqq 1, 1 \leqq y \leqq 2\})$$

(3)

$$\iint_D xydxdy \quad (D=\{(x,y)|x \geqq 0, y \geqq 0, x^2+y^2 \leqq a^2\})$$

(4)

$$\iint_D \sqrt{x}dxdy \quad (D=\{(x,y)|x^2+y^2 \leqq x\})$$

(5)

$$\iint_D (x+2y)dxdy \quad (D=\{(x,y)||x|+|y| \leqq 1\})$$

(6)

$$\iint_D \frac{x^2}{y}dxdy \quad (D \text{ は } y=x^2, y=1, x=2 \text{ の囲む部分})$$

(7)

$$\iint_D \sin\frac{\pi y}{\sqrt{x}}dxdy \quad (D=\{(x,y)|y^2 \leqq x, 1 \leqq x \leqq 2\})$$

(8)

$$\iint_D \frac{x}{y}dxdy \quad (D=\{(x,y)|x+1 \leqq y \leqq x+2, 0 \leqq x \leqq 1\})$$

2. 次の 3 重積分の値を求めよ.

(1) $\iiint_V (x^2+y^2-z^2)^2 dxdydz \quad (V: 0 \leqq x, y, z \leqq 1)$

(2) $\iiint_V x^2 dxdydz \quad (V: x^2+y^2+z^2 \leqq a^2)$

(3) $\iiint_V dxdydz \quad (V:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqq 1)$

(4) $\iiint_V xdxdydz \quad (V: 0 \leqq x \leqq 1,\ y^2+z^2 \leqq 1)$

(5) $\iiint_V \sin(x+y+z)dxdydz \quad (V: 0 \leqq x,\ y,\ z \leqq \pi)$

3. $R : a < x < b,\ c < y < d$ を長方形, $f(x, y)$ を R 上の C^2 -関数とするとき, 次を示せ:

$$\iint_R \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy = f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c).$$

4.

$$\text{領域 } D : 0 \leqq x \leqq 1, x^2 \leqq y \leqq 1$$

とします. このとき

$$I = \iint_D xe^{y^2} dxdy$$

を求める.

$$I = \int_{x^2}^{1} \left(\int_0^1 xe^{y^2} dx \right) dy \qquad (A)$$

$$= \int_0^{\sqrt{y}} \left(\int_0^1 xe^{y^2} dy \right) dx \qquad (B)$$

という具合に 2 つあるが

式（A）ではこれ以上計算が進まないが，式（B）では計算が求まる.

ちょっと不思議な例でした.

5. 平面 $z = 0$ 上に面積確定の有界閉領域 D があり, その面積を S とする. 点 $Q(a, b, h)(h > 0)$ をとり, P を D の点として動かすとき, 線分 QP 上の点全体の集合を, D を底面, Q を頂点とする**錐体**とよぶ. この錐体の体積は $\frac{Sh}{3}$ であることを示せ.

5.3　積分変数の変換（重積分における置換積分）

従来の 1 変数積分での置換積分は，重積分の理論ではどのような話になるのであろうか.

まず 2 次元の場合からはじめよう. 積分区域である平面上の有界閉領域は区分的に滑らかな曲線で囲まれたものに限ることにする．例えば不等式の表す領

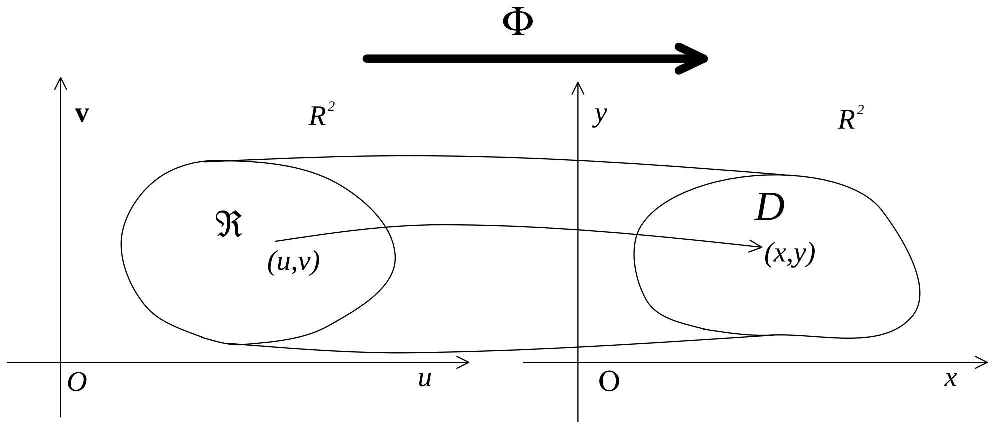

図 5.5　変数変換，写像

域. 以下で出てくる計算例は皆，直線で囲まれた領域，円の内部あるいはこれらを組み合わせたものである.

$\mathfrak{R}$ *9 を 2 次元座標平面 R^2 の有界閉領域とする.

また別に 2 次元座標平面 R^2 があって

$$\Phi : \mathfrak{R} \longrightarrow R^2, \Phi(u,v) = (x,y)$$

を C^1- 写像とする.　$D = \Phi(\mathfrak{R})$ になっているとしよう. 図 5.5 参照.

写像 Φ のヤコビアン J_Φ とは, 成分が $\mathfrak{R}$ 上の連続関数である行列式

$$J_\Phi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u},$$

のことであった (4.3 節 159 ページ). この J_Φ が以下で意味をもってくる.

定理 5.15 (2 重積分における変数変換)**.** $\Phi : \mathfrak{R} \longrightarrow D$ が *1* 対 *1* 写像で，J_Φ

---

*9 文字 $\mathfrak{R}$ はドイツ語文字.”エル”と読む.

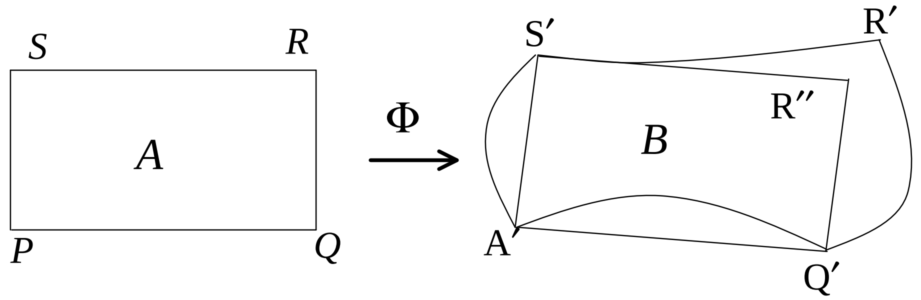

図 5.6　面積要素

が $\mathfrak{R}$ 上で 0 にならないとする. $f(x,y)$ を D 上の連続関数とするとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\mathfrak{R}} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| dudv$$

ここで右辺の縦棒は絶対値を表す.$x = x(u,v)$ という具合に関数記号を変数記号と同じにした.

証明. §5.5 で別証明をあたえる.

W の内部に小さい長方形 $PQRS$ を考える. その内部及び境界を含んだ閉領域を A とする. $B = \Phi(A)$ とおく. $\Phi(P) = P'$ などとおくと, B は線分 $P'Q'$ と $P'S'$ から作られる平行四辺形 $P'Q'R''S'$ に近似している.(R'' は R' に非常に近い.)

$P(a,b)$, $Q(a+s,b)$, $R(a+s,b+t)$, $S(a,b+t)$

とおくと

$P'(x(a,b),y(a,b))$, $Q'(x(a+s,b),y(a+s,b))$, $R'(x(a+s,b+t),y(a+s,b+t))$, $S'(x(a,b+t),y(a,b+t))$

である. 図 5.6 参照.

平均値の定理 (定理 2.11,61 ページ) より

$$\begin{aligned}
x(a+s,b)-x(a,b) &= s\frac{\partial x}{\partial u}(a+\theta s,b),\\
y(a+s,b)-y(a,b) &= s\frac{\partial y}{\partial u}(a+\theta' s,b),\\
x(a,b+t)-x(a,b) &= t\frac{\partial x}{\partial v}(a,b+\tau t),\\
y(a,b+t)-y(a,b) &= t\frac{\partial y}{\partial v}(a,b+\tau' t),\\
&\qquad (0<\theta,\theta',\tau,\tau'<1)
\end{aligned}$$

の形となる. さて,

$$m(B)=\iint_B dxdy \fallingdotseq \iint_{\Box P'Q'R''S'} dxdy$$

($\fallingdotseq$ はほぼ等しいを表す.) しかるに, 平行四辺形 $P'Q'R''S'$ の面積は次の行列式の絶対値に等しい:

$$\begin{vmatrix} x(a+s,b)-x(a,b) & x(a,b+t)-x(a,b) \\ y(a+s,b)-y(a,b) & y(a,b+t)-y(a,b) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s\frac{\partial x}{\partial u}(a+\theta s,b) & t\frac{\partial x}{\partial v}(a,b+\tau t) \\ s\frac{\partial y}{\partial u}(a+\theta' s,b) & t\frac{\partial y}{\partial v}(a,b+\tau' t) \end{vmatrix}$$

$$= st\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a+\theta s,b) & \frac{\partial x}{\partial v}(a,b+\tau t) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a+\theta' s,b) & \frac{\partial y}{\partial v}(a,b+\tau' t) \end{vmatrix}$$

すなわち, B の面積 $m(B)$ は A の面積 (これは st である.) のほぼ $|J_\Phi|$ 倍に等しい.

さて, D を含む長方形 R をとり, R の十分細かい分割 Δ を考える. Δ を Φ で写すと, これは $\Phi(W\cap R)$ の曲線族による分割 $\Phi(\Delta)$ をあたえる.

Δ より生ずる (W に含まれる) 小長方形 Ω_{ij} の Φ による像を Ω'_{ij} とす

る.P_{ij} を $\mathfrak{Q}_{ij}$ の点とし, $Q_{ij} = \Phi(P_{ij})$ とおくと

$$\sum_{i,j} f^*(\Phi(P_{ij}))|J_\Phi(P_{ij})|(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) = \sum_{i,j} f^*(Q_{ij})m(\mathfrak{Q}'_{ij}).$$

ここに和 $\sum_{i,j}$ は W に含まれる小長方形 $\mathfrak{Q}_{ij}$ にわたる.
ここで $d(\mathfrak{Q}_{ij})$ ($\mathfrak{Q}_{ij}$ の直径) の最大値を $\longrightarrow 0$ とすると $d(\mathfrak{Q}'_{ij})$ の最大値も $\longrightarrow 0$ となり, (5.17) の両辺はそれぞれ

$$\iint_D f(\Phi(u,v))|J_\Phi(u,v)|dudv, \quad \iint_E f(x,y)dxdy$$

に近づく (定理 5.12,207 ページ). 極限では, $\fallingdotseq$ は $=$ になる. □

注意 (i) 上の定理からわかるように, $J_\Phi > 0$ のときは, Φ は D を向きを保ったまま E に写すが, $J_\Phi < 0$ のときは裏返しに写す.

(ii) 写像 $\Phi : D \to E$ は見方を変えると, 座標系 (x,y) から新しい座標系 (u,v) への**座標変換** とも考えられる.

(iii) 定理は面積確定の有界閉領域 D, E で成り立つが, 証明は複雑になる.

(iv) 証明を精密化することにより, D に属する区分的になめらかな曲線上で J_Φが 0 になるか, そこで Φ の 1 対 1 がくずれていても定理が成り立つことが示される.

(v) 同様の定理が 3 重積分, 一般に n 重積分についても成り立つ.(iv) の注意についても同様である.

例 5.15. *(* **線形変換** *)* $\Phi : (u,v) \mapsto (x,y) = (au+bv, cu+dv)(ad-bc \neq 0)$ の場合は

$$\iint_E f(x,y)dxdy = |ad-bc| \iint_D f(au+bv, cu+dv)dudv.$$

特に $f = 1$ *(*定数関数*)* として

$$m(E) = |ad-bc|m(D).$$

$ad - bc < 0$ のときは, 線形変換 Φ は平面を裏返しにする.

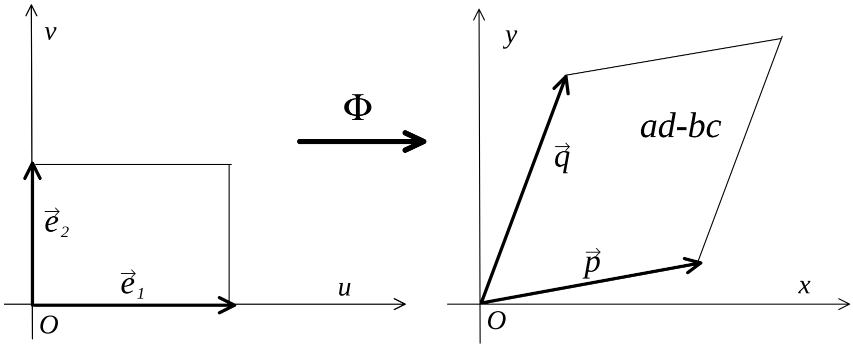

図 5.7　１次写像の面積倍率

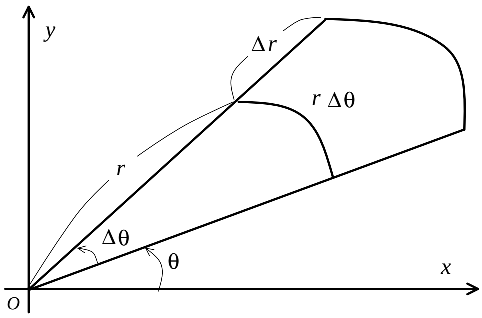

図 5.8　極座標への面積要素の変換

図 *5.7* に見られるように

$$\vec{p} = \Phi(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \quad \vec{q} = \Phi(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

のなす平行４辺形の面積は $|ad - bc|$ である. ここで

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である.

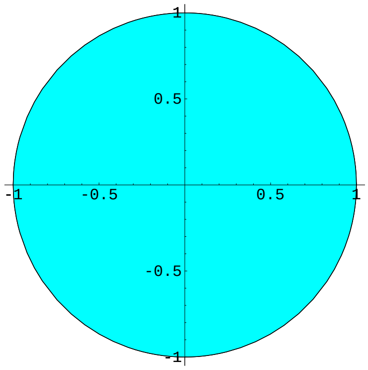

図 5.9　円

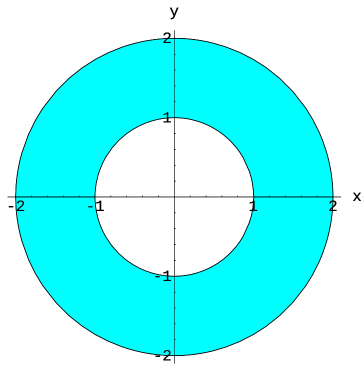

図 5.10　円環

例 5.16. *(**極座標変換**)* $\Phi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ の場合は $J_\Phi = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$ ゆえ,

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

特に

$$m(E) = \iint_E dxdy = \iint_D rdrd\theta.$$

例えば, $E = \{(x,y)|R' \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq R\}$ を**円環**とすると, D は (r,θ) 平面の長方形である.

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

とすると *(D の境界で 1 対 1 がくずれるが, 上の注意の (iv) より)*

$$\iint_E \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \iint_D \frac{rdrd\theta}{r^{2\alpha}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R'}^{R} r^{1-2\alpha}dr = \frac{\pi(R^{2-2\alpha} - R'^{2-2\alpha})}{1-\alpha}.$$

例 5.17. 極座標変換 $\Phi :\mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ によって, D は扇形 E に, $r = 0$ と原点 $(x,y) = (0,0)$ を除いて *1* 対 *1* に写される. それゆえ

$$m(E) = \iint_E dxdy = \iint_D rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^r r(\theta)dr = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2 d\theta.$$

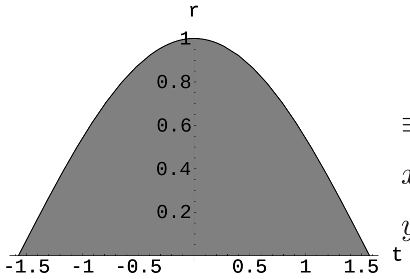

図 5.11　$\Delta : r \leqq \cos\theta$

$\Rrightarrow$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

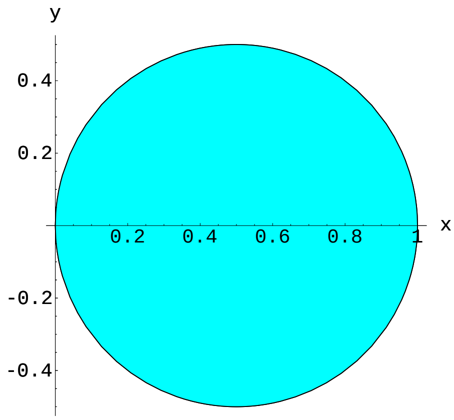

図 5.12　$D : x^2 + y^2 \leqq x$

例 5.18. 極座標変換で

$$I = \iint_D \sqrt{x}dxdy$$

を求める. 図 *5.11* および *5.12* 参照.

証明. 例 5.16 より

$$\begin{aligned} I = &\quad \textstyle\iint_\Delta \sqrt{r\cos\theta} r dr d\theta, \quad \Delta : 0 < r \leqq \cos\theta \\ = &\quad \textstyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\left(\int_0^{\cos\theta} r^{\frac{3}{2}} dr\right) d\theta \\ = &\quad \tfrac{8}{15}. \end{aligned}$$

□

例 5.19. *(***3 次元極座標変換***)*

$\Phi : (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$

$$(0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

の場合は,

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 sin\theta$$

ゆえ, $\Phi : Y \to V$ として

$$\iiint_V f(x,y,z)\ dxdydz$$
$$= \iiint_V f(r\sin\theta\cos\phi,\ \ r\sin\theta\sin\phi,\ \ r\cos\theta)r^2\sin\theta\ \ drd\theta d\phi.$$

特に

$$m(V) = \iiint_Y r^2\sin\theta\ \ drd\theta d\phi.$$

例えば, 球 $V = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \leqq a^2\}$ の場合は

$$m(V) = \iiint_V\ \ dxdydz = \iiint_Y r^2\sin\theta\ \ drd\theta d\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^a r^2 dr$$
$$= 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

例 5.20. 柱面 $x^2+y^2 = ay$（$a>0$）と曲面 $x^2+y^2 = bz$（$b>0$）および平面 $z=0$ で囲まれる立体 V の体積を求めてみよう.

平面 $z=0$ 上で円板 $E : x^2+y^2 \leqq ay$ を考えると, V の体積は

$$m(V) = \iint_E \frac{x^2+y^2}{b}dxdy$$

となる.

$$D = \{\ (r,\theta)|0 \leqq r \leqq a\sin\theta, 0 \leqq \theta \leqq \pi\ \}$$

とおくと，　極座標変換 $\Phi : (r, \theta) \longmapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で

$$\Phi : D \longmapsto E$$

ゆえ

$$m(V) = \iint_E \frac{x^2+y^2}{b} dxdy = \iint_D \frac{r^3}{b} drd\theta$$

$$= \frac{1}{b}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a\sin\theta} r^3 dr = \frac{3\pi a^4}{32b}$$

例 5.13 (円柱座標)

$$\Phi \ : \ (\rho,\, \varphi,\, z) \ \longmapsto \ (x,\, y,\, z) \ = \ (\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi,\, z) \qquad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

における座標 $(\rho,\, \varphi,\, z)$ を**円柱座標**とよぶ (図 5-19).

そのヤコビアンは

$$J_\Phi = \frac{\partial(x,\, y,\, z)}{\partial(\rho,\, \varphi,\, z)} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

である．それゆえ $\Phi : Y \longmapsto V$ として

$$\iiint_V f(x, y, z) \ dxdydz = \iiint_Y f(\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi,\, z)\rho \ d\rho d\varphi dz.$$

特に

$$m(V) = \iiint_Y \rho \ d\rho d\varphi dz.$$

これを用いて，3 個の円柱の共通部分

$$V = \{\,(x, y, z)\,|\,x^2 + y^2 \leqq 1,\ \ y^2 + z^2 \leqq 1,\ \ z^2 + x^2 \leqq 1\} \tag{5.7}$$

の体積を求めよう．参照 図 5.13.

$$Y = \{\,(\rho,\ \varphi,\ z)\,|\,0 \leqq \rho \leqq 1,\ \ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ \ \rho^2\cos^2\varphi + z^2 \leqq 1,\ \ \rho^2\sin^2\varphi + z^2 \leqq 1\,\}$$

とおけば，円柱座標による座標変換 Φ は Y を V に写す．$\rho = 0,\ \varphi = 0,\ 2\pi$ のところを除き，Φ は 1 対 1 写像で，J_Φ は 0 でない．それゆえ，いま

$$f(\rho, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{1 - \rho^2\cos^2\varphi} & (0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}), \\ \sqrt{1 - \rho^2\sin^2\varphi} & (\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

おけば

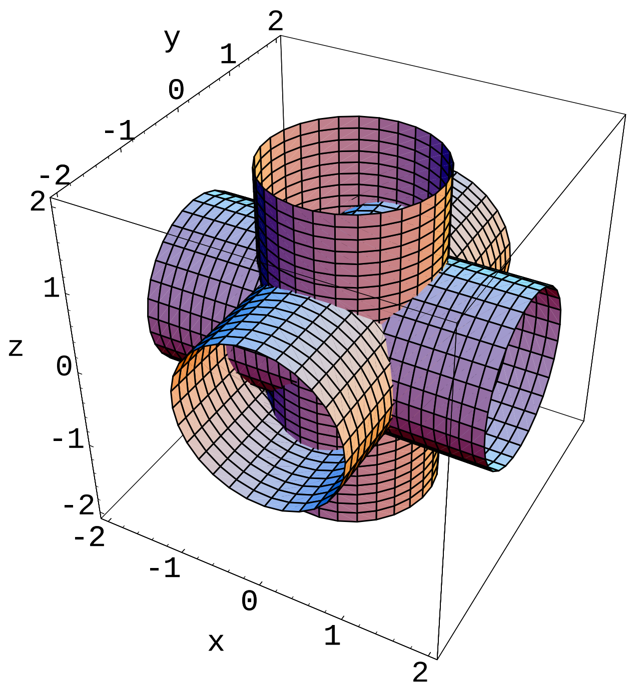

図 5.13　不等式 (5.7) の図

$$
\begin{aligned}
m(V) &= \iiint_V dxdydz = \iiint_Y d\rho d\varphi dz = 8\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{f(\rho,\varphi)} \rho dz \\
&= 8\int_0^1 d\rho \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho\sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi} \right. \\
&\qquad \left. + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho\sqrt{1-\rho^2\sin^2\varphi} d\varphi \right\} \qquad (5.8) \\
&= 8(2-\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

という計算になる.

問 3. 式（*5.8*）の積分計算を行え.

♣♢5.3 節の演習問題 ♣♢

1. 次の値を求めよ.

(1)

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy \qquad (D=\{(x,y)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1\}, a>0, b>0)$$

(ヒント：$\Phi : (r,\theta)| \to (x,y) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$ を考えよ.)

例 5.8 とは別に計算せよ.

(2)

$$\iint_D (a^2x^2+b^2y^2)dxdy \qquad (D=\{(x,y)|x^2+y^2 \leqq 1, a>0, b>0\})$$

(3)

$$\iiint_V x^4 dxdydz \qquad (V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqq a^2\})$$

(4)

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \qquad (V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqq a^2\})$$

2. E が図 5-17 の円環のとき, 次の値を求めよ.

(1) $\iint_E \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy$　　(2) $\iint_E \log(x^2+y^2)dxdy$

3. 球 $x^2+y^2+z^2 \leqq a^2$ と円柱 $x^2+y^2 \leqq ax$ の共通部分の体積を求めよ.

4. 2 つの円柱の共通部分 $V=\{(x,y,z)|x^2+y^2 \leqq 1, y^2+z^2 \leqq 1\}$ の体積を求めよ.

5. 3 次元極座標 (r,θ,ϕ) を用いて表した球面 $r=a(a>0)$ と 円錐面 $\theta=a, r>0$ で囲まれた部分の体積を求めよ.

6. 次の立体の体積を求めよ.

(1)
$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}} \leqq a^{\frac{2}{3}} \qquad (a>0)$$

(2)
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4} \leqq 1 \qquad (a,b,c>0)$$

7. 半径 a の n 次元球

$$V_n(a)=\{(x_1,...,x_n)|{x_1}^2+\cdots+{x_n}^2 \leqq a^2\}$$

とその超体積 $m(V_n(a))$ について次の (1) から (4) を示せ.

(1)
$$m(V_n(a))=a^n m(V_n(1))$$

(2) $V_n(1)$ を超平面 $x_n=$ 一定 で切った切り口は

$$V_{n-1}(\sqrt{1-{x_n}^2})=\{(x_1,\cdots,x_{n-1})|{x_1}^2+\cdots+{x_{n-1}}^2 \leqq 1-{x_n}^2\}$$

(3)
$$m(V_n(1))=2m(V_{n-1}(1))\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t dt$$

(4)
$$m(V_n(1))=\frac{2\pi}{n}m(V_{n-2}(1))$$

以上を用いて $m(V_n(a))$ を求めよ.

8.

$$D = \{x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0, x_4 \geqq 0, x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4} \leqq a\}$$

とするとき，４重積分

$$\iiiint_D dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

を求めよ.

5.4　広義積分（重積分の場合）

重積分の場合における広義積分を考えるのであるが１変数の場合と同じように次の２つの場合が考えられる.

- 積分区域が有界でないとき.
- 被積分関数がその積分区域での関数値が有界でないとき.

いろいろ言う前に，まずは「常識的」な計算例を二つ.

例 5.21.

$$\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

を求める. ここで R^2 は２次元全平面である.

証明. この例の場合，積分区域 R^2 は有界でない.

$$I(s) = \iint_{x^2+y^2 \leqq s^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

とおく. 極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ に変換すると

$$I(s) = \iint_{r \leqq s, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta$$

となる．この右辺は計算が進んで

$$\begin{aligned} I(s) =& \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^s e^{-r^2} r dr \\ =& \pi(1 - e^{-s^2}). \end{aligned}$$

したがって

$$\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{s \to \infty} I(s) = \pi.$$

とするのが良いだろう．　□

例 5.22.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x-y}} dxdy, \quad (D : 0 \leqq y \leqq -x+1, 0 \leqq x \leqq 1)$$

証明．この例の場合は積分区域 D の境界 $x + y - 1 = 0$ で関数値が無限大となっている．

ε を $0 < \varepsilon < 1$ である任意の正数とする．

$$D_\varepsilon : 0 \leqq y \leqq -x+1-\varepsilon, 0 \leqq x \leqq 1-\varepsilon$$

として積分 $\iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x-y}} dxdy$ の値を計算し，$\varepsilon \to 0$ とするのが良いだろう．

そこで早速，実行してみます．

$$\begin{aligned} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x-y}} dxdy &= \int_0^{1-\varepsilon} \left\{ \int_0^{-x+1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x-y}} dy \right\} dx \\ &= -2 \int_0^{1-\varepsilon} \left\{ \varepsilon^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}} \right\} dx \\ &= \frac{2}{3} \varepsilon^{\frac{2}{3}} - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

ここで $\varepsilon \to 0$ として

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x-y}} dxdy = \frac{4}{3}.$$

とするのが普通だろう．　□

以上，上記の例を見ながら一般論に入ろう.

D を平面上の領域とし，$f(x,y)$ を D 上の連続関数とする.D に D の境界を付け加えた集合 $\overline{D}$ で $f(x,y)$ が有界でないとする. すなわち点 (x,y) が D の境界に近づくとき，$f(x,y)$ が限りなく大きくなったり振動したりする場合でも D 上の 2 重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

を考えたい. 領域 D が有界でない場合も考えに入れておきたい.

例 5.21，例 5.22 における計算で連続パラメーター s, ε を説明の都合上，離散パラメーター，すなわち以下でいう番号 n で考えたい.
そこで D の部分領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ が在って次の条件を満たすとする.

1. D_n は D_{n+1} にふくまれる.　$D_n \subset D_{n+1}$.
2. すべての D_n の和集合は D に等しい.　$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.
3. 各 D_n の境界は有限個の区分的になめらかな閉曲線より成り, D_n にその境界を付け加えた有界閉領域 $\overline{D}_n$ は D に含まれる.

このような D_n の列を D **に収束する増大列**とよぶ. もし,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy \tag{5.9}$$

が存在し, しかもこの値が D に収束する増大列 D のとり方によらないならば, 広義積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

は 収束するといい, その 値は式（5.9）の極限値とする:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

. 積分領域 D に収束する増大列のとり方は当然のこといろいろあり得る.

ところが D 上つねに $f(x,y) \geqq 0$ のときは, 次の定理が成り立つ.

定理 5.16. 領域 D 上 $f(x,y)$ が連続で $f(x,y) \geqq 0$ とする.

いま, D に収束する増大列 D_n に対し

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

が存在するならば, 広義積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

は収束して, その値はこの極限値に等しい.

証明. $I_n = \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$, $I = \lim_{n\to\infty} I_n$ とおく.

$$0 \leqq I_1 \leqq I_2 \leqq \cdots \leqq I_n \leqq \cdots \leqq I$$

に注意する.

さて D に収束する他の増大列 U_n をとり

$$J_n = \iint_{U_n} f(x,y)dxdy$$

とおくと

$$0 \leqq J_1 \leqq J_2 \leqq \cdots \leqq J_n \leqq \cdots$$

である.

さて, 各 U_n に対し m を十分大きくとると U_n は D_m に含まれる (理由を考えられたい). ゆえに各 J_n に対し

$$J_n \leqq I_m \leqq I.$$

. すなわち J_n は上に有界な単調数列ゆえ収束する. その極限値を J とすると

$$J \leqq I$$

U_n と D_n の役目をとりかえて同様の議論をすると $I \leqq J$ が得られ, 結局

$$I = J$$

となる. すなわち広義積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

は収束してその値は I に等しい. □

問 4.

$$D; 1 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$$

$$\iint_D \frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} dxdy$$

を求めよ.

関数が定符号でないときはこのようなことは成り立たない. 問題 2b,238page 参照.

例 5.23. $W = \{(x,y)|0 < \sqrt{x^2+y^2} \leqq R\}$ （閉円板から原点を抜いたもの）とおき, 広義積分

$$\iint_W \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} \quad (\alpha < 1)$$

を考えよう.

証明. $W_n = \{(x,y)|\frac{R}{n} < \sqrt{x^2+y^2} < R - \frac{R}{n}\}$ とおくと W_n は W に収束する増大列であり, 例 5.9 より

$$\iint_W \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{\pi}{1-\alpha}\{(R-\frac{R}{n})^{2-2\alpha} - (\frac{R}{n})^{2-2\alpha}\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{W_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{\pi R^{2-2\alpha}}{1-\alpha}.$$

したがって, 広義積分は収束してその値はこの極限値に等しい. □

例 5.24. $W = \{(x,y)|x > 0, y > 0\}$ 上の広義積分

$$\iint_W \frac{dxdy}{(x+y+1)^\alpha} \qquad (\alpha > 2)$$

を考える.

証明.

$$W_n = \{(x,y)\Big|\frac{1}{n} < x < n, \frac{1}{n} < y < n\}$$

とおくと, $\{W_n\}$ は W に収束する増大列である.

$$\iint_{\overline{W}_n} \frac{dxdy}{(x+y+1)^\alpha} = \int_{\frac{1}{n}}^{n} dy \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{dx}{(x+y+1)^\alpha}$$

$$= \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha-1)}\{(2n+1)^{2-\alpha} - 2(n+\frac{1}{n}+1)^{2-\alpha} + (\frac{2}{n}+1)^{2-\alpha}\}.$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\overline{W}_n} \frac{dxdy}{(x+y+1)^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \qquad (\alpha > 2)$$

したがって広義積分は収束して, 値はこの極限値に等しい. □

例 5.25. 確率論, 統計学で重要な広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を考えよう.

証明. 例 5.21 でもやったが定義どうりやればどうなるかもう一遍やってみる. $\int_1^\infty e^{-x^2} dx < \int_1^\infty e^{-x} dx$ となるので, この広義積分は収束する.

$$W = \{(x,y) | x > 0, y > 0\}$$

とおき, 広義積分

$$\iint_W e^{-x^2-y^2} dxdy \tag{5.10}$$

を考える.

$$W_n = \{(x,y) \Big| \frac{1}{n} < x < n, \frac{1}{n} < y < n\}$$

とおくと, $\{W_n\}$ は W に収束する増大列で

$$\begin{aligned}\iint_{\overline{W}_n} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-x^2} dx \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-y^2} dy \\ &= I(n)^2\end{aligned} \tag{5.11}$$

である. ただし

$$I(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-x^2} dx$$

とする.

式（5.11）の右辺は $\to I^2 (n \to \infty)$ ゆえ, 広義積分（5.10）は収束して, その値は I^2 に等しい.

一方,

$$U_n = \{(x,y) \Big| x > 0, y > 0, \frac{1}{n} < \sqrt{x^2+y^2} < n\}$$

とおけば, $\{U_n\}$ も W に収束する増大列である.

$$F_n = \{(r,\theta) \Big| \frac{1}{n} \leqq r \leqq n, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\varphi}{2}\}$$

$$\Phi : F_n \longrightarrow \overline{U}_n, \qquad \Phi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned}
\iint_{\bar{U_n}} e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint_{F_n} e^{-r^2} rdrd\theta &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-r^2} rdr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n^2}}^{n^2} e^{-t} \frac{dt}{2} \qquad\qquad (t = r^2, \quad dt = 2rdr) \\
&= \frac{\pi}{4} (e^{-\frac{1}{n^2}} - e^{-n^2})
\end{aligned}$$

これは $\to \frac{\pi}{4} (n \to \infty)$ である. したがって

$$I^2 = \frac{\pi}{4}.$$

I は正の数なので

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が得られる. □

広義積分の定義は 3 重積分, 一般に n 重積分でも同様であり, 定理 5.16 と同様の定理が成り立つ.

注意 W が有界でその境界が有限個の区分的になめらかな閉曲線より成る場合は, 広義積分

$$\iint_W f(x,y)dxdy$$

を

$$\iint_{\bar{W}} f(x,y)dxdy$$

と書くこともある ($\bar{W}$ は W とその境界 ∂W の和集合).

例 5.26.

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}, \quad D: 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1,$$

とするとき，広義積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

は発散する. 例 *5.10,213* ページ参照.

♣♢5.4 節の演習問題 ♣♢

1. 次の重積分の広義積分が収束する場合はその値を求めよ.

(1) $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2-y^2}}$　　$D: -x < y < x, 0 < x < 1$

(2) $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^\alpha}$ $(0 < \alpha < 2)$　　$D: 0 < x < 1, 0 < y < 1$

(3) $\iint_D e^{-x-y}dxdy$　　$D: x > 0, 0 < y < 1$

(4) $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$　　$D: x^2+y^2 < 4$

(5) $\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy$　　$D: 0 < x^2+y^2 < 9$

(6) $\iiint_D \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^\alpha}$ $(\alpha > 3)$　　$D: x > 0, y > 0, z > 0$

(7) $\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ $(\alpha < \frac{3}{2})$　　$D: 0 < x^2+y^2+z^2 < a^2$

(8) $\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ $(\alpha > \frac{3}{2})$　　$D: x^2+y^2+z^2 > 1$

(9) $\iiint_D \frac{dxdydz}{1-x^2-y^2-z^2}$　　$D: x^2+y^2+z^2 < 1$

2. (1)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

に注目して

$$\iint_R \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy, \quad R: a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$$

を計算しよう.

(2) $D: 0 < x \leqq 1, 0 < y \leqq 1$, $D_n: \frac{c}{n} \leqq x \leqq 1, \frac{1}{n} \leqq y \leqq 1$ とする．ここで $c > 0$ は任意の定数，$n = 1, 2, \cdots; D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

を求めなさい. 定理 5.16,232page も参照.

3. a, b, c を定数とし, $a > 0, b^2 - ac < 0$ とする. 次の広義積分が収束することを示し, その値を求めよ:

$$\iint_{R^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dxdy$$

5.5　線積分と Green の定理

平面上の領域 W 内に, t をパラメ-タとするなめらかな曲線

$$C : x = \rho(t), y = \psi(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

があるとする. ここに ρ, ψ は C^1-関数で, 各 t で $\rho'(t), \psi'(t)$ は同時に 0 でないとする. $f(x, y), g(x, y)$ を C 上の t についての連続関数とするとき, 積分

$$\int_a^b \left\{ f(x, y)\frac{dx}{dt} + g(x, y)\frac{dy}{dt} \right\} dt \tag{5.12}$$

を W 上の 微分形式 $fdx + gdy$ の C にそっての 線積分とよぶ. 式 (5.12) は

$$\int_a^b \{f(\rho(t), \psi(t))\rho'(t) + g(\rho(t), \psi(t))\psi'(t)\} dt$$

である. この積分値は, パラメ-タ t によらない (このことは置換積分法からわかる).

問 5. 積分値が, パラメ-タ t によらないことを示せ.

そのため, この値を

$$\int_C (fdx + gdy)$$

と書く.

線積分は区分的になめらかな曲線 C に対しても, なめらかな部分の線積分の和と定義され, 同じ記号で表される. 以下, 考える曲線は, 全て区分的になめらかな曲線とする.

曲線 C には向きがついていることに注意する. C の向きを逆にした曲線を $-C$ と書く. 明らかに

$$\int_{-C}(fdx+gdy)=-\int_C(fdx+gdy).$$

C の終点を始点とする曲線 C' を考え, C と C' をつなぎ合わせた曲線を $C+C'$ と書く. このとき, 明らかに

$$\int_{C+C'}(fdx+gdy)=\int_C(fdx+gdy)+\int_{C'}(fdx+gdy).$$

また次の注意もしておこう.
2 点 $P(a,c),Q(b,c)$ と y 座標が同じとき P から Q へ向かう有向線分を C とすると

$$\int_C(fdx+gdy)=\int_a^b f(x,c)dx$$

である. 同じように 2 点 $P(a,c),Q(a,d)$ と x 座標が同じとき P から Q へ向かう有向線分を C とすると

$$\int_C(fdx+gdy)=\int_c^d g(a,y)dy$$

である.

例 5.27. 積分路 C が $y=\varphi(x), a\leqq x\leqq b$(向きは点 $(a,f(a))$ から点 $(b,f(b))$ へ向かう) のときは $\int_C(fdx+gdy)=\int_a^b f(x,\varphi(x))dx$ である.

例 5.28. (1) $\int_{C_1}(y^2+1)dx+xdy$ を求める.
ここで積分路 C_1 は点 $(1,0)$ から点 $(0,1)$ へ向かう有向線分である.

証明. 曲線 C_1 のパラメーター表示は

$$x=1-t, y=t; 0\leqq t\leqq 1,$$

である. $\frac{dx}{dt}=-1, \frac{dy}{dt}=1$ だから $\int_{C_1}(y^2+1)dx+xdy=\int_0^1\left\{-(t^2+1)+(1-t)\right\}dt=-\frac{5}{6}$. □

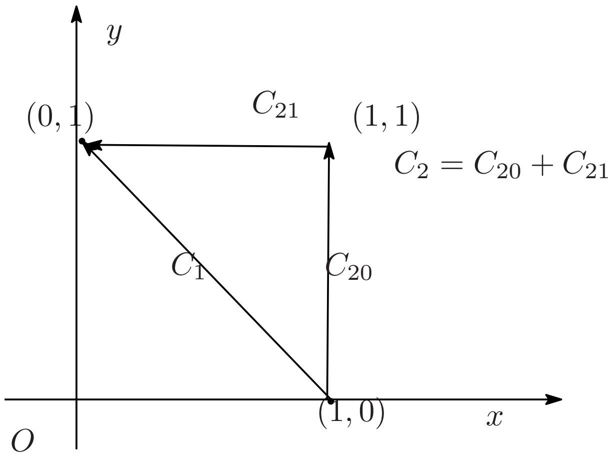

図 5.14 線積分の積分路

(2) 今度は $\int_{C_2}(y^2+1)dx + xdy$ の値を求める．ここで積分路 C_2 は点 $(1,0)$ から点 $(1,1)$ さらに 点 $(0,1)$ へ向かう有向線分である．図 *(5.14)* を見よ．

証明. $\int_{C_2} = \int_{C_{20}} + \int_{C_{21}}$.
$\int_{C_{20}}(y^2+1)dx + xdy = \int_{C_{20}} xdy = \int_0^1 (1-t)dt$ □

次の例は Green の定理の証明で大切な役割をなす.

例 5.29. *(1)* 領域 D は $D = \{(x,y)|\varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x), a \leqq x \leqq b\}$ として積分路は境界 ∂D を反時計方向に廻るとする。このとき

$$\int_{\partial D} f dx = \iint_D (-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$$

である.

証明. 被積分関数を省略して書けば $\int_{\partial D} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$.
$\int_{C_2} = \int_{C_4} = 0$. である. □

(2) 領域 D は $D = \{(x,y)|\varphi_1(x) \leqq x \leqq \psi_1(x), c \leqq y \leqq d\}$ として積分路は

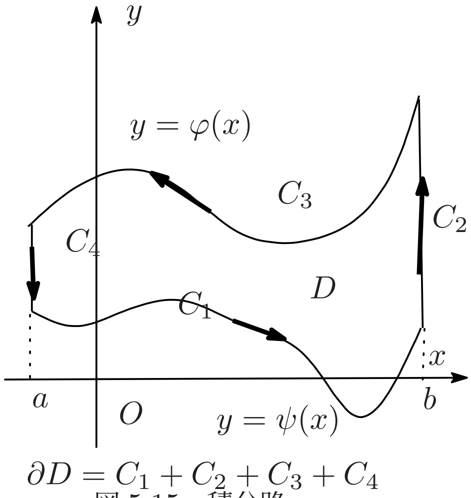

図 5.15　積分路

境界 ∂D を反時計方向に廻るとする。このとき

$$\int_{\partial D} g dy = \iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dxdy$$

である.

定理 5.17 (Green の定理)**.** 有界閉領域 D が 領域 W に含まれ, D の境界 ∂D が有限個の *(*区分的になめらかな*)* 閉曲線 $C_1, \cdots, C_m$ からなるとする. 各 C_i には D に対して **正の向き** *(D* をつねにへ左手に見て進む向き*)* をつけておく. このとき, $f(x,y), g(x,y)$ が C^1 -関数である W 上の微分形式 $fdx + gdy$ に対し

$$\int_{\partial D} (fdx + gdy) = \iint_D (-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}) dxdy$$

が成り立つ. ただし, 左辺は次を意味する.

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{C_i} (fdx + gdy).$$

証明. 2 つに分けて

$$\int_{\partial D} f dx = \iint_D (-\frac{\partial f}{\partial y}) dxdy \tag{5.13}$$

$$\int_{\partial D} g dy = \iint_D (\frac{\partial g}{\partial x}) dxdy \tag{5.14}$$

式（5.13）を示すために, D 内に座標軸に平行な線分を何本か描くことによって, D を有限個の縦線閉領域 (5.1) に分割する. それらを, $D_1, \cdots, D_n$ とする.

もし, 各 D_j で

$$\int_{\partial D} f dx = \iint_{D_j} (-\frac{\partial f}{\partial y}) dxdy \quad (j = 1, \cdots, n)$$

が示されれば, これらを辺々加え合わせることにより式（5.13）は示される. なぜなら, 例えば図 5-25 の D_1 と D_2 の境界の線分上では, ∂D_1 のときと ∂D_2 の向きが逆になり, その上で線積分は打ち消し合うからである.

それゆえ, 最初から D を縦線閉領域と仮定して式（5.13）を証明する.

$\varphi(x), \psi(x)$ を閉区間 $[a, b]$ 上連続, (a, b) で C^1-関数で, (a, b) でつねに $\varphi(x) < \psi(x)$ とする. このとき, 図 5-26 の縦線閉領域 D において, 累次積分の定理 (定理 5.13) より

$$\iint_D (-\frac{\partial f}{\partial y}) dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(y)} (-\frac{\partial f}{\partial y}) dy = \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b f(x, \psi(x)) dx$$

一方, 線積分

$$\int_{\partial D} f dx$$

はその定義から, 垂直の線分上では 0 ゆえ

$$\int_{\partial D} f dx = \int_a^b f(x, \phi(x)) dx - \int_a^b f(x, \psi(x)) dx$$

となるので, 結局

$$\iint_D (-\frac{\partial f}{\partial y}) = \int_{\partial D} f dx$$

式（5.14）を示すためには, D を今度は有限個の横線閉領域に分割し, 各小横線閉領域で式（5.14）を示せばよい. 上と同様である. □

系 5.17.1. 領域 D の面積 $m(D)$ について次がいえる.

1. $m(D) = \int\int_d dxdy = -\int_{\partial D} ydx$
2. $m(D) = \int_{\partial D} xdx$
3. $m(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(-ydx + xdy)$

証明. $f(x,y) = -y, g(x,y) = 0$(恒等的) とおけば, 定理より (1) が得られる, (2), (3) も同様である. □

例 5.30. 楕円 C:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

とパラメ-タ-表示される. ゆえに楕円で囲まれた部分 D の面積は, 上の系の *(3)* より $m(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(-ydx + xdy)$

定理 5.18. 領域 W 上の C^1-関数 $f(x,y), g(x,y)$ に対し, W 上の C^2-関数 $H(x,y)$ が存在して

$$\frac{\partial H}{\partial x} = f, \frac{\partial H}{\partial y} = g$$

となるための必要十分条件は, W 内の任意の *(*区分的になめらかな*)* 閉曲線 C に対し

$$\int_C (fdx + gdy) = 0$$

となることである.

証明. C^2- 関数 H が存在して $\frac{\partial H}{\partial x} = f, \frac{\partial H}{\partial y} = g$ をみたすとする.C がなめらかな曲線であって, 次のようにパラメ-タ表示されているとする:

$$C : x = \phi(t), y = \psi(t)(a \leqq t \leqq b).$$

C の始点が P, 終点が Q の場合

$$\begin{aligned}\int_C (fdx + gdy) &= \int_a^b \left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt = \int_a^b \frac{dH}{dt}dt \\ &= H(\phi(b), \psi(b)) - H(\phi(a), \psi(a)) \\ &= H(Q) - H(P)\end{aligned}$$

C が区分的になめらかな曲線で, 始点が P, 終点が Q の場合も, なめらかな部分に分けて考え, 加えて合わせればよいので, やはり

$$\int_C (fdx + gdy) = H(Q) - H(P)$$

が成り立つ. これは (上のような H があれば) 線積分の値が始点 P と終点 Q にのみ依存し, 途中の道筋には無関係であることを示す,

特に C が閉曲線 (Q=P) の場合は

$$\int_C (fdx + gdy) = 0$$

逆に, W の任意の閉曲線 C に対し

$$\int_C (fdx + gdy) = 0$$

とする. いま, 固定点 $P_0(x_0, y_0)$ を始点とし, 動点 $P(x, y)$ を終点とする曲線 C をとり

$$H(x, y) = \int_C (fdx + gdy)$$

を考えると, これは C のとり方によらず $P = (x, y)$ にのみ依存し, したがって点 (x, y) の関数である. 実際, C, C' を P_0 から P への 2 つの曲線とすると, $C - C'$ は閉曲線なので

$$0 = \int_{C-C'} (fdx + gdy) = \int_C (fdx + gdy) - \int_{C'} (fdx + gdy)$$

となるからである.

図 5-27 において, $|h|(h \neq 0)$ を十分小さくとると

$$\begin{aligned}\frac{H(x+h, y) - H(x, y)}{h} &= \frac{1}{h}\int_P^Q (fdx + gdy)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t, y)dt \to f(x, y)(h \to 0)\end{aligned}$$

である. それゆえ

$$\frac{\partial H}{\partial x} = f(x, y).$$

同様に

$$\frac{\partial H}{\partial y} = g(x, y).$$

すなわち H は偏微分可能であり, $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}$ はさらに偏微分可能で $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ などは連続ゆえ, H は C^2- 関数である. □

W の任意の (区分的になめらか) 閉曲線 C に対し, C の囲む部分がつねに W に含まれるとき, W を 単連結であるという.

例えば円板や領域

$$\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$$

は単連結だが,

図 5.9 は単連結，　図 5.10（223 ページ）は単連結でない.

定理 5.19. *W を単連結な領域とする. W 上の C^1-関数 $f(x, y), g(x, y)$ に対し, W 上の C^2-関数 $H(x, y)$ で $\frac{\partial H}{\partial x} = f$, $\frac{\partial H}{\partial y} = g$ となるものが存在するための必要十分条件は, W 上で次の等式が成り立つことである:*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

証明. C^2-関数 H で $\frac{\partial H}{\partial x} = f, \frac{\partial H}{\partial y} = g$　となるものが存在するとする.　このとき定理 4.6 より

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

. 逆に W 上で $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ が成り立つとする.　このとき, W 内の任意の閉曲線 C に対し

$$\int_c (f dx + g dy) = 0$$

が成り立つ.　なぜなら, C が有界閉領域 D の境界ならば,　Green の定理より

$$\int_c (f dx + g dy) = \pm \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx dy = 0$$

($\pm$ は C が D に対し正の向きか負の向きかによる.)　一般の C の場合は有界閉領域の境界となる有限個の閉曲線に分割すればよい (図 5-28).

したがって (5.24) が成り立つので,　定理 5.18 より　$\frac{\partial H}{\partial x} = f$,　$\frac{\partial H}{\partial y} = g$ となる C^2-関数 $H(x,y)$ が W 上に存在する.　□

さて,Green の定理 を用いて定理 5.15(2 重積分における変数変換) の別証明をあたえよう.

証明. **定理 5.15 の別証明**　定理 5.15 と同じ記号を用いる.　$J_\phi > 0$　とする.　Green の定理 5.17 の系と Green の定理より

$\iint_E dxdy = \int_{\partial E} xdy = \int_{\partial D} x(u,v)\frac{\partial y}{\partial u} + x(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}dv$

$= \iint_D -\frac{\partial}{\partial v}(x(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial u}(x(u,v)\frac{\partial y}{\partial v})dudv$

$= \iint_D J_\phi dudv$

$J_\phi < 0$ のときは,　ϕ による ∂D の像 ∂E の向きが逆 (負の向き) となるので,上と同様の議論で

$$\iint_E dxdy = -\iint_D J_\phi dudv$$

となり, 結局

$$\iint_E dxdy = \iint_D |J_\phi| dudv$$

が得られる.

(5.25) は, 定理 5.15 において $f = 1$(定数関数)　の場合がある.

一般の連続関数 $f(x,y)$　の場合は次のように示される.D を有限個の (境界がいくつかの区分的になめらかな曲線よりなる) 小さい有界閉領域 $D_i(i = 1,\cdots,m)$ に分割し,　$E_i = \phi(D_i)$ とおく.2 重積分の平均値の定理 (定理 5.11) より

$$\iint_{D_i} |J_\phi(u,v)|dudv = |J_\phi(u_i,v_i)|m(D_i)$$

をみたす D_iの点 (u_i,v_i) がある. したがって (5.25) より

$$\sum_{i=1}^m f(\phi(u_i,v_i))|J_\phi(u_i,v_i)|m(D_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(\phi(u_i, v_i)) \iint_{D_i} |J_\phi(u,v)| du dv$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(\phi(u_i, v_i)) m(E_i).$$

d を $d(D_i)$ （ D_i の直径）の最大値, d' を $d(E_i)$ の最大値とすれば, $d \to 0$ の とき $d' \to 0$ となり, （定理 5.12 より）(5.26) の左辺は $\iint_D f(\phi(u,v))|J_\phi(u,v)|dudv$ に限りなく近づき, 右辺は

$$\iint_E f(x,y) dx dy$$

に限りなく近づく. ゆえに

$$\iint_D f(\phi(u,v))|J_\phi(u,v)|dudv = \iint_E f(x,y)dxdy.$$

これで定理 5.15 が示された. □

♣◇5.5 節の演習問題 ♣◇

1. $P(1,0)$ を始点, $Q(-1,0)$ を終点とする曲線 C を次のようにとるとき, それぞれの場合の線積分

$$\int_C ((x^2+y^2)dx + 2xdy)$$

の値を求めよ.

(1) C は線分 PQ

(2) C は中心が原点, 半径 1 の上半円

(3) C は中心が原点, 半径 1 の下半円

2. D を円環領域 $D = \{(x,y) | \frac{1}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < 2\}$ とし,

$$f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

とおくと, D 上で $\dfrac{df}{dy} = \dfrac{dg}{dx}$ であるが, 原点が中心, 半径 1 の円 C(向きは反時計回り) に対し

$$\int_C (fdx + gdy)$$

の値を求めよ.(この例は, D が単連結でないときは定理 5.19 が成り立たないことを示している.)

3. 線積分を用いて次の曲線の囲む閉領域の面積を求めよ.
   (1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ (アステロイド)
   (2) $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$

5.6 重積分の応用

この節では, 重積分の応用をいくつか取り上げる. 何らかの応用にはなろう.

5.6.1 剛体の質量と重心

質量が m_i の質点 $P_i(x_i, y_i, z_i)(i = 1, \cdots, s)$ からなる質点系の総質量は

$$M = m_i + \cdots + m_s$$

であたえられる. また, この質点系の重心 $G(x_0, y_0, z_0)$ の座標は

$$x_0 = \frac{1}{M}(m_1x_1 + \cdots + m_sx_s), y_0 = \frac{1}{M}(m_1y_1 + \cdots + m_sy_s),$$

$$z_0 = \frac{1}{M}(m_1z_1 + \cdots + m_sz_s)$$

であたえられる. 一方, 質量が連続的に分布している, いわゆる 剛体 V においては, V を微小部分に分割して, 各微小部分をあたかも質点のごとく考えて上のような和をとれば, V の 質量 と 重心 の座標の近似値が得られる. その微小部分の質量は, その部分の密度と体積の積である. そこで分割を限りなく細かくとった極限, すなわち積分値 (定理 5.12) が V の質量と重心の座標をあたえる. すなわち,

定理 5.20. 密度関数 が $\rho(x,y,z)$ である剛体 V の質量は

$$M = \iiint \rho(x,y,z)dxdydz$$

であたえられ, V の重心 $G=(x_0,y_0,z_0)$ の座標は

$$x_0 = \frac{1}{M}\iiint_V x\rho dxdydz,$$
$$y_0 = \frac{1}{M}\iiint_V y\rho dxdydz,$$
$$z_0 = \frac{1}{M}\iiint_V z\rho dxdydz$$

であたえられる.

系 5.20.1. 　密度が一定の数 ρ である均質な剛体 V の質量は

$$M = \rho m(V) = \rho\iiint_v dxdydz$$

であたえられ, V の重心 $G=(x_0,y_0,z_0)$ の座標は

$$x_0 = \frac{1}{m(V)}\iiint_V xdxdydz,$$
$$y_0 = \frac{1}{m(V)}\iiint_V ydxdydz,$$
$$z_0 = \frac{1}{m(V)}\iiint_V zdxdydz$$

であたえられる.

例 5.31. 密度一定, 底円の半径 a, 高さ h の直円錐形の剛体 V *(*図 *5-29)* の重心の座標を求めてみよう. ただし, 底円の中心を原点とする. 図 *5-29* において, 高さ z の水平面で円錐を切った切り口の円板を $D(z)$ とすると, 比例関係より, その半径は $a(h-z)/h$ となるので

$$m(V) = \iiint_V dxdydz = \int_0^h dz\iint_{D(z)} dxdy = \int_0^h \pi\frac{a^2(h-z)^2}{h^2}dz = \frac{1}{3}\pi a^2h^2$$

また, 図形の対称性より $G(x_0, y_0, z_0)$ は $z-$ 軸上にあるのは明らかなので $x_0 = y_0 = 0$. また

$$\iiint_V z \quad dxdydz = \int_0^h zdz \iint_{D(z)} dxdy = \int_0^h \pi \frac{a^2(h-z)^2}{h^2} dz = \frac{1}{12}\pi a^2 h^2$$

となる. したがって重心の $z-$ 座標は次であたえられる:

$$z_o = \frac{\pi a^2 h^2/12}{\pi a^2 h/3} = \frac{h}{4}.$$

5.6.2 曲面の表面積

(u, v) をパラメ-タとする**なめらかな曲面**とは, 問題 4.5, **6** で定義したように, 平面の領域 W から R^3 への C^1-写像

$$F : (u, v) \longmapsto (x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

で次の 2 条件をみたす F の像集合 $F(W)$ のことである:

1. F は W から $F(W)$ への 1 対 1 写像 ($F(u, v) = F(u', v')$ ならば $(u, v) = (u', v')$ をみたす写像である.
2. W の各点 (u, v) で $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \dfrac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$ は同時に 0 でない, とする.

この曲面 $F(u, v)$ 上の点 $P(x, y, z)$ における接平面は, P を始点とする 2 つの位置ベクトル

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$\frac{\partial F}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

で張られる平面である (図 5.30). P を始点とし, 接平面上にある位置ベクトルを**接ベクトル**とよぶ. $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$ およびそれらの一次結合が接ベクトルである.
さて, W が有界でその境界が有限個の区分的になめらかな閉曲線からなると

する.W にその境界 ∂W を付け加えた有界閉領域 W を D とおく. いま, 写像 F が境界 ∂W に連続的に拡張され, F を連続写像

$$F : D \longrightarrow \mathbf{R}^3 \tag{5.15}$$

とみなすことができると仮定する.S を F による D の像とするとき, S は**境界のあるなめらかな曲面**である (図 5-30 参照, 境界曲線を ∂S で表す).　S の表面積 (**曲面積**) は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2} dudv$$

で定義される.

この式は直感的には次のように解釈される.(u,v) を W の点とし固定する.$s>0$, $t>0$ を十分小さくとる.$\vec{X}$ を点 $F(u,v)$ を始点, $F(u+s,v)$ を終点とするベクトルとし, $\vec{Y}$ を $F(u,v)$ を始点, $F(u,v+t)$ を終点とするベクトルとするとき, W に含まれる小長方形

$$R = \{(\hat{u},\hat{v}) | u \leqq \hat{u} \leqq u+s, v \leqq \hat{v} \leqq v+t\}$$

の F による像 F(R) は, ベクトル $\vec{X}$ とベクトル $\vec{Y}$ からつくられる平行四辺形にほぼ等しい. ところが

$$\vec{X} = (x(u+s,v) - x(u,v), y(u+s,v) - y(u,v), z(u+s,v) - z(u,v)),$$
$$\vec{Y} = (x(u,v+t) - x(u,v), y(u,v+t) - y(u,v), z(u,v+t) - z(u,v))$$

は, 平均値の定理よりそれぞれ接ベクトル

$$s\frac{\partial F}{\partial u} = \left(s\frac{\partial x}{\partial u}, s\frac{\partial y}{\partial u}, s\frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad t\frac{\partial F}{\partial v} = \left(t\frac{\partial x}{\partial v}, t\frac{\partial y}{\partial v}, t\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

にほぼ等しい. したがって $F(R)$ は, $s\frac{\partial F}{\partial u}$ と $t\frac{\partial F}{\partial v}$ からつくられる接平面内の平行四辺形 A にほぼ等しい.(より詳しくいえば, A は $F(R)$ の接平面への正射影にほぼ等しい.) したがって $F(R)$ の「曲面積」は平行四辺形 A の面積にほぼ等しい.

ところがこの平行四辺形の面積は, これらの接ベクトル $s\frac{\partial F}{\partial u}$ と $t\frac{\partial F}{\partial v}$ の外積の長さに等しい:

$$\begin{aligned}
m(A) &= \left\| s\frac{\partial F}{\partial u} \times t\frac{\partial F}{\partial v} \right\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2} st.
\end{aligned}$$

この微小量の総和の極限が (5.28) の公式と考えられる.

注意 3 次元ベクトル $\vec{X} = (a,b,c)$, $\vec{Y} = (p,q,r)$ の**外積** $\vec{X} \times \vec{Y}$ とは, $\vec{X}$ および $\vec{Y}$ に直交し, 3 つのベクトル $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{X} \times \vec{Y})$ がこの順で**右手系** ($\vec{X}$ から $\vec{Y}$ へネジを右手で回すときのネジの進む方向) となり, $\vec{X} \times \vec{Y}$ の長さが $\vec{X}$ と $\vec{Y}$ からつくられる平行四辺形の面積に等しいものと定義される. こう定義するとその成分は次式であたえられる:

$$\begin{aligned}
\vec{X} \times \vec{Y} &= \left(\begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ p & q \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \right) \\
&= (br - cq, cp - ar, aq - bp).
\end{aligned}$$

詳しくは線形代数学のテキストを見られたし.

この定義から $\vec{X} \times \vec{Y} = -\vec{Y} \times \vec{X}$ となっている. また $\vec{X}$ と $\vec{Y}$ の間の角を θ とすると, $\vec{X} \times \vec{Y}$ の長さの 2 乗は

$$\begin{aligned}
||\vec{X} \times \vec{Y}||^2 = ||\vec{X}||^2 ||\vec{Y}||^2 \sin^2\theta &= ||\vec{X}||^2 ||\vec{Y}||^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= ||\vec{X}||^2 ||\vec{Y}||^2 - (\vec{X}, \vec{Y})^2
\end{aligned}$$

($(\vec{X}, \vec{Y})$ は $\vec{X}$ と $\vec{Y}$ の内積) となる. このことを用いると, (5.28) の曲面積の公式は

$$\iint_D \sqrt{\left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial F}{\partial v}\right\|^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\right)^2} dudv$$

でもあたえられることがわかる.

特に曲面が C^1-関数

$$z = f(x,y)$$

のグラフであたえられている場合は, ($u=x$, $v=y$ とおけるので) その曲面積は

$$\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy \tag{5.16}$$

であたえられる.

区分的になめらかな曲面とは, 有限個のなめらかな曲面を, いくつかの区分的になめらかな曲線を境界として張り合わせた曲面のことと定義する. このような曲面の**曲面積**とは, 各なめらかな部分の曲面積の和とする.

注意　(5.28) も (5.30) も, 曲面 (またはパラメ-タのとり方) によっては広義積分 (W で有界でない関数の 2 重積分になる. その場合は, 広義積分が収束することを示さねばならない.

例 5.32. *(**球の表面積**)*　半径 a の球の表面積は上半球 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ の曲面積の *2* 倍である. そこで W を円板

$$W=\{(x,y)|x^2+y^2<a^2\}$$

とし, $D=\overline{W}$ を境界もこめた閉円盤とする. 次を計算する:

$$\begin{aligned} I=&\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy\\ =&\iint_D \sqrt{1+\left(-\frac{x}{z}\right)^2+\left(-\frac{y}{z}\right)^2}dxdy\\ =&a\iint_D \frac{dxdy}{z}=a\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}. \end{aligned}$$

これは広義積分だが収束する.

極座標変換 $\Phi:(r,\theta)\longmapsto(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ によって

$$I=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=2\pi a^2$$

したがって, 球の表面積は $4\pi a^2$ である.

5.6.3　面積分と Gauss の定理

$S=F(D)$ を式（5.15）のように, (u,v) をパラメ-タとする (境界のある) なめらかな曲面とする．$f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)$ を, S を含む 3 次元空間内の領域 (立体) V 上の連続関数とする. このとき, 2 重積分

$$\iint_D \{f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + g(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + h(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\}dudv \quad (5.17)$$

を考える．この値は, ヤコビアンがつねに正である座標変換 $\Phi:(s,t)\longmapsto(u,v)$ でつねに不変である (確かめられたい). このような座標変換のみを考えることは, 曲面の表裏を考えて**表側を指定する**ことにほかならない.(外積 $\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial F}{\partial v}$ の方向を表ときめる.)

式 (5.17) の値は, 曲面の表側の指定と関数 f,g,h のみできまるので, これを**微分形式**

$$fdydz+gdzdx+hdxdy$$

の曲面 S に沿っての**面積分**とよび

$$\iint_S(fdydz+gdzdx+hdxdy)$$

と表す.

表側が指定されている区分的になめらかな曲線に沿っての面積分は, 各なめらかな部分に沿っての面積分の和と定義する.

注意　Möbius の帯　図 (5.16) は, 裏表 の区別ができない曲面である．縦が長い長方形の紙の形で両端を向きを逆にして貼り合わせると出来る。

次の定理は, Green の定理 (定理 5.17) の 3 次元版と考えられる.

証明は Green の定理の証明と似た方法でできるので省略する.

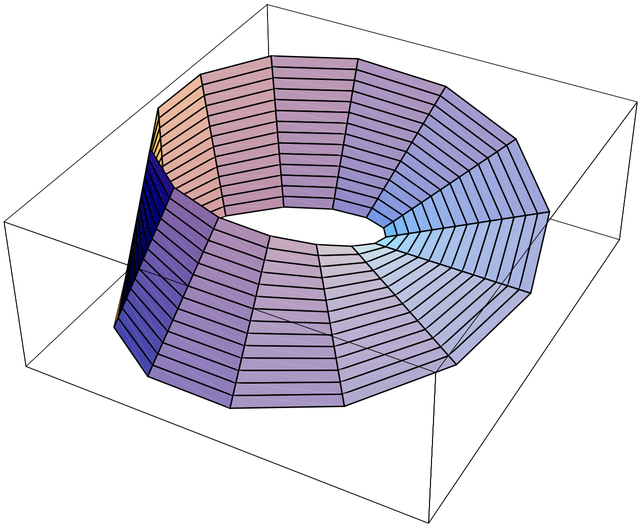

図 5.16　Möbius の帯

定理 5.21. *W を 3 次元空間内の有界領域で, その境界 ∂W が有限個の表側の指定できる区分的になめらかな 閉曲線 (境界のない曲面) からなるとする.$\overline{W}$ を W と ∂W の和集合とし, $f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)$ を $\overline{W}$ 上の C^1-関数とする. このとき次が成り立つ:*

$$\iint_{\partial W} (f dydz + g dzdx + h dxdy) = \iiint_{\overline{W}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dxdydz.$$

ただし, ∂W は $\overline{W}$ を外からながめて見える側を表としている.

方向付け可能の図より Gauss の定理が成り立っている事が解る. 空間に (非圧縮, 非粘性の) 定常流があり, 点 (x,y,z) における速度ベクトルを (f,g,h) とすると, これは空間のベクトル場である.(5.32) の右辺は, W の内部からの流体の, 単位時間あたりの総湧き出し量を表わし, 左辺は W からの表面 S を通っての単位時間あたりの総流出量を表わすので, これらは等しい (図 5-32).

系 5.21.1. 定理と同じ W に対し

$$m(\overline{W}) = \frac{1}{3} \iint_s (xdydz + ydzdx + zdxdy).$$

5.6.4　Stokes の定理

線積分は空間内の向きのある滑らかな曲線

$$C: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

あるいは, それらの有限個の接合である区分的に滑らかな曲線 C に沿っても定義できる:

$$\int_C (fdx + gdy + hdz).$$

図 5-30 を再び見られたい. この図の曲面 S の表側を我々がながめて見える側とする.S の境界曲線 ∂S の向きを図 5-30 のように付けたとする.

このとき, Green の定理の曲面版である次の定理が成り立つ.(証明はグリ-ンの定理の証明と似た方法でできるが省略する.)

定理 5.22 (Stokes の定理)**.** $f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)$ を曲面 S 上の C^1-関数とするとき,

$$\int_{\partial S} (fdx + gdy + hdz) = \iint_S \{ \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy \} \quad (5.18)$$

が成り立つ.

♣◇5.6 節の演習問題 ♣◇

1. 　次の式であたえられる密度一定の均質な剛体の重心の座標を求めよ.
   (1) $V = \{(x,y,z) | 0 \leqq z \leqq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$　　　(半球)
   (2) $V = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4, 1 \leqq z \leqq 2\}$
2. 　曲面 S が, 空間の極座標 (r, θ, ϕ) を用いて $r = f(\theta, \phi)$ (f は D 上の

C^1-関数) と表されるとき, S の曲面積は次であたえられることを示せ:

$$\iint_D r\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\right\}\sin^2\theta+\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\right)^2}d\theta d\phi.$$

3. 曲面 S が, 円柱座標 (ρ,φ,z) を用いて $\rho=f(\varphi,z)$(f は D 上の C^1-関数) と表されるとき, S の曲面積は次であたえられることを示せ:

$$\iint_D \sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2+\rho^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}d\varphi\,dz.$$

4. 閉区間 $[a,b]$ で連続, (a,b) で C^1-関数でつねに正の値をとる $f(x)$ のグラフ $y=f(x)$ を x-軸の回りに回転して得られる回転体の曲面積は

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

であたえられることを示せ.

5. サイクロイド $x=t-\sin t, y=1-\cos t\quad(0\leqq t\leqq 2\pi)$ を x-軸の回りに回転して得られる回転体の曲面積を求めよ.
6. 円柱 $x^2+y^2=x$ の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の内部にある部分の曲面積を求めよ.
7. 平面 $z=0, z=2x$ の間にある円柱面 $x^2+y^2=1$ の部分の曲面積を求めよ.
8. 次の曲面の全表面積を求めよ.

(1)　$(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1$

(2)　$(x^2+y^2+z^2)^2=x^2-y^2$

9. 次の面積分の値を求めよ.

ただし $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=a^2\}\quad(a>0)$ とする (外から見える面を表側とする).

(1) $\iint_S(dy\,dz+dz\,dx+dx\,dy)$

(2) $\iint_S(x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy)$

第 6 章

級数

級数，数列の話は素朴で誰にでも最初はわかり易い素材である。だけれどもいろいろ突き詰めて考えてみると難しくなっていくが同時に興味ある話になっている。専門の数学の入り口につながっている。各人が数学者になったつもりでがんばってください。

図 6.1　Weierstrass(1815-1897). ドイツ語で読めば ヴァイ エルシュトラス，とカナをふるのが正しい.

6.1　級数とは何か？

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ があるとき,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

とおいて新しい数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ができる. この数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ からできる級数といい

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{6.1}$$

と書き，左辺は単に $\sum a_n$ とも書く.

例 6.1. 例をあげよう.

(1)　$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$
(2)　$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$
(3)　$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$
(4)　$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$
(5)　$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$
(6)　$1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^{n+1}n + \cdots$

a_1 を **初項**, a_n を **第 n 項** とよび,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を第 n 項までの **部分和** とよぶ. 部分和の列 (数列である)

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

が収束するとき, 級数 (6.1) は **収束する** といい, さもなければ **発散する** という. 収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

を級数 (6.1) の 和とよび

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, または $\sum a_n = S$ とも書く) と表す.

問 1. 数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ の階差数列は元の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ である. 高校教科書数学 C 参照.

ここでちょっと高校の復習.

1. 等差数列の n 項までの和 S_n，初項を a，公差を d とする.

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

2. 等比級数の n 項までの和 S_n，初項を a，公比を $r(\neq 1)$ とする.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

問 2. 上記を計算で確かめよ.

無限級数，単に級数といえば高校数学・III 以来馴染んできているのが無限等比級数だろう. 再記しておこう.

例 1 は**等比級数**である. すなわち, 初項を a, **公比** を r とする等比級数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \tag{6.2}$$

において, $a = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$ の場合である. 級数（6.2）の部分和は

$$S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となるので, 級数 (6.2) は収束し, 和は 1 である.

一般に等比級数 (6.2) は, $|r| < 1$ のとき, そのときのみ収束し, 和は

$$S = \frac{a}{1-r}$$

である.

例 6.2.

$$\begin{array}{ll} 1. & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots=1 \\ 2. & 0.9+0.09+\cdots=1 \end{array}$$

[*1] 等比級数は基本的です. これから学ぶ級数の収束・発散は大抵, 等比級数と絶対値を比較して判定するからです.

例 6.3. つぎの級数は収束するか発散するかを考えよう.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots. \tag{6.3}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots. \tag{6.4}$$

証明. 級数 (6.3) の場合

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=\log(n+1)\to\infty \quad (n\to\infty).$$

故に発散する[*2] .

級数 (6.4) の場合

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2}<1+\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}dx=2-\frac{1}{n^2}<2.$$

有界で単調増加であるから

故に収束する. □

級数 (6.4) の収束性の論証で述べるのを略したがやはり次のことを定理の形で確認しておこう.

[*1] $0.999\cdots=1$ という記法は正しい.

[*2] 3.8.4 章節 (118 ページ) でもやったことです.

定理 6.1. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で $a_n \geqq 0$ とする. 部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が有界ならば級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

証明. $a_n \geqq 0$ だから数列 $\{s_n\}$ は上に有界で単調増加である. □

次の判定法もよく利用される (証明する程の事もないだろう).

定理 6.2. 級数 $\sum a_n, \sum b_n$ があって各 n に対し $0 \leqq a_n \leqq b_n$ とする. このとき,

1. もし $\sum b_n$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する.
2. もし $\sum a_n$ が発散すれば $\sum b_n$ も発散する.

例 6.4. $a > 0$ 定数のとき, 各 n に対し $\frac{1}{n(n+a)} < \frac{1}{n^2}$. 例 *6.3* 式（*6.4*）より $\sum \frac{1}{n^2}$ は収束するので $\sum \frac{1}{n(n+a)}$ もまた収束する.

例 6.5. $\sum \frac{1}{\log n}$

証明. 不等式 $e^n > n$ がある. これは数学的帰納法で確かめられる. したがって $\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$. 例 6.3 式（6.3）より $\sum \frac{1}{n}$ は発散するから $\sum \frac{1}{\log n}$ も発散. □

6.1.1　**正項級数**

$a_n \geqq 0$ である級数 $\sum a_n$ を**正項級数**とよぶ. 定理 6.1 や 定理 6.2 は正項級数についての判定法である.

まず正項級数について考えてみよう.

定理 6.3. 正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ に対し $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$ が存在して $c > 0$ とする. このとき $\sum a_n$ の収束と $\sum b_n$ の収束は同値である.

この定理は中々有用です. 私も愛用しています.

次の 2 つの判定法を掲げておこう:

定理 6.4. 正項級数 $\sum a_n$ に対し,

1. $0<r<1$ である定数 r と自然数 N が存在して，すべての $n \geqq N$ に対し $\sqrt[n]{a_n} \leqq r$ が成り立つならば $\sum a_n$ は収束する．
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ が存在して $0 \leqq r < 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する．
3. 無数の n に対し $a_n \geqq 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する．
4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ が存在して $r>1$ ならば $\sum a_n$ は発散する．

証明．　1. $a_n \leqq r^n \quad (n \geqq N)$ だから等比級数となって収束する．
2. $\sqrt[n]{a_n} < r' < 1$ となって収束している．
3. 任意の n について $a_n > 0$ だから．
4. $\sqrt[n]{a_n} > r' > 1$ となって収束している．

□

定理 6.5. 正項級数 $\sum a_n$ に対し，

1. $0<r<1$ である定数 r と自然数 N が存在して，すべての $n \geqq N$ に対し $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq r$ が成り立つならば $\sum a_n$ は収束する．
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ が存在して $0 \leqq r < 1$ をみたすならば $\sum a_n$ は収束する．
3. ある N が存在して，すべての $n \geqq N$ に対し $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$ が成り立つならば $\sum a_n$ は発散する．
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ が存在して $r>1$ ならば $\sum a_n$ は発散する．

例 6.6.　*1.* $\sum n^{-\frac{1}{n}}$

証明． $\lim n^{-\frac{1}{n}} = 1$. 任意の ε に対して番号 n_0 があって $1-\varepsilon < n^{-\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$. 特に $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ととれば $\frac{1}{2} < n^{-\frac{1}{n}} \quad (n \geqq n_0)$. 故に発散． □

2. $\sum \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

証明． 不等式 $\frac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ がある．級数 $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するので級数 $\sum \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$ もまた収束する． □

3. $\sum \frac{1}{n^{\log n}}$

証明. $n \geqq 9$ のとき $\log n > 2$, したがって $\frac{1}{n^{\log n}} < \frac{1}{n^2}$. 級数 $\sum \frac{1}{n^{\log n}}$ は収束する. □

4. $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$

証明. 同様にして $n \geqq 9$ のとき $\frac{1}{(\log n)^n} < (\frac{1}{2})^n$. したがって収束する. □

5. $\sum a^{\log n} \quad (a > 0)$

証明. $a^{\log n} = n^{\log a}$ であるから級数 $\sum a^{\log n}$ は $\log a < -1$ のとき収束，$\log a \geqq -1$ のとき発散. □

6. $\sum \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

証明. α を 1 より大きい定数とする. 十分大きな番号 n_0 があって
$(\log n)^{\log n} > n^{\alpha} \quad (n > n_0)$.
ここで α を具体的に例えば $\alpha = 2$ としたとき，n_0 も具体的に指定できる.
$\sum \frac{1}{(\log n)^{\log n}} < \sum \frac{1}{n^{\alpha}}$. したがって級数 $\sum \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ は収束する. □

7. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

証明. $\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} < (\frac{1}{2})^n$ 故に収束する. □

8. $\sum(a^{\frac{1}{n}} - 1) \quad (a > 0)$

証明. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \log a$ である.
任意の ε に対して番号 n_0 があって

$$\left| \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \log a \right| < \varepsilon, \quad (n \geqq n_0)$$

すなわち

$$\frac{1}{n}(\log a - \varepsilon) < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n}(\log a + \varepsilon) \tag{6.5}$$

$a > 1$ のとき式 (6.5) の左側の不等式

$$\frac{1}{n}(\log a - \varepsilon) < a^{\frac{1}{n}} - 1$$

より問題の級数は $+\infty$ に発散する．

$1 > a > 0$ のとき式 (6.5) の右側の不等式

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n}(\log a + \varepsilon)$$

より問題の級数は $-\infty$ に発散する． □

9. $\sum(1 - \frac{1}{n}\log n)^n$

証明. まず $\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{x})^{-x} = e$ を確認しておく．
$f(n) = (1 - \frac{1}{n}\log n)^n$ とおくと

$$f(n) = \left\{(1 - \frac{\log n}{n})^{-\frac{n}{\log n}}\right\}^{\log n} \sim e^{logn} = n$$

故に発散する． □

10. $\sum\{n^p(n^{\frac{1}{n}} - 1)\}^{-1}$

証明. $\{n^{\frac{1}{n}} - 1\} \sim \frac{\log n}{n}$
$\{n^p(n^{\frac{1}{n}} - 1)\}^{-1} \sim \frac{1}{n^{p-1}\log n}$ □

11. $\sum(\frac{n}{n+1})^{n^2}$
12. $\sum \frac{n^q}{(n+1)^{p+q}} \quad (p, q > 0)$
13. $\sum \frac{a^n}{n!}n^{\frac{n}{2}} \quad (a > 0)$
14. $\sum\{n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\}^{-1}$
15. $\sum(\frac{n}{n+1})^{n^2}e^n$
16. $\sum(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!})^p$
17. $\sum \frac{(n!)^2}{5\cdot 9\cdot 15\cdots(n^2+n+3)}$

但し，$m!! = m(m-2)(m-4)\cdots 2$ または 1.

6.1.2　交代級数

例 6.1 にある級数（5），（6）(260 ページ) のように, 正数, 負数が交互に現れる級数を 交代級数とよぶ. これに関して次の定理がある.

定理 6.6. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を各項が正の単調減少数列で $a_n \to 0 (n \to \infty)$ とする. このとき交代級数

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots\cdots$$

は収束する.

証明. 条件から, 部分和 S_n に関し次が成り立つ:

$$0 < S_2 < S_4 < \cdots < S_{2n} < \cdots < S_{2n-1} < \cdots < S_3 < S_1 = a_1.$$

単調増加数列 $\{S_{2n}\}$ は上に有界なので収束して $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \underline{S}$.
同様にして $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \overline{S}$.　$\underline{S} \leqq \overline{S}$. そして

$$S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

なので

$$\underline{S} = \overline{S}$$

である. したがって $S = \underline{S} = \overline{S}$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

である. □

例 6.7. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots, \tag{6.6}$$

は収束する.

一般に級数の収束性が判っても, その和を求めるのは難しいことが多い.

例 6.8. 例（ *6.7*）の場合は

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots\cdots=\log 2$$

である. なぜなら部分和を考えると

$$\begin{aligned}
S_{2n}&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\
&\to\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\log 2\quad(n\to\infty)
\end{aligned}$$

例 6.9. 整数 $n \geqq 0$ に対し $T_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$ とおく. このとき, 次の *(1)*, *(2)*, *(3)* に答えよ.

1. T_0, T_1, T_2 を計算せよ.
2. $n \geqq 2$ に対し T_n+T_{n-2} を n を用いて表せ.
3. $U_k=(-1)^k T_{2k}$, $V_k=(-1)^k T_{2k+1}$ *(*$k=0,1,2,\ldots$*)* とお くとき, 整数 $m \geqq 1$ に対し以下の式が成り立つことを示せ.

$$U_m-U_0=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{2k-1},\qquad V_m-V_0=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{2k}.$$

4. $T_n \geqq T_{n+1}>0\quad(n=0,1,2,\cdots)$ を示せ.
   $\lim_{n\to\infty}T_n=0$, したがって $\lim_{m\to\infty}U_m=\lim_{m\to\infty}V_m=0$.
5. 項目 *2* を用いて以下の公式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1},\qquad \log 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

次の定理は殆んど自明の事と思われるが一応確認しておいた方が良いであろう.

定理 6.7. 級数 $\sum a_n$ が収束するとき,

(1) この級数に有限個の項を付け加えるか, または有限個の項を除去して出来る級数は, やはり収束する.

(2) λ を (n に関係しない) 定数とするとき $\sum \lambda a_n$ も収束し, $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$ が成り立つ.

(3) $\sum b_n$ が収束すれば $\sum(a_n + b_n)$ も収束し, $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ が成り立つ.

問 3. 定理 *6.7* を確かめよ.

次の定理は, 定理 1.6（16 ページ）を級数の部分和に適用したものである.

定理 6.8 (Cauchy の収束条件)**.** 級数 $\sum a_n$ が収束するための必要十分条件は,

任意の ε に対し自然数 N が存在して, N 以上のすべての $n \geqq m > N$ に対し

$$|a_m + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

が成り立つことである.

この定理から直ちにつぎの定理がいえる.

定理 6.9. 級数 $\sum a_n$ が収束するとき,$a_n \to 0 (n \to \infty)$ が成り立つ.

しかしながらこの逆は成り立たない.

簡単な例は既に項目 1（3 ページ）にあったけれどももう 1 つ例をあげておこう.

例 6.10. 級数 $\sum \frac{1}{n}$ の場合がそうである. なぜなら

任意の正整数 m について次の不等式が成り立つ.

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} > \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}.$$

定理 *6.9* において $\varepsilon = \frac{1}{2}$ としたときどんな N をとっても, その不等式が成り立っていないので $\sum \frac{1}{n}$ は発散する.

定理 *6.12*,*275* ページ $s = 1$ の場合を参照[*3]．

系 6.9.1. $\sum |a_n|$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する．

証明．不等式 $|a_{m+1} + \cdots + a_n| \leqq |a_{m+1}| + \cdots + |a_n|$ から解る． □

6.2 絶対収束と条件収束

級数 $\sum |a_n|$ が収束するとき, 級数 $\sum a_n$ は絶対収束するという．

例 6.11. 大体から正項級数が収束すればそれは絶対収束である．
級数（*6.6*）は収束するが絶対収束しない．

定理 6.10. 絶対収束級数は, 項の順番を変更しても絶対収束し, 和は変らない．

証明．(1) 初めに各 n に対し $a_n \geqq 0$ とし, $\sum a_n$ が収束すると仮定する．

$\sum_{i=1}^{n} a_i = A_n, \sum_{i=1}^{\infty} a_n = A$ とおく．$A_n \to A \quad (n \to \infty)$ である．$\sum a_n$ の項の順番を変更した級数を $\sum b_n$ とし, $\sum_{i=1}^{n} b_i = B_n$ とおく．$b_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ はいずれも a_j のどれかである．$b_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ に現れる a_j の最大番号を m とすると, 明らかに

$$B_n \leqq A_m \leqq A$$

したがって単調増加数列 B_n は収束する．その極限値 $B(= \sum_{i=1}^{\infty} b_n)$ は

$$B \leqq A$$

をみたす．
$\sum a_n$ と $\sum b_n$ の役割を交換すると, 同様に $A \leqq B$ が得られるので $A = B$ である．

[*3] 級数 $\sum \frac{1}{n}$ の発散性の証明は本書で何ヶ所あるだろうか？

(2) 一般の $\sum a_n$ を考える.$\sum |a_n|$ が収束するとする.

$$a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n) = \begin{cases} a_n & (a_n \geqq 0) \\ 0 & (a_n \leqq 0) \end{cases}$$

$$a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) = \begin{cases} 0 & (a_n \geqq 0) \\ -a_n & (a_n \leqq 0) \end{cases}$$

とおくと

$$0 \leqq a_n^+ \leqq |a_n|, 0 \leqq a_n^- \leqq |a_n|$$

$$a_n^+ + a_n^- = |a_n|, \qquad a_n^+ - a_n^- = a_n$$

が成り立っている. 定理 6.3 より $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ は収束し, 定理 6.7 より

$$\sum a_n^+ + \sum a_n^- = \sum |a_n|, \quad \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_n$$

となる. さて, $\sum a_n$ の項の順番を変更した級数を $\sum b_n$ とおく.(1) により $\sum |b_n|$ は収束し, $\sum |b_n| = \sum |a_n|$ である.$\sum b_n$ に対し上のように $\sum b_n^+$, $\sum b_n^-$ を作ると, それらはそれぞれ $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ の項の順番を変更したものとなり, (1) よりそれらは収束して

$$\sum b_n^+ = \sum a_n^+, \ \sum b_n^- = \sum a_n^-$$

となる. したがって (定理 6.7 より)$\sum b_n$ は収束して $\sum b_n = \sum b_n^+ - \sum b_n^- = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_n$ □

定理 6.11. $\sum a_n, \sum b_n$ を和がそれぞれ A, B である絶対収束級数とする. 両者の項 a_m, b_n をもれなく, 重複なく取り出してつくった積 $a_m b_n$ を任意の順序に並べて得られる級数 $\sum c_n$ は絶対収束で，$\sum c_n = AB$.

証明. 特に次のような順序で $a_m b_n$ を並べた $\sum c_n$ を考える:

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + \ldots\ldots$$

これは番号の組 (m,n) を次のページの図 6-2 の格子点とみて矢印の順に並べたもので

$$\sum_{i=1}^{n^2} c_i = (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$$

が成り立っている.

したがって, あたえられた n に対し $m^2 \geqq n$ となる m をとれば

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i| \leqq \sum_{i=1}^{m^2} |c_i| = (\sum_{i=1}^{m} |a_i|)(\sum_{i=1}^{m} |b_i|) \leqq AB$$

となり $\sum c_i$ は絶対収束する.(6.10) で $n \to \infty$ とすれば

$$\sum c_n = AB$$

が得られる.

したがって, 定理 6.9 より, いかなる順序で $a_m b_n$ を一列に並べた $\sum c_n$ をつ くろうとも絶対収束で, 和は AB である. □

系 6.11.1. 級数 $\sum a_n, \sum b_n$ が絶対収束し, 和がそれぞれ A, B とする.

$$d_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$$

とおくと, $\sum d_n$ は絶対収束し, 和は AB に等しい.

証明. 番号の組 (m,n) を次のページの図 6-3 の格子点とみて矢印の順に一列に並べたものを考え, それにより定理の級数 $\sum c_n$ をつくる.

このとき

$$d_n = c_{\frac{n(n-1)}{2}+1} + \ldots + c_{\frac{n(n+1)}{2}},$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{j=1}^{n(n+1)/2} c_j, \sum_{i=1}^{n} |d_i| \leqq \sum_{j=1}^{n(n+1)/2} |c_j| \leqq AB.$$

したがって, $\sum d_n$ は絶対収束する.

また $n \to \infty$ とすると,

$$\sum d_n = \sum c_n = AB.$$

□

例 6.12.　$|x| < 1$ のとき等比級数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

は絶対収束である.

$$1 \cdot x^{n-1} + x \cdot x^{n-2} + \cdots + x^{n-1} \cdot 1 = nx^{n-1}$$

ゆえ, 定理 *6.10* の系より

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \ldots$$

は $|x| < 1$ のとき絶対収束し, 和は $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ に等しい.

次は $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1000}$ をコンピュータで求めるプログラムである.

```
   real sum
sum=0.0
     do 20 n=1,1000
sum=sum+1.0/n
 20   continue
      write(6,*)' 総和=',sum
      stop
      end
```

compile して実行してみると

$$総和= 7.48547077$$

と出力される.[a] いろいろな級数例で実験されてみることをお奨めします.

[a] Fortran とよばれる計算 compiler 言語.

♣◇6.2 節の演習問題 ♣◇

1. 正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ に対し正定数 M があって

$$\frac{a_n}{b_n} \leqq M \quad n=1,2,\cdots$$

とする. このとき次を示せ.

(1) $\sum b_n$ が収束するならば $\sum a_n$ も収束する.

(2) $\sum a_n$ が発散するならば $\sum b_n$ も発散する.

2. 正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ に対し

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqq \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad (n=1,2,\cdots)$$

が成り立つとする. このとき次を示せ.

(1) $\sum b_n$ が収束するならば $\sum a_n$ も収束する.

(2) $\sum a_n$ が発散するならば $\sum b_n$ も発散する.

(ヒント:問題 **3** を用いる.)

3. 定理 6.5(d'Alembert[*4]の判定法) を証明せよ.

4. 次の正項級数の収束, 発散を判定せよ.

(1) $\sum \dfrac{1}{n^2+1}$ (第 n 項が $\dfrac{1}{n^2+1}$ である級数), 以下同様

(2) $\sum \dfrac{1}{\log(n+1)}$　(3) $\sum \dfrac{1}{(2n-1)^2}$

(4) $\sum \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$　(5) $\sum \dfrac{\log(n+1)}{(n+1)^s}$ $(s>0)$

(8) $\sum \dfrac{n^s}{n!}$ $(s>0)$　(9) $\sum \dfrac{1}{n}\log(1+\dfrac{1}{n})$

(10) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$

5. 次の級数は収束か発散か. 収束のときは絶対収束か否か判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$　(2) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$

(3) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$　(4) $\displaystyle\sum n\sin\frac{1}{n}$

6. 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+\cdots+n^4)$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

7. 定理 6.10 の逆が成り立つ. すなわち級数 $\sum a_n$ で項の順番の任意の変更でも収束していれば級数 $\sum a_n$ は絶対収束である.

[*4] ダランベール, フランス (1717-1783)

6.3　関数項級数

定理 6.12. 級数

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots \tag{6.7}$$

は, $s > 1$ のとき収束し, $s \leqq 1$ のとき発散する.

証明. $s \leqq 0$ のときは式 (6.7) は明らかに発散する.$s > 0$ とする. 式 (6.7) の部分和 S_n の例 S_n は単調増加数列なので, 上に有界なら収束し, さもなければ発散する.$f(x) = x^{-s}$ のグラフを描く (図 6-1).
図 6-1 の小長方形の和とグラフで囲まれた図形の面積を比較することにより

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^s} < S_n < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^s}.$$

しかるに

$$\int_1^n \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1-n^{1-s}}{s-1} & (s \neq 1) \\ \log n & (s = 1) \end{cases}$$

ゆえ, 級数 (6.9) は $s > 1$ ならば収束し, $s \leqq 1$ ならば発散する. □

上の定理の証明と同様の方法で次の定理が証明される. この形は単純ではあるけれど良く応用される.

定理 6.13. $f(x)$ を $[1, +\infty)$ で連続でつねに正値をとり, 単調減少関数とする. このとき級数

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots\cdots$$

と広義積分

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

は収束, 発散が一致する.

証明. $f(x)$ の仮定から次の不等式がある.

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < S_n < f(1) + \int_1^n f(x)dx$$

同様な議論で解る. □

例 6.13. *(6)* $\sum \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^s}$ $(s > 0)$

(7) $\sum \frac{1}{(n+1)^s \log(n+1)}$ $(s > 0)$

6.3.1 関数項数列

$$\begin{aligned}
&1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, \cdots \\
&1, 1+x, 1+x+x^2, \cdots, 1+x+\cdots+x^{n-1} \cdots \\
&x, -\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3, \cdots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, \cdots \\
&\sin x, \frac{1}{3^2}\sin 3x, \frac{1}{5^2}\sin 5x, \cdots, \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \cdots
\end{aligned} \tag{6.8}$$

のように, 各項が関数である数列を 関数列とよぶ.

一般に関数列

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots \qquad (\{f_n(x)\} \text{ とも書く}) \tag{6.9}$$

に対し, 点 x を固定するとき数列 $f_n(x)$ が収束するならば, 関数列 $\{f_n(x)\}$ は点 x で収束する といい, さもなければ 点 x で発散するという.

$\{f_n(x)\}$ が収束する点 x での極限値

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

は (収束する点 x の集合上の) 関数と考えられる. これを**極限関数**とよぶ.

例えば, 関数列 (6.12) は (-1, 1) の各点で収束し, 極限関数は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1)$$

である. また, 関数列 (6.13) ($|x| \leqq 1$) , (6.14) の極限関数は 0 (定数関数) である.

I を開区間または閉区間または半開区間とする.I 上で定義された関数の関数列 $f_n(x)$ が I の各点で収束するとし, その極限関数を $f(x)$ とする.

定義　I 上の関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に I **で** (または I **上**) **一様収束する**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し自然数 N が存在して, すべての $n \geqq N$ と, I のすべての点 x に対し

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (n = N, N+1, \cdots)$$

となることである.

注意　この定義で大切な点は I のすべての点 x に対し N が共通にとれるという点である.

例えば, 関数列 (6.14) は ($|\cos x| \leqq 1$ ゆえ) 定数関数 0 に $(-\infty, \infty)$ 上一様収束する. (6.13) は定数関数 0 に閉区間 [-1, 1] 上一様収束する.

定理 6.14. 区間 I 上の連続関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に I で一様収束するならば, $f(x)$ は I 上の連続関数である.

証明. 仮定より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し N が存在して, $n \geqq N$ と I の各点 x に対し

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (n = N, N+1, \cdots)$$

となる. $n (n \geqq N)$ を 1 つとり固定する. $f_n(x)$ の連続性より, I の各点 a に対し $\delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta$ となるすべての I の点 x に対し

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ. したがって, $|x - a| < \delta$ となるすべての I の点 x に対し

$$|f(x) - f(a)| \leqq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < 3\varepsilon$$

が成り立つ. それゆえ $f(x)$ は連続関数である. □

一様収束性がないと, 極限関数の連続性は保証されない.

例 6.14. 閉区間 $[0,1]$ 上の関数列 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数は

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

となり, これは不連続関数である.

$\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0,1]$ 上一様収束でない. 実際, $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ をあたえると, どんな自然数 N をとっても, *1* に十分近い x をとれば $x^N \geqq \varepsilon$ となるからである. 一方, $0<a<1$ とすると x^{n-1} は閉区間 $[0,a]$ 上一様収束する. なぜなら, $\varepsilon>0$ をあたえると, N を $a^N<\varepsilon$ となるよう十分大きくとれるからである.

例 6.15. 閉区間 $(-1,1)$ 上の関数列 $\left\{\dfrac{1-x^n}{1-x}\right\}$ は $(-1,1)$ で, 一様収束でない. なぜなら, $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ と自然数 N をあたえるとき,

$$N\log x - \log(1-x) \geqq \log\varepsilon$$

が成り立つような *1* に十分近い $x(x<1)$ をとれば $|\frac{1-x^n}{1-x}-\frac{1}{1-x}| = |\frac{x^N}{1-x}| \geqq \varepsilon$ となるからである.

しかし, $-1<a<b<1$ となる任意の a,b をとると,$[a,b]$ で一様収束することが例 *6.4* と同様の議論でわかる. この場合, 関数列 $\left\{\dfrac{1-x^n}{1-x}\right\}$ は $(-1,1)$ で, 広義一様収束するという.

定義　閉区間 (a,b) 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が **(a, b) で** (または (a,b) 上)$f(x)$ に**広義一様収束する**とは, $a<p<q<b$ となる任意の p,q に対し閉区間 $[p,q]$ で $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束することである.

このとき, 定理 6, 11 より, もし $\{f_n(x)\}$ が連続関数列ならば $f(x)$ は $[p,q]$ 上連続関数となる.p,q は任意ゆえ,

定理 6.15. 開区間 (a,b) 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に (a,b) 上広義一様収束するならば, $f(x)$ は (a,b) で連続である.

定理 6.16. 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上一様収束

するならば, 関数列 $\left\{\int_a^x f_n(t)dt\right\}$ は $\int_a^x f(t)dt$ に $[a,b]$ 上一様収束する:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt.$$

(積分と極限の順序交換可能).

証明. $f_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$
とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し N があって, $n \geqq N$ と $[a,b]$ の各点 t に対し

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad n = N, N+1, \cdots$$

ゆえ

$$|f_n(x) - F(x)| \leqq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt < \varepsilon(x-a) \leqq \varepsilon(b-a).$$

これは $\{f_n(x)\}$ が $[a,b]$ 上 $F(x)$ に一様収束することを示している. □

例 6.16. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ とおくと閉区間 $[0,1]$ 上 $\{f_n(x)\}$ の極限関数は 0（定数関数）である.

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \left[\frac{-1}{2}e^{-nx^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n})$$

ゆえ

$$0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx, \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$$

したがって, 定理 *6.16* より $[0,1]$ 上一様収束ではない.

定理 6.16 の証明と同様の方法で次が示される:

定理 6.17. 開区間 *(a, b)* 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に上広義一様収束するとする.$a < c < b$ となる c を任意にとり固定すると, 関数列 $\int_c^x f_n(t)dt$ は $\int_c^x f(t)dt$ に (a,b) 上広義一様収束する.

6.3.2　関数項級数

例えば, 関数項級数 (6.16) は開区間 (-1, 1) の各点 x で収束し, 和は

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

である. $|x| \geqq 1$ となる x では発散する.

関数項級数 (6.19) の各 $f_n(x)$ が区間 I 上の関数で, 部分和の列 $S_n(x)$ が I 上 $S_n(x)$ に一様収束するとき, (6.19) は I **上一様収束する**という. また, 各 $f_n(x)$ が開区間 (a, b) 上の関数で, 部分和の列 $S_n(x)$ が (a, b) 上 $S_n(x)$ に広義一様収束するとき, (6.19) は **(a, b) 上広義一様収束する**という.

例えば, 関数項級数 (6.16) は, 部分和の列が $\{\frac{1-x^n}{1-x}\}$ で (6.12) と一致する. したがって (6.16) は開区間 (-1, 1) で広義一様収束する (例 6.5 参照).

例 6.17. *3.8.3* 節 *118* ページより

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(s)}{n^s} &= \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx \quad (n=1,2,\cdots), \\
\Gamma(s)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx, \\
\Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx. \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

式 (6.10) の右辺の積分を複素積分でとらえ直すと関数等式[*5]が得られる.

定理 6.11(6.11') ∼ 6.13(6.13') より次の 3 定理が導かれる:

定理 6.18. *各 $f_n(x)$ が区間 I 上 (または開区間 (a,b) 上) 連続関数である関数項級数 $\sum f_n(x)$ が I 上 (または (a,b) 上) 一様収束する (または広義一様収束する) ならば, 和 $S(x)$ は連続関数である.*

[*5] Riemann のゼータ関数

定理 6.19. 各 $f_n(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上 *(* または (a,b) 上 *)* 連続関数である関数項級数 $\sum f_n(x)$ が $[a,b]$ 上 *(* または (a,b) 上 *)* 一様収束する *(* または広義一様収束する *)* ならば,

$$\int_c^x f_1(t)dt + \int_c^x f_2(t)dt + \cdots + \int_c^x f_n(t)dt + \cdots\cdots$$

は $\int_c^x S(t)dt$ に $[a,b]$ 上一様収束する *(* または (a,b) 上広義一様収束する *)*. ここに c は $a \leqq c \leqq b$ *(* または $a < c < b$ *)* である固定点で, $S(x)$ は $\sum f_n(x)$ の和である*:*

$$\int_c^x (\sum f_n(t))dt = \sum \int_c^x f_n(t)dt$$

(項別積分可能).

例 6.18. $\sum x^{n-1}$ は開区間 *(-1, 1)* において広義一様収束し, 和は $\frac{1}{1-x}$ である. 項別積分すると

$$\begin{aligned} -\log(1-x) &= \int_0^x \frac{dx}{1-x} \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots, \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

(右辺は広義一様収束 *)*. x を $-x$ でかえて両辺の符号をかえると

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \cdots, \quad (|x| < 1)$$

(右辺は広義一様収束 *)*.

例 6.19.

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots, \quad |x| < 1. \tag{6.11}$$

証明.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots, \quad |x| < 1$$

右辺の級数は $(0,1)$ で広義一様収束しているので項別積分して

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x 1dx - \int_0^x x^2dx + \int_0^x x^4dx - \cdots, \quad |x| < 1,$$

となる. 求める式（6.11）が得られる. もっとも例 2.20（53 ページ）を使って Maclaurin 展開からも同じ展開を得る. □

定理 6.20. 各 $f_n(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上 *(*または (a,b) 上*)* の C^1 -関数である関数項級数 $\sum f_n(x)$ が $[a,b]$ 上 *(*または (a,b) 上*)* 収束するとし, 和を $S(x)$ とおく. さらに, $\sum f_n'(x)$ が $[a,b]$ 上一様収束 *(*または (a,b) 上広義一様収束*)* するとし, 和を $T(x)$ とおく. このとき,

1. $\sum f_n(x)$ も $[a,b]$ 上一様収束 *(*または (a,b) 上広義一様収束*)* し,
2. 和 $S(x)$ は C^1-関数となり,
3. $S'(x) = T(x)$ となる*:*

$$\frac{d}{dx}\sum f_n(x) = \sum \frac{df_n}{dx}$$

*(*項別積分可能*)*

定理 6.14 は次のように書きかえられる:

定理 6.21. 各 $f_n(x)$ が区間 I 上の関数である関数項級数 $\sum f_n(x)$ が I 上で一様収束するための必要十分条件は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in I$$

となることである.

一様収束性を判定するために, 次がしばしば用いられる.

定理 6.22 (Weierstrass の M-判定法)**.** 正項級数 $\sum a_n$ が収束するとする. 各 $f_n(x)$ が区間 I でつねに

$$|f_n(x)| \leqq a_n$$

をみたすならば, 関数項級数 $\sum f_n(x)$ は I 上一様絶対収束する.

証明. $\sum a_n$ が収束するので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し N があって, $n > m \geqq N$ となる n, m と I の各点 x に対し

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leqq |f_{m+1}(x)| + \cdots + |f_n(x)| \leqq a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon$$

が成り立つ. 前定理より $\sum f_n(x)$ は I 上一様絶対収束する. また $\sum |f_n(x)|$ も収束するので $\sum f_n(x)$ は絶対収束する. □

例 6.20. （*6.8*）の関数項級数 $\sum \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ は,

$$\sum \left| \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right| \leqq \frac{1}{(2n-1)^2}$$

かつ $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$ は収束なので M-判定法より $(-\infty, \infty)$ で一様絶対収束する.

一般に

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots\cdots$$

という形の関数項級数を **Fourier**[*6]**級数** とよぶ, これは数理物理で非常に重要である. 収束する Fourier 級数は関数を表すが, 逆に「あたえられた関数を Fourier 級数で表すことが出来るか (**Fourier 展開** 可能か)」は, 難しい (しかし重要な) 問題である. 証明は省略するが次の定理が知られている.

定理 6.23. 2π を周期とする（すなわち $f(x + 2\pi = f(x))$ をみたす*)* C^1-関数 $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で一様絶対収束する *Fourier* 級数に展開できる*:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

各係数はただ一通りに定まりつぎであたえられる*:*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

[*6] フーリエ, フランス (1768-1830)

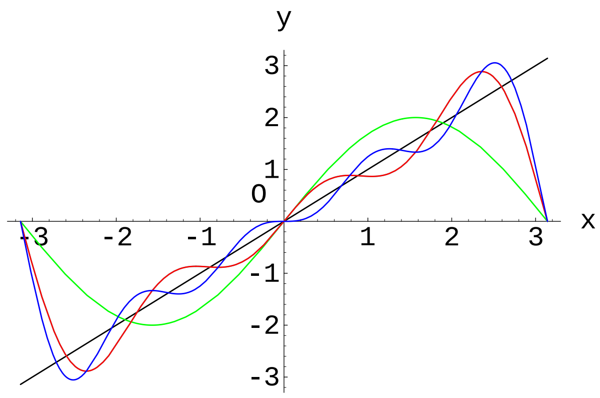

図 6.2 $y = x$ の Fourier 展開のグラフ

例 6.21. 関数 x の *Fourier* 展開は

$$x = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots$$

である. 図 *6.2* 参照.

例 6.22. $\sum x^{n-1}$ は開区間 *(-1, 1)* で広義一様収束し, 和は $\frac{1}{1-x}$ である. 項別微分した関数項級数は

$$\sum nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots\cdots$$

である.$0 < a < 1$ とすると例 *6.3* より

$$1 + 2a + 3a^2 + \cdots + na^{n-1} + \cdots\cdots$$

は収束するので, $\sum nx^{n-1}$ は M-判定法より $|x| \leqq a$ で一様収束する. $a < 1$ は任意ゆえ, $|x| < a$ で広義一様収束する. それゆえ定理 *6.17* より

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots\cdots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (|x| < 1)$$

となり, 例 *6.3* の結果が再認識される.

例 6.23. 関数 $L_m(x)$ を帰納的に次のように定義する.
$L_0(x) = x, L_m(x) = \log L_{m-1}(x) \quad (m = 1, 2, \cdots)$.

例えば $L_1(x) = \log x, L_2(x) = \log\log x, \cdots$ となる.
対数関数の真数は正でなければならないから $L_m(x)$ の定義域は

$$x > e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}\text{（文字 } e \text{ は } m\text{-}1 \text{ 個ある）}$$

である. p を正定数として

$$f(x) = L_0(x)L_1(x)\cdots L_{k-1}(x)L_k(x)^p$$

とする. $a_n = \frac{1}{f(n)} \quad (k \geqq 0) \quad (n = 1, 2, \cdots)$ として級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を考えよう.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

においては $p > 0$ とすると

$$f(x) = \frac{1}{L_0(x)L_1(x)\cdots L_{k-1}(x)L_k(x)^p}$$

とおけば, $f(x)$ はある正数 m をとると $x \geqq m$ においては単調増加である.
ところが

$$\frac{d}{dx}L_k(x)^{1-p} = \frac{1-p}{L_0(x)L_1(x)\cdots L_{k-1}(x)L_k(x)^p}$$

$$\frac{d}{dx}L_{k+1}(x) = \frac{1}{L_0(x)L_1(x)\cdots L_{k-1}(x)L_k(x)}$$

故に

$$\int_m^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} \left[\frac{L_k(x)^{1-p}}{1-p}\right]_m^{\infty} & (p \neq 1) \\ \left[L_{k+1}(x)\right]_m^{\infty} & (p = 1) \end{cases}$$

故に級数 $\sum a_n$ は $p > 1$ のとき収束する.$0 < p \leqq 1$ のとき発散する.

♣◇6.3 節の演習問題 ♣◇

1. 次の関数列の一様収束性, 広義一様収束性を調べよ.
   (1) $\{nx(1-x)^n\}$　　　$(0 \leqq x \leqq 1)$
   (2) $\left\{\frac{nx}{nx+1}\right\}$
   (3) $\left\{\frac{1}{(1+x^2)^n}\right\}$
   (4) $\left\{\frac{x^n}{(1+x^2)^n}\right\}$
   (5) $\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$
   (6) $\left\{(n^a xe^{-nx^2}\right\}$　　　$(a > 0)$
2. 次の関数項級数の一様収束性, 広義一様収束性を調べよ.
   (1) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}x^n$　　　$(|x| \leqq 1)$
   (2) $\sum xe^{-nx}$　　　$(0 \leqq x \leqq 1)$
   (3) $\sum xe^{-nx}$　　　$(x > 0)$
   (4) $\sum \frac{1}{x^2+n^2}$
   (5) $\sum a^n \cos nx$　　　$(|a| < 1)$
   (6) $\sum \frac{x^2 \sin nx}{n^2}$
3. 次の級数は, どの区間で広義一様収束するか.
   (1) $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+x^2} + \cdots + \dfrac{1}{1+x^n} + \cdots$　　　$(x > 0)$
   (2) $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{x}{1+x^2} + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{1+x^n} + \cdots$　　　$(x > 0)$
4. 閉区間 $[a, b]$ で連続関数 $f_n(x)$ が,

$$0 \leqq f_{n+1}(x) \leqq f_n(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

   をみたすとする.
   正項級数 $\sum a_n$ が収束するならば, $\sum a_n f_n(x)$ は $[a, b]$ 上一様収束することを示せ.
5. 級数 $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sin nx$　$(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ について次を示せ.
   (1) 区間 $[-\pi, \pi]$ で一様収束する.
   (2) $x = \pi$ で項別微分可能ではない.

6. (1) 有限総和

$$S_n = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}, \quad (x \neq 1)$$

とするとき

$$S_n = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-x^{2^n-1}}{1-x^{2^n}},$$

であることを数学的帰納法で証明せよ.

(2) 関数項級数

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}} + \cdots \qquad (x \neq 1)$$

は収束し, その和は

$$|x| < 1 \text{ ならば } \frac{x}{1-x}, \qquad |x| > 1 \text{ ならば } \frac{x}{x-1}$$

であることを示せ. また, これは広義一様収束か.

6.4　巾級数

c を定数とし, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ があるとする. このとき関数項級数

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

を, c を中心とする**巾 (べき) 級数**と呼ぶ. 初項 a_0 を**定数項**, 第 $n+1$ 項 a_n を n **次の項**とよび

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad \text{または} \quad \sum a_n(x-c)^n$$

と略記する.($n=0$ から始まることに注意する.)

以下の議論では, 簡単のため $c=0$ の場合を取り扱うが, $c \neq 0$ でも同様である.

($c=0$ 中心の) 巾級数

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \tag{6.12}$$

において，この巾級数が収束するような点 x の集合を，この級数の**収束域**と呼ぶ.

巾級数の概念は定理 2.11(67 ページ) でも出てきていた. そこでは多くの特別な場合ではあるが古典的に大切な関数が巾級数展開されていた．もう一回書けば

例 6.24.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{6.13}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{6.14}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{6.15}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots , \quad (-1 < x < 1)$$

定理 6.24 (Abel)**.** 巾級数（*6.12*）が点 $x = t(\neq 0)$ で収束すれば，（*6.12*）は開区間 $(-|t|, |t|)$ で広義一様収束する.

証明. $0 < r < |t|$ となる r を任意にとるとき, 式 (6.12) が閉区間 $[-r, r]$ で一様絶対収束することを示せばよい. 式 (6.12) で点 $x = t$ で収束するので, (n に無関係な) 正定数 M が存在して

$$|a_n t^n| \leqq M \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ (定理 6.9). したがって $|x| \leqq r$ のとき

$$|a_n x^n| \leqq |a_n r^n| = |a_n t^n| \left(\frac{r}{|t|}\right)^n \leqq M| \left(\frac{r}{|t|}\right)^n (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

数列

$$\left\{ M \left(\frac{r}{|t|}\right)^n \right\}$$

は等比級数で ($r < |t|$ なので) 収束する. したがって, Weierstrass の M-判定法 (定理 6.22) より, 級数（6.12）は閉区間 $[-r, r]$ で一様絶対収束する. □

級数（6.12）は $t_1 > t_2 > 0, x = t_1$ で収束すれば $x = t_2$ でも収束する. および $s_1 > s_2 > 0, x = s_2$ で発散すれば $x = s_2$ でも発散する，ということになった.

この定理より, 巾級数（6.12）の収束域は, 区間

$$[-R, R],\ \text{または}\ (-R, R),\ \text{または}\ (-R, R],\ \text{または}\ [-R, R)$$

の形をしていることがわかる.(この区間に含まれない各点で発散する.) この R を巾級数（6.12）の**収束半径**とよぶ.$R = 0$, $R = +\infty$ のこともありうる.

巾級数（6.12）は $(-R, R)$ で広義一様絶対収束する.

例 6.25. 例 *6.24* において式（*6.13*), 式（*6.14*), 式（*6.15*）ではいずれの場合も $R = \infty$ である.

例 6.26. 巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{n!} x^{2n+1}$$

の収束域を考えてみよう.

証明.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{n!} x^{2n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

とおくと

$$a_m = \begin{cases} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} & m = 2n+1\ \text{のとき} \\ 0 & m = 2n\ \text{のとき} \end{cases}$$

である.$m = 2n + 1$ のとき

$$\log\left\{\frac{(2n!)}{n!}\right\}^{\frac{1}{m}} = \log n \cdot \frac{n}{2n+1} + \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log(1 + \frac{k}{n}).$$

第 1 項は $\log n$ と共に ∞ にゆく. 第 2 項は $\frac{1}{2}\int_1^2 \log x dx$ に近づく.
故に数列 $\left\{\sqrt[m]{|a_m|}\right\}$ の部分列 $\left\{\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}\right\}$ は $n \to \infty$ のとき $+\infty$ にゆく.
$\therefore \overline{\lim}_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \infty.$ 　 $\therefore R = 0.$ □

定理 6.25. 巾級数

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

において,

1. *$n \to \infty$ のとき数列 $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ が実数 A に収束するならば収束半径 R は $R = \frac{1}{A}$ であたえられる.*
2. *$n \to \infty$ のとき数列 $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$ が実数 A に収束するならばの収束半径 R は $R = \frac{1}{A}$ あたえられる.*

証明. (i) を示す.

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| \to A|x| \qquad (n \to \infty)$$

である.Cauchy の判定法 (定理 6.4) より, $A|x| < 1$ すなわち $|x| < \frac{1}{A}$ ならば $\sum |a_n x^n|$ は収束する. また $A|x| > 1$ すなわち $|x| > \frac{1}{A}$ ならば $\sum |a_n x^n|$ は発散する
したがって Abel の定理 (定理 6.20) より, $\sum a_n x^n$ の収束半径は $\frac{1}{A}$ である.
(ii) も d'Alembert の判定法 (定理 6.5) を用いて同様に証明できる. □

例 6.27. *1.* $1 + 1!x + 2!x^2 + \cdots + n!x^n + \cdots\cdots$ の収束半径は $\frac{n+1)!}{n!} = n + 1 \to +\infty)(n \to \infty)$ であるから 0 である.

2. $1 + \dfrac{1}{1!}x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots\cdots$ の収束半径は $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)} \to 0(n \to \infty)$ ゆえ*)*$+\infty$ である.

3. $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots\cdots$
の収束半径は ($\frac{n+2}{n+1} \to 1(n \to \infty)$ ゆえ*) 1* である.

4. $1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \cdots + \frac{x^n}{n^n} + \cdots\cdots$
の収束半径は ($\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0$) ゆえ*)* $+\infty$ である.

注意

(証明は省略するが) 一般に巾級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径 R は

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

であたえられる (Cauchy-Hadamard の定理). ここに

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$$

とは,
(i) A より大きい $A+\varepsilon$ をとると, 自然数 N が存在して, すべての $n \geqq N$ に対し $\sqrt[n]{|a_n|} < A+\varepsilon$ が成り 立ち,
(ii) A より小さい $A-\varepsilon$ をとると $A-\varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|}$ となる n が無数にある
という 2 条件をみたす数 A のことである. この数 A を数列 $\sqrt[n]{|a_n|}$ の上極限とよぶ.

さて, 巾級数

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots\cdots$$

は区間 (-1, 1] を収束域とし, 閉区間 (-1, 1) で広義一様収束して和は $\log(1+x)$ である (例 6.7):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots\cdots = \log(1+x) \qquad (|x| < 1)$$

ところがこの等式は $x=1$ でも成立する (例 6.2). 一般に次が成り立つ:

定理 6.26 (Abel の第 2 定理)**.** $\sum a_n x^n = f(x)$ の収束半径を R ($R \neq 0, R \neq +\infty$) とする. もし $x=R$ (または $x=-R$) でこの巾級数が収束するならば, $f(x)$ は $x=R$ (または $x=-R$) においても連続である. すなわち

$$\lim_{x\to R-0} f(x) = f(R) = \sum a_n R^n$$

$$(\text{または} \lim_{x\to R+0} f(x) = f(-R) = \sum a_n (-R)^n).$$

証明. (1) まず $R=1$ と仮定し, $\sum a_n$ が収束すると仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し自然数 N が存在して, 任意の $n \geqq N$ と任意の自然数 p に対し

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

が成り立つ.

$$b_p = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \qquad (\text{したがって } |b_p| < \varepsilon)$$

とおくと $a_{n+p} = b_p - b_{p-1}$ なので, $0 \leqq x \leqq 1$ となる x に対し

$$\begin{aligned} |\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i x^i| &= |b_1 x^{n+1} + (b_2 - b_1)x^{n+2} + \cdots + (b_p - b_{p-1})x^{n+p}| \\ &= x^n |b_1(x - x^2) + b_2(x^2 - x^3) + \cdots + b_{p-1}(x^{p-1} - x^p) + b_p x^p| \\ &\leqq x^n |b_1|(x - x^2) + |b_2|(x^2 - x^3) + \cdots + |b_{p-1}|(x^{p-1} - x^p) + |b_p| x^p \\ &< \varepsilon x^{n+1} \leqq \varepsilon \end{aligned}$$

この式は, 定理 6.18 より, , $\sum a_n x^n$ が閉区間 [0, 1] 上一様収束することを示している. それゆえ, 定理 6.15 より $f(x)$ は $[0, 1]$ 上 連続である. すなわち

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1) = \sum a_n.$$

(2)　一般の場合. $x = Rt$ (または $x = -Rt$) とおくと,

$$\sum a_n x^n = \sum (a_n R^n) t^n \qquad (\text{または} = \sum (a^n (-R)^n) t^n)$$

は t に関する巾級数として収束半径が 1 で, $t = 1$ のとき収束するので, (1) の場合より

$$\lim_{x \to R-0} f(x) = \lim_{t \to 1-0} \sum (a_n R^n) t^n = \sum a_n R^n = f(R)$$

$$(\text{または} \lim_{x \to R+0} f(x) = \lim_{t \to 1-0} \sum (a_n (-R)^n) t^n = \sum a_n (-R)^n = f(-R)).$$

□

定理 6.27 (一致の定理)**.** *2 つの巾級数 $f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n$ が開区間 $(-r, r)$ でともに広義一様収束するとする.$x_\nu \neq 0 (-r < x_\nu < r)$ かつ $x_\nu \to 0 (\nu \to \infty)$ となる点列 $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ において $f(x_\nu) = g(x_\nu) (\nu = 1, 2, \cdots)$ をみたすならば, 2 つの巾級数は一致する:*
$a_n = b_n (n = 0, 1, 2, \cdots).$

証明. $f(x), g(x)$ は C^∞-関数である. 特に連続だから

$$a_0 = f(0) = \lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} g(x_\nu) = g(0) = b_0.$$

数学的帰納法で証明するため, いま $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \cdots, a_{n-1} = b_{n-1}$ が成立したとする. このとき 2 つの巾級数

$$a_n + a_{n+1}x + a_{n+2}x^2 + \cdots = (f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i)\frac{1}{x^n},$$

$$b_n + b_{n+1}x + b_{n+2}x^2 + \cdots = (g(x) - \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i)\frac{1}{x^n}$$

はそれぞれ $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ と同じ収束半径をもつ (定理 6.7) のでともに $(-r, r)$ で広義一様収束するが, 仮定により各点 x_ν で和が一致する. したがって, 上と同じ論法で $a_n = b_n$ が得られる. かくして, すべての n に対し $a_n = b_n$ が成り立つ. □

巾級数の収束半径を R とすると, 和は開区間 $(-R, R)$ で C^∞-関数を表す. いろいろな C^∞-関数を巾級数で表すことができる.

しかし, 巾級数で表せない C^∞-関数も存在する (問題 6.3, **5** 参照).

いま, C^∞-関数 $f(x)$ が点 b を中心とする巾級数で表されたとする:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \cdots + a_n(x-b)^n + \cdots. \tag{6.16}$$

このとき, まず $x = b$ とおいて

$$a_0 = f(b)$$

が得られる. 次に (6.33) を項別微分すると

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-b) + 3a_3(x-b)^2 + \cdots.$$

ここで $x = b$ とおけば

$$a_1 = f'(b)$$

が得られる. さらに (6.34) を項別微分すると

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-b) + 12a_4(x-b)^2 + \cdots.$$

ここで $x = b$ とおけば

$$a^2 = \frac{f''(b)}{2}$$

が得られる. 以下同様にして

$$a_n = \frac{f^{(n)}}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が得られる. すなわち (6.33) の各 a_n は $f(x)$ に対しただ一通りに定まり, (6.36) であたえられる.(6.36) を (6.33) に代入すると

$$f(x) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n + \cdots . \quad (6.17)$$

これを $f(x)$ の, 点 b 中心の **巾級数展開**または **テイラ-展開**とよぶ.(特に $b = 0$ のときは **マクロ-リン展開**ともよぶ.)

定理 6.28. $f(x)$ が閉区間 $[b-r, b+r]$ 上の C^∞-関数とする. もし,
自然数 N と, $[b-r, b+r]$ 上で正値をとる連続関数 $h(x)$ が存在して,
つねに

$$|f^{(n)}(x)| \leqq h(x) \quad (n \geqq N, |x-b| \leqq r)$$

が成り立つならば, $f(x)$ は $[b-r, b+r]$ で, 点 b 中心にテイラ-展開できる.

定理 6.29. x を $[b-r, b+r]$ の点として固定する. 定理 *2.13(テイラ-の定理)* より, 各 n に対し $0 < \theta_n < 1$ となる θ_n が存在して

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1} \\ + \frac{f^{(n)}(b + \theta_n(x-b))}{n!}(x-b)^n$$

と書ける．$M(x)$ を $[b-|x-b|, b+|x-b|]$ における $h(t)$ の最大値とすると, $n \leqq N$ のとき

$$|f(x)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(b)}{i!}(x-b)^i| = \frac{|f^{(n)}(b+\theta_n(x-b))|}{n!}|x-b|^n$$
$$\leqq \frac{h(b+\theta_n(x-b))}{n!}|x-b|^n$$
$$\leqq \frac{M(x)}{n!}|x-b|^n$$

となる. ここで $n \to \infty$ とすると右辺は $\to 0$ ゆえ, 左辺も $\to 0$ となる. すなわち級数

$$\sum \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$$

は収束して, 和は $f(x)$ である.

例 6.12 いくつかの関数を $b=0$ 中心にテイラ-展開してみよう.

(i) $f(x)=e^x(-\infty<x<+\infty)$ の場合.

$(e^x)^{(n)}=e^x$ ゆえ, r は任意の正数, $N=0$, $h(x)=e^x$ が定理 6.25 の条件をみたす. したがって,

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\cdots .$$

これは $(-\infty,\infty)$ で成り立つ.(右辺の巾級数の収束半径は $+\infty$ である.)

(ii) $f(x)=\cos x(-\infty<x<+\infty)$ の場合.

$|(\cos x)^{(n)}| \leqq 1$ ゆえ, r は任意の正数, $N=0, h(x)=1$ (定数関数) が定理 6.25 の条件をみたす. したがって,

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\cdots .$$

(iii) 同様に,

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots\cdots .$$

(6.39) も (6.40) も $(-\infty,\infty)$ で成り立つ (収束半径はともに $+\infty$).

(iv) 次に, a を定数とするとき, 関数 $f(x)=(1+x)^a$ の $b=0$ 中心のテイラー展開は次であたえられる:

(**ニュ-トンの二項定理**)

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots$$

*7 これを示すには (定理 6.25 がうまく使えないので) 次のように行う: まず, (6.41) の右辺の巾級数の収束半径は, α が 0 か自然数のときは $+\infty$ で, α がそれ以外のときは 1 である (定理 6.22(2)). したがって $|x|<1$ で和は C^∞-関数を表す. これを $g(x)$ とおく.

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x) &= \sum (n+1)\binom{\alpha}{n+1}(1+x)x^n \\ &= \sum\{(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\}x^n \\ &= \sum \alpha\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha g(x).\end{aligned}$$

一方, $f(x)=(1+x)^\alpha$ も

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

をみたすので, $|x|<1$ で

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{g^{'}(x)f(x)-f^{'}(x)g(x)}{f(x)^2} = \frac{\dfrac{\alpha}{(1+x)}g(x)f(x) - \dfrac{\alpha}{(1+x)}f(x)g(x)}{f(x)^2} = 0$$

となり, $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ は定数関数となる. $\dfrac{g(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ ゆえ, この定数は 1 で,

$$f(x) \ = \ g(x) \qquad (|x|<1)$$

*7 $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. 特に α が正整数のときは $\binom{\alpha}{n} ={}_\alpha C_n$

が成り立つ. これは (6.41) を示している.
(v) 次に,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots \qquad (|x| < 1).$$

において x を $-x^2$ にかえると

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots\cdots$$

$$(|x| < 1).$$

項別積分すると

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} x^{2n-1} + \cdots \tag{6.18}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(|x| < 1).$$

これは $\arctan x$ の $b = 0$ 中心のテイラ-展開である. 右辺の巾級数の収束半径は 1 である (定理 6.22 (2)). 右辺は $x = 1$ で収束する (定理 6.6) ので, Abel の第 2 定理 (6.23) より次が得られる:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

巾級数の理論は複素変数の範囲で議論するのが自然である．収束半径といっても元々は複素平面の収束円の半径の意味であった．そこまで言及するのは読者の実力の成長を待つしかないだろう.

♣♢6.4 節の演習問題 ♣♢

1. 次の巾級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\log n+1}x^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$

2. 次の巾級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots$

(2) $\displaystyle x+\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n+\cdots\cdots$

3. 次の関数を $x=0$ 中心にテイラ-展開せよ. 収束半径はいくらか.

(1) $\sin^2 x$ (2) $\displaystyle\log\frac{1+x}{1-x}$ (3) $2^x x$

(4) $e^x\cos x$ (5) $\cosh x$ (6) $\sinh x$

(7) $\log(1-x-2x^2)$ (8) e^{-x^2}

4. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ を $x=b$ $(b\neq 1)$ 中心に巾級数展開せよ. 収束半径はいくらか.

5. $g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ とする.

(1) $g'(x)$ を求めよ.

(2) 一般に $g^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_n(\frac{1}{x})$ の形をしている. ここで $P_n(t)$ は t についての多項式である.

(3) $P_{n+1}(t)=2t^3P_n(t)-t^2P_n'(t)$.

(4) 多項式 $P_n(t)$ の次数は $3n$ である.

6. 関数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

は, C^{∞}-関数であるが剰余項 R_n については $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ ではないことを示せ.

6.5 項別積分と項別微分

第 2 章や第 3 章で取り扱った関数の中には

$$x^{\alpha}(\alpha > 0), \quad \frac{1}{x^2+\alpha} \quad (\alpha > 0), \quad \frac{1}{1+\alpha\sin x} \quad (0 < \alpha < 1)$$

のように, パラメ-タ-α を用いて表されるものがあった. この中から, 例えば $x^{\alpha}(\alpha > 0)$ を考察しよう. これは α を固定すると $x(x \geqq 0)$ の連続関数だが, α を動かすと, パラメ-タ-α に依存する関数族

$$f_{\alpha}(x) = x^{\alpha}$$

が得られる.§6.2 の関数列 $\{f_n(x)\}$ は自然数 n に依存する関数族だが, こちらは連続パラメ-タ-α に依存する関数族である.

さらに見方を変えると, これは 2 変数 (x, α) の関数でもある

$$f(x, a) = f_{\alpha}(x) = x^{\alpha} \quad (x \geqq 0, \alpha > 0)$$

この関数は半開領域

$$D = \{(x, \alpha) | x \geqq 0, \alpha > 0\}$$

で連続である. なぜなら, $x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}$ ゆえ, $x \neq 0$ のときすなわち, 点 (x_0, α), $(x_0 \neq 0)$ で連続なのは明らかだが, $(x, \alpha) = (0, \alpha_0)(\alpha_0 > 0)$ においては, $\varepsilon > 0$ をあたえ, $\delta^{2\alpha_0} < \varepsilon$ となる $\delta > 0$ をとると, $0 \leqq x < \delta, 0 < \alpha < 2\alpha_0$ をみたす (x, α) に対し, $x^{\alpha} < \delta^{\alpha} < \delta^{2\alpha_0} < \varepsilon$ となるから, 点 $(0, \alpha_0)$ でも連続になる.

定理 6.30. $f(x, \alpha)$ が半開領域 *(*または閉領域*)*

$$D = \{(x, \alpha) | a \leqq x \leqq b, c < \alpha < d(\text{または } c \leqq \alpha \leqq d)\}$$

上の連続関数で, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ が存在し, これも D 上連続関数とする. このとき, αの関数

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx \quad (c<\alpha<d \text{ または } c \leqq \alpha \leqq d)$$

は微分可能で次が成り立つ:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx.$$

証明.

$$F(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx, G(\alpha)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx$$

とおく. 定理 5.13 より, どちらも α の連続関数であって

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_0}^{\alpha} G(a)d\alpha &= \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)d\alpha \\ &= \int_a^b \{f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)\}dx \\ &= F(\alpha)-F(\alpha_0) \\ &\quad (\alpha_0 \text{は } c<\alpha_0<d \text{ となる固定点})\end{aligned}$$

となる. したがって $F(\alpha)$ は $G(\alpha)$ の原始関数となり, ($F(\alpha)$ は微分可能で)
$F'(\alpha)=G(\alpha)$. □

この収束が, **パラメ-タ α に関して閉区間 $[c,d]$ 上一様収束である**とは, 任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して, $0<p-a<\delta$, $0<b-q<\delta$,
$c \leqq \alpha \leqq d$ となるすべての p,q,α に対し

$$|F(\alpha,p,q)-F(\alpha)|<\varepsilon$$

となることである.(δ は α のとり方によらない.)
$a=-\infty$ または $b=+\infty$ のときの一様収束の定義も同様である. また
半開領域 D が

$$D=\{\,(x,\alpha)\,|a \leqq x<b,\ c \leqq \alpha \leqq d\}$$

の形をしているときも同様である.

定理 6.31. 半開領域

$$D = \{\,(x,\alpha)\,|a < x < b,\ c \leqq \alpha \leqq d\}$$

上の連続関数 $f(x,\alpha)$ に対し, 広義積分

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx$$

がパラメ-タ α に関して閉区間 $[c,d]$ 上一様収束するとする. このとき,

1. $\int_a^b f(x,\alpha)dx$ は $[c,d]$ 上, α の連続関数である.
2. $\int_c^d d\alpha \int_a^b f(x,\alpha) = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha$.　((*i*) の右辺は広義積分だが, 収束して値は左辺に等しい.)
3. 広義積分
$$\int_a^b dx \int_c^\alpha f(x,\alpha)d\alpha$$
はパラメ-タ α に関して $[c,d]$ 上一様収束する.

証明. $c \leqq \alpha \leqq d$, $\alpha < p < q < b$ として, 関数

$$F(\alpha,p,q) = \int_p^q f(x,\alpha)dx$$

$$G(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$$

を考える. 仮定により任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta > 0$ が存在して,　$0 < p - a < \delta$, $0 < b - q < \delta$, $c \leqq \alpha \leqq d$ のとき

$$|F(\alpha,p,q) - G(\alpha)| < \varepsilon$$

である.$f(x,\alpha)$ は長方形

$$\{(x,\alpha)|p \leqq x \leqq q, c \leqq \alpha \leqq d\}$$

上で一様連続 (定理 4.5) なので (必要なら δ をとりかえて)$|x - x'| < \delta$, $|\alpha - \alpha'| < \delta$ のとき $|f(x,\alpha) - f(x',\alpha')| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |F(\alpha,p,q) - F(\alpha',p,q)| &\leqq \textstyle\int_p^q |f(x,\alpha) - f(x,\alpha')|dx \\ &< \varepsilon(p-q). \end{aligned}$$

したがって (6.45) (6.46) より $|\alpha-\alpha'|<\delta$ のとき
$|G(\alpha)-G(\alpha')| \leqq |G(\alpha)-F(\alpha,p,q)|+|F(\alpha,p,q)-F(\alpha',p,q)|$
$+|F(\alpha',p,q)-G(\alpha')|$
$<\ \varepsilon(q-p)+2\varepsilon.$
これは $G(\alpha)$ $(c \leqq \alpha \leqq d)$ が連続関数であることを示している.
次に同じ記号を用いて

$$\int_c^d F(\alpha,p,q)d\alpha=\int_c^d d\alpha\int_p^q f(x,\alpha)dx=\int_p^q dx\int_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha$$

であるが,

$$\begin{aligned}|\int_c^d F(\alpha,p,q)d\alpha-\int_c^d G(\alpha)d\alpha| &\leqq \int_c^d |F(\alpha,p,q)-G(\alpha)|d\alpha\\ &< \varepsilon(d-c).\end{aligned}$$

なので, (6.47) の左辺は

$$\int_c^d F(\alpha,p,q)\,d\alpha \to \int_c^d G(\alpha)\,d\alpha$$

したがって, (6.47) より, 広義積分

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha$$

は収束して, 値は $\int_c^d G(\alpha)\,d\alpha$ に等しい.

最後に, (6.48) で d を α にかえることにより, 広義積分

$$\int_a^b dx\int_c^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha$$

がパラメ-タ α に関して $[c,d]$ 上一様収束することがわかる. □

例 (3.37),117 ページより $\int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x dx=\frac{1}{1+\alpha^2}$ この広義積分はパラメ-タ α に関して任意の閉区間 $[c,d]$ 上一様収束する. 実際

$$\left|\int_0^x e^{-x}\cos\alpha x dx-\frac{1}{1+\alpha^2}\right|=\left|\frac{e^{-x}}{1+\alpha^2}(\alpha\sin\alpha x-\cos\alpha x)\right|$$

$$\leqq e^{-x}\frac{1+|\alpha|}{1+\alpha^2} \leqq (\sqrt{2}-1)e^{-x}$$

$$< \varepsilon \quad (x > -\log\varepsilon + \log(\sqrt{2}-1))$$

となるからである.(6.49) の両辺を α について積分すると,

$$\int_0^\alpha d\alpha \int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x dx = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \arctan\alpha$$

この左辺は上の定理の (ii) より

$$\int_0^\infty dx \int_0^\alpha e^{-x}\cos\alpha x d\alpha = \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

に等しいので, 次式が得られる:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \arctan\alpha \tag{6.19}$$

上の定理の (iii) により, この広義積分もパラメ-タ α に関して, 任意の閉区間 $[c,d]$ 上一様収束する. 式 (6.19) を再び α に関して積分すると

$$\int_0^\alpha d\alpha \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \int \arctan\alpha d\alpha$$

$$= \alpha\arctan\alpha - \frac{1}{2}\log(1+\alpha^2)$$

この左辺は上の定理の (ii) より

$$\int_0^\infty dx \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{x}\sin\alpha x d\alpha = \int_0^\infty e^{-x}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx$$

に等しいので, 次式が得られる:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx = \alpha\arctan\alpha - \frac{1}{2}\log(1+\alpha^2)$$

ここで $\alpha = \frac{1}{\beta}, x = \beta t$ とおくと

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \arctan\frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2}\log(1+\frac{1}{\beta^2})$$

ここで $\beta > 0, \beta \to +0$ とすると右辺は $\to \frac{\pi}{2}$ だが, 左辺はすぐ後で示すように

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{1-\cos t}{t^2}dt \to \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}dt \quad (\beta \to +0) \tag{6.20}$$

となり, したがって (t を x でかえて)

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2} \tag{6.21}$$

が得られる. ところが, (6.54) の左辺は, 部分積分により

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx - \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^\infty = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \tag{6.22}$$

に等しいので, 結局, 次の重要な広義積分の値が求まる:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

さて, 式 (6.20) であるが, まず広義積分式 (6.21) は (式 (6.22) の広義積分が, 例 3.22 で示したように, 収束するので) 収束することに注意する.(この値をさしあたって I とおく.) それゆえ, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $R > 0$ が存在して

$$\int_R^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = I - \int_0^R \frac{1-\cos x}{x^2}dx < \varepsilon$$

となる. したがって

$$\int_0^\infty (1-e^{-\beta x})\frac{1-\cos x}{x^2}dx < \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx < \varepsilon \tag{6.23}$$

一方, $0 < \beta < \frac{-\log(1-\varepsilon)}{R} = \delta$ すなわち $1 - e^{-\beta R} < \varepsilon$ となる β に対し

$$\int_0^R (1-e^{-\beta x})\frac{1-\cos x}{x^2}dx < \int_0^R \varepsilon\frac{1-\cos x}{x^2}dx < \varepsilon I \tag{6.24}$$

式 (6.23) と式 (6.24) より, $1 < \beta < \delta$ となる β に対し

$$\int_0^\infty (1-e^{-\beta x})\frac{1-\cos x}{x^2}dx < \varepsilon + \varepsilon I = \varepsilon(1+I)$$

となるので式 (6.20) が得られる.

例 6.28.

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

証明. $x^{-x} = e^{x\log\frac{1}{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(\log\frac{1}{x})^n$ ここで変数変換 $x^{n+1} = e^{-y}$ を行う. $\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-y}y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ □

例 6.29. 例 *5.16* において

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{6.25}$$

が得られている. この式において x を $\sqrt{\alpha}x$ $(\alpha > 0)$ でおきかえると

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{6.26}$$

この広義積分は, パラメ-タ α に関して $\alpha > 0$ で広義一様収束している.

実際, $\alpha_0 > 0$ を固定すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $R_0 > 0$ が存在して

$$\int_{\sqrt{\alpha_0}R}^{\infty} e^{-x^2}\, dx < \varepsilon \qquad (R > R_0)$$

となる. そこで, 再び $t = \sqrt{\alpha}x,\ dt = \sqrt{\alpha}dx$ とおけば, $\alpha \geqq \alpha_0,\ R > R_0$ のとき

$$\int_R^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \int_{\sqrt{\alpha}R}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\alpha}}\, dt \leqq \int_{\sqrt{\alpha_0}R}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\alpha_0}}\, dt < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha_0}}$$

となるから, パラメ-タ α に関して $(0, +\infty)$ で広義一様収束する.

同様に,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n}\, dx$$

は *(*$\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{2n}\, dx$ が収束するので*)* パラメ-タ α に関して $(0, +\infty)$ で広義一様収束することがわかる. したがって, *(2)* の両辺を α に関して n 回微分すると *(*定理 *6.29* より*)*

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n}\, dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{n+\frac{1}{2}}} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{6.27}$$

が得られる.

例 6.30. 広義積分

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx$$

および

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x \sin 2\alpha x \, dx$$

は α に関して $(-\infty, \infty)$ で一様収束する. したがって $F(\alpha)$ を α に関して微分すると *(*定理 *6.29* より*)*

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\alpha} &= -2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x \sin 2\alpha x \, dx \\ &= [e^{-x^2} \sin 2\alpha x]_0^{\infty} - 2\alpha \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx = -2\alpha F(\alpha) \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{dF}{F} = -2\alpha \, d\alpha$$

両辺を *(*α について*)* 積分すると

$$F(\alpha) = Ce^{-\alpha^2} \qquad (C \text{ は定数})$$

となるが, $\alpha = 0$ とおくと

$$C = F(0) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

なので, 結局, 次式が得られる*:*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2} \tag{6.28}$$

ここで x を $\sqrt{b}\, x \, (b > 0)$ でおきかえ, α を $\frac{a}{\sqrt{b}}$ でおきかえると次式が得られる*:*

$$\int_0^{\infty} e^{-bx^2} \cos 2ax \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-\frac{a^2}{b}} \qquad (b > 0) \tag{6.29}$$

この式を *Laplace* の積分とよぶ.

　　(4) を α について積分すると

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin 2\alpha x}{x}\,dx=\sqrt{\pi}\int_0^\alpha e^{-x^2}\,dx \tag{6.30}$$

が得られる. また, *(4)* を α について微分すると

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin 2\alpha x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha e^{-\alpha^2} \tag{6.31}$$

が得られる. これをさらに微分すると

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-2\alpha^2)e^{-\alpha^2} \tag{6.32}$$

が得られる. 以下, 何回でも微分して, 次々と公式が得られる.

♣♢6.5 節の演習問題 ♣♢

1.
$$I(a)=\int_0^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2}dx \quad (a>0),$$

　の値を求めよ. ヒントとして次の 2 つを考えなさい.

　(1)

$$\int_{\sqrt{a}}^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2}(1-\frac{a}{x^2})dx=-\int_0^{\sqrt{a}} e^{-(x-\frac{a}{x})^2}(1-\frac{a}{x^2})dx.$$

　(2) $\dfrac{dI}{da}$ を求めよ.

2. 関数 $f(x,\alpha)$ が半開領域 $D=\{(x,\alpha)\mid a<x<b, c\leqq\alpha\leqq d\}$ で連続とする. 開区間 (a,b) 上で正値をとる連続関数 $g(x)$ が次の (i), (ii) をみたすとする:

　(i)　$\mid f(x,\alpha)\mid\leqq g(x)$　　　　(D の各点 (x,α) で),

　(ii)　広義積分 $\int_a^b g(x)dx$ が収束する.

　このとき, 広義積分

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx$$

はパラメ-タ α に関し閉区間 $[c, d]$ で一様収束することを示せ.

3. 区間 $[0, +\infty)$ で連続な関数 $f(x)$ の広義積分

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

が収束するとき, 広義積分

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \qquad (s \geqq 0)$$

は, パラメ-タ s に関し, $[0, +\infty)$ 上で一様収束することを示せ. ($L(s)$ は $s \geqq 0$ で連続関数である. $L(s)$ を $f(x)$ の **Laplace 変換**とよぶ.

4. 関数 $\dfrac{\sin x}{x}$ の Laplace 変換

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\sin x}{x} dx \qquad (s \geqq 0)$$

の導関数 $L'(x)$　$(s > 0)$ を求めよ. それを用いて

$$L(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s \qquad (s \geqq 0)$$

特に

$$L(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を示せ.

5. $\lambda \neq 0$, $\alpha > 0$ のとき, 次の広義積分の値を求めよ.

$$(1) \quad \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x} dx \qquad\qquad (2) \quad \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin \lambda x}{x} dx$$

6. $a > b > 0$ のとき,

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx$$

の値を求めよ (ヒント: 問題 **4** を用いる).

7. 第 3.8.3 節 118 ペ-ジでやったようにガンマ関数をもう一度考えてみよう.

(1)　広義積分

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \qquad (s>0)$$

は, パラメ-タ s に関し $s>0$ で広義一様収束することを示せ.

(2)

$$\Gamma'(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\log x dx,$$

一般に

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}(\log x)^n dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$

を示せ.

8. 実数 x に対し，$\{x\}$ で x に最も近い整数との距離を表わすものとし，

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\{10^k x\}}{10^k} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

とおく. このとき次の各問に答えよ.

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $R=(-\infty,\infty)$ で一様収束することを示せ.

(2) $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ とおくと，$f(x)$ は連続関数であることを示せ.

(3) (2) の $f(x)$ はいたるところ微分不可能であることを次の手順で示せ.

i. 任意の実数 x に対し x の 10 進展開を

$$x=[x]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{10^n} \qquad (0\leqq x_n\leqq 9, [x] \text{ は } x \text{ の整数部分})$$

としたとき，x に対して決まる数列 σ_m を

$$\sigma_m=\begin{cases} 1 & x_m\neq 4,9 \\ -1 & x_m=4 \text{ または } 9 \end{cases}$$

によって定義し，さらに各 m に対し，

$$h_m = \sigma_m 10^{-m} \tag{6.33}$$

とおく. このとき

$$\{10^n(x+h_m)\}-\{10^n x\} = \begin{cases} \rho_{mn}10^{-m} \quad (\rho_{mn} = \pm 1) & n < m \\ 0 & n \geqq m \end{cases}$$

が成立する.

ii. 各実数 x に対し，数列 $\{h_m\}$ を式 (6.33) によって決めると $\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$ は整数値をとる，
およびに $m \to \infty$ のとき収束しない，発散する.

至るところ微分不可能である連続関数の例を与えている.

van der Waerden(1926) に由る.

付録 A

数学者たち

				ページ
Abel	アーベル	(1802-1829)	ノルウェー	290, 291, 297
Bolzano	ボルツァーノ	(1781-1848)	チェコ	140
Cauchy	コーシー	(1789-1857)	フランス	16, 17, 37, 62, 66, 6
Euler	オイラー	(1707-1783)	スイス、ロシア	68, 119, 195
Fourier	フーリエ	(1768-1830)	フランス	283
Gauss	ガウス	(1777-1855)	ドイツ	135
Hermite	エルミート	(1822-1901)	フランス	129
Lagrange	ラグランジュ	(1736-1813)	フランス	191
Laplace	ラプラス	(1749-1827)	フランス	307, 308
Legendre	ルジャンドル	(1752-1833)	フランス	132
Leibniz	ライプニッツ	(1646-1716)	ドイツ	1
Möbius	メビウス	(1790-1868)	ドイツ	255
Maclaurin	マクローリン	(1698-1746)	イギリス	66
Newton	ニュートン	(1642-1727)	イギリス	1, 56, 57, 72, 78
Riemann	リーマン	(1826-1866)	ドイツ	86–91
Schwarz	シュヴァルツ	(1843-1921)	ドイツ	128
Taylor	テーラー	(1685-1731)	イギリス	63, 64, 66, 67, 72
Weierstrass	ヴァイエルシュトラス	(1815-1897)	ドイツ	16, 17, 26, 140, 282

B　ドイツ文字、ギリシャ文字一覧

数学書ではギリシャ文字，ドイツ文字は記号として良く使われる．ここで一覧しておこう． ギリシャ文字の位置は英字文字と対応は一応考慮していない．

表 B.1　ドイツ文字・ギリシャ文字

英文字	ドイツ文字（大文字）	読み方	ドイツ文字（小文字）	ギリシャ文字（大文字）	読み方	ギリシャ文字（小文字）
a	$\mathfrak{A}$	アー	$\mathfrak{a}$	A	アルファ	α
b	$\mathfrak{B}$	ベー	$\mathfrak{b}$	B	ベータ	β
c	$\mathfrak{C}$	ツエー	$\mathfrak{c}$	Γ	ガンマ	γ
d	$\mathfrak{D}$	デー	$\mathfrak{d}$	Δ	デルタ	δ
e	$\mathfrak{E}$	エー	$\mathfrak{e}$	E	エプシロン	ϵ
f	$\mathfrak{F}$	エフ	$\mathfrak{f}$	Φ	フィー	ϕ
g	$\mathfrak{G}$	ゲー	$\mathfrak{g}$			
h	$\mathfrak{H}$	ハー	$\mathfrak{h}$	H	イータ	η
i	$\mathfrak{I}$	イー	$\mathfrak{i}$	I	イオター	ι
j	$\mathfrak{J}$	ヨット	$\mathfrak{j}$			
k	$\mathfrak{K}$	カー	$\mathfrak{k}$	K	カッパー	κ
l	$\mathfrak{L}$	エル	$\mathfrak{l}$	Λ	ラムダー	λ
m	$\mathfrak{M}$	エム	$\mathfrak{m}$	M	ミユー	μ
n	$\mathfrak{N}$	エン	$\mathfrak{n}$	N	ニュー	ν
o	$\mathfrak{O}$	オー	$\mathfrak{o}$	O	オミクロン	o
p	$\mathfrak{P}$	ペー	$\mathfrak{p}$	Π	パイ	π
q	$\mathfrak{Q}$	クー	$\mathfrak{q}$	Ψ	プシー	ψ
r	$\mathfrak{R}$	エル	$\mathfrak{r}$	P	ロー	ρ
s	$\mathfrak{S}$	エス	$\mathfrak{s}$	Σ	シグマ	σ
t	$\mathfrak{T}$	テー	$\mathfrak{t}$	T	タウ	τ
u	$\mathfrak{U}$	ウー	$\mathfrak{u}$	Υ	ウプシロン	υ
v	$\mathfrak{V}$	ファオ	$\mathfrak{v}$	Θ	テータ	θ
w	$\mathfrak{W}$	ヴェー	$\mathfrak{w}$	Ξ	グザイ	ξ
x	$\mathfrak{X}$	イックス	$\mathfrak{x}$	X	カイ	χ
y	$\mathfrak{Y}$	ユップスィロン	$\mathfrak{y}$	Ω	オメガ	ω
z	$\mathfrak{Z}$	ツェット	$\mathfrak{z}$	Z	ゼータ	ζ

C　問と演習問題の答

以下の答えでもし間違っているところがあれば教えてください.
　教育センター　Moodle 上で知らせてください.
　小柴　洋一　2008 年 6 月 2 日　記

---

1 章 1 高校教科書 C を参照せよ.

2
(1) 収束　(2) 収束　(3) 発散　(4) 収束

3 (1) $n_0 = 1001$　(2) $n_0 = 10$

4 ε の論法の定義どうりやれば良い.

5
(1) 0　(2) -1　(3) 0

(4) $\frac{1}{3}$　(5) 0　(6) $\begin{cases} 1 & |x| > 1 \text{ のとき} \\ \frac{1}{2} & x = 1 \text{ のとき} \\ 0 & |x| < 1 \text{ のとき} \end{cases}$

6 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = 0.$

7 14page の式 1.1 から式 1.2 に移るときに注目せよ。例えば $\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$.

8 $\log \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \log a_n$ より解る.

9 ヒントどうりやれば良い.

10x_0 から初め，小数第 4 位まで計算する.0.143($x_6 = x_7 = 0.1428$)

11
(a) 有界でない，単調
(b) 全区間で有界でない，単調でもない.
(c) 全区間で有界でない，単調でもない.
(d) 区間 $[-a, a]$ で有界，単調ではない.
(e) 有界，単調でない.
(f) 有界でない. 単調.
(g) 有界でない，単調でない
(h) 有界，単調でない

12$\delta = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$ とすれば良い. もちろん $\delta = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4}, \cdots$ でも良い.

13$\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$ のとき $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ のみを証明しよう.
任意に $\varepsilon > 0$ を与える. $B \neq 0$ だから正数 γ, δ_1 があって

$$|g(x)| > \gamma > 0 \quad (|x-a| < \delta_1) \tag{C.1}$$

この γ について δ_2 があって

$$|g(x) - B| < \gamma\varepsilon|B| \quad (|x-a| < \delta_2) \tag{C.2}$$

不等式 (C.1) と不等式 (C.2) から不等式

$$|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}| = \frac{|g(x)-B|}{|g(x)B|} < \frac{\gamma\varepsilon|B|}{\gamma|B|} = \varepsilon \tag{C.3}$$

を得る. 不等式 (C.3) は $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ とするとき $|x-a| < \delta$ である任意の x について成り立っている.

14 閉区間 $[0, \pi]$ で連続関数 $f(x) = \sin x - x + 1$ を考える.$f(0) = 1 > 0, f(\pi) = 2 - \pi < 0$. 中間値の定理より $f(c) = 0$.

15 中間値の定理より成り立っていることが解る.

16
(a) $y = \frac{1}{2}(x-5)$
(b) $y = \frac{x+1}{x-1}$
(c) $y = \sqrt{x+1}$

17
(a) $y = \sqrt{\frac{y}{2}}$
(b) $y = -\sqrt{2(x-2)}$
(c) $y = -x^2$

18
(a) $f^{-1}(f(x)) = x$
(b) $f(f^{-1}(x)) = x$

19
(a) $y = -\sqrt{-2x}$
(b) $y = \sqrt{1 + \frac{1}{3}y}$
(c) $y = \frac{2x-5}{x-3}$
(d) $y = x^2 - 6$

20$(cx-a)f(x) = ax + b$ として x について解けば $x = \frac{af(x)+b}{cf(x)-a}$.

21
(a) $g(f(x)) = f(g((x)) = x$.
(b) $g(f(x)) = \sin x$ および $f(g(x)) = \tan \frac{x}{1+x^2}$.

....

1 章演習問題 36page

1 $a \geqq b$ のとき $\sqrt[n]{a^n + b^n} = a\sqrt[n]{1 + (\frac{b}{a})^n} \to a \quad (n \to \infty)$

2 （2)（１）の結果を使うと $\cos(2\pi(2+\sqrt{3})^n) = \cos(2\pi(2-\sqrt{3})^n) = 1$

3

4 定理 1.1（8 ページ）より解る.

5

6

7

8 $F(x) = f(x) - x$ とおく.$F(0) = f(0) \geqq 0, F(1) = F(1) - 1 \leqq 0$. 中間値の定理より.

9

10

11

12
(a) $m = 2$ の場合である.
(b)

$$\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}\right)$$

2 章 1 $x = 0$ で微分可能である.$\lim_{h\to+0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to-0} \frac{h^3}{h} = 0$.

2 $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqq 0$ より点 x の近くで単調増加.

3 $\cos(x+\Delta) - \cos x = -2\sin(x+\frac{\Delta}{2})\sin\frac{\Delta}{2}$

4 （略）

5 $f' = (f_1f_2)'f_3 + (f_1f_2)f_3'$

6

(10) $\sec^2 x$	(11) $\sec x$	(12) $2x + 1 - 6x^2$
(13) $-\frac{1}{x^2}$	(14) $-\sin^2 x \cos x$	(15) $e^x \cos x \sin x$
(16) $2ax + b$	(17) $\log x + x^4$	(18) $\cot x$

7 $y = \arctan x$ について $x = \tan y. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+\sec^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$

8

10

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

12 $e^x > 2^x = (1+1)^x > (1+1)^{[x]} > 1 + [x] > x.$

14

15 （1）$r = a$（2）$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$

16

17

18

19

20

21

22

23

. . . .

2 章演習問題 (77 ページ)

1 （6）以外は 表 3.1（94 ページ）を見よ.（6）$x^x(\log x + 1)$

2 媒介変数表示 $x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta$ とする. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$
曲線上の点 $(x_0, y_0) = (a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ での接線の式は
$y - y_0 = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x - x_0).$
したがって両座標軸に挟まれる部分の長さの 2 乗は
$(y_0 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x_0)^2 + (x_0 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}y_0)^2.$
これはだいぶ計算はあるが a^2 になっている.

3 $y = \frac{5}{2}x - 4.$

4 定理 2.7（51 ページ）により

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{g'}{f'}) = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{g'}{f'})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{g''f'-g'f''}{f'^2}}{f'}$$

5

6

7 $y_0 = f(a') = f(b'), a < a' < b' < b$ であるような a', b' が存在する.Rolle の定理 2.10（60 ページ）より解る.

8

9

10

11 $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h}\}$
逆は成り立たない.$f(x) = |x|, x = a = 0$ の場合を考えよ.

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21 $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$. 故に $x = 0$ で連続.$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}, h \to 0$ のときこの極限は収束しない.

22 $\frac{f(h)-f(0)}{h} = h \sin\frac{1}{h} \to 0 \quad (h \to 0)$ 微分可能で微分係数は 0.

23

24 （これを読んで解らない個所があれば僕に知らせてください.）

25 大学の解析学は論証が正確. 高校数学は論証が甘い. ” 学習・教育過程は数学史の順序に由る ” .

26

3 章 1

1

2

3

4

5

6 この問題の意味は $x_1 < x_2$ ならば $E(x_1) < E(x_2)$ であることを示せばよい，ことにある.
$\int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = \int_a^{x_2} f(t)dt$

$$(x_1 - a)f(c_1) + (x_2 - x_1)f(c') = (x_2 - a)f(c_2) \tag{C.4}$$

$a < c_1 < x_1 < c' < x_2$
$a < c_2 < x_2$
$(x_1 - a)f(c_1) + (x_2 - x_1)f(c_1) <$ 式（C.4）の左辺
$\therefore (x_2 - a)f(c_1) < (x_2 - a)f(c_2)$
$\therefore f(c_1) = E(x_1) < E(x_2) = f(c_2)$

7

9

10 $\frac{1}{2}\sin(2\log x)$

12

13

14 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx.$

15

16

18

19

20

21

22

23

24

. . . .

3 章演習問題（127 ページ）まず

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を確認しておこう.

（a）等式

$$2\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2} = \cos(k-\frac{1}{2})\theta - \cos(k+\frac{1}{2})\theta.$$

があることに注目. ここで $k = 1, \cdots, n$ として総和をとれば求める式が得られる.

（b）$\theta = \frac{\pi}{2n}$ とする.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sin k\theta \times \theta = \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n})$$

ここで $n \to \infty$ とすれば $S_n \to 1\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1.$

（a）$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \int_0^1 xdx\int_0^1 xdx$

（b）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx = 1 < \frac{\pi^2}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$

81 $\leqq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} \leqq \sqrt{2}$

18 前問を使えばよい.$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 3a^2(1+\cos\theta), r^2 + r'^2 = 2a^2(1+\cos\theta).$
$2^{\frac{3}{2}}3^{-1}a(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$

$\varepsilon > 0$ とする. $\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{e^u}{u}du + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{e^u}{u}du = \clubsuit$
第１項について：
$u = -v, du = -dv,$ と変数変換すれば第１項
$= -\int_{\varepsilon}^{1}\frac{e^{-v}}{v}dv = -\int_{\varepsilon}^{1}\frac{e^{-u}}{u}du$
$\clubsuit = \int_{\varepsilon}^{1}\frac{e^u - e^{-u}}{u}du.$

$\lim_{u\to 0}\frac{e^u-e^{-u}}{u}=2$ であるから積分 $\int_0^1\frac{e^u-e^{-u}}{u}du$ は広義ではなく，普通の連続関数の積分である．
もちろん $\varepsilon\to 0$ のとき $\int_\varepsilon^1\frac{e^u-e^{-u}}{u}du$ は $\int_0^1\frac{e^u-e^{-u}}{u}du$ に収束する．

式（3.12）（122 ページ）より $\rho=\frac{1}{y''}$. 他方 lHostital の定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f''(x)}=\frac{1}{f''(0)}.$$

4 章 142page 4.1

1

2 曲線 $y=kx^2$ の上で $f(x,kx^2)=\frac{1}{1+k}$. k は任意.$(x,y)\to(0,0)$ のとき $f(x,y)$ は発散する.$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続でない.

3 (1),(2) とも $f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ は $r\to 0$ のとき θ の如何にかかわらず $\to 0$ にゆく.

4

5

1

4.2 節の演習問題 4.2.3 152page

1
（a） $f_x(x,y)=3x^2+3ay$
$f_y(x,y)=3ax+3y^2$
（b） $f_x(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$
$f_y(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$
（c） $f_x(x,y)=e^x\cos^2 y-e^y\sin 2x$
$f_y(x,y)=-e^x\sin 2y-e^y\sin^2 x$
（d） $f_x(x,y)=\frac{2x+y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$
$f_y(x,y)=\frac{x+2y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$
（e） $f_x(x,y)=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
$f_y(x,y)=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
$f_z(x,y)=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
（f） $f_x(x,y,z)=\sin(y+z)sin(2x+y+z)$
$f_y(x,y,z)=\sin(z+x)sin(x+2y+z)$
$f_z(x,y,z)=\sin(x+y)sin(x+y+2z)$

2

(a) $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = h - 2\frac{\sqrt{h^2}}{h}$. x について偏微分可能でない. 同様に y についても偏微分可能でない.

(b) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

3

(a) $f_x(x,y) = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$

$f_y(x,y) = -\frac{y^4x+4y^2x^3-x^4}{(x^2+y^2)^2}$

(b) $f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = -1$

$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h} = 1$

4

(a) $f_{xx}(x,y) = (y^2-a^2)(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}$

$f_{xy}(x,y) = -x^2(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}$

$f_{yy}(x,y) = (x^2-a^2)(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}$

(b) $f_{xx}(x,y) = 2(2x^2-1)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy}(x,y) = 4xye^{-x^2-y^2}$

$f_{yy}(x,y) = 2(2y^2-1)e^{-x^2-y^2}$

5

$\mu = \nu = 0$ とすれば $(xy)^{\frac{2}{3}} = \rho\varepsilon(x,y)$. $\therefore \lim_{(x,y)\to 0}\varepsilon = 0$.

6 $\frac{1}{\rho}\{f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta) - f(a,b)\} = (\cos\theta)^{\frac{1}{3}}(\sin\theta)^{\frac{2}{3}}$ これは r について定数. すべての方向に微分可能. もし全微分可能とすると
$(x,y)\to(0,0)$ のときこの式は $\to 0$ とならなければならないがこれは不可能.

7 $\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$.

2 167page

4.3 168page 4(1)
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 等

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \tag{C.5}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{C.6}$$

式（C.5）と式（C.6）の両辺を辺辺加えると得られる.

6　3次元空間の極座標

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

の式は, 以下のような合成とみなせる:

$$(1)\quad \begin{cases} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{cases}, \qquad (2)\quad \begin{cases} \rho &= r\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \\ \varphi &= \varphi \end{cases}.$$

それ故, (1), (2) を用いて Δ を計算すると
(1) に対して, 問題 **6.** において $r \to \rho$, $\theta \to \varphi$ と置き換えることにより,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3}$$

が成り立つ.
同様に (2) に対して, 問題 **6.** において $x \to z$, $y \to \rho$ と置き換えることにより,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{4}$$

が成り立つ. 今,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$$

であるので, 例 4.1 を用いると,

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{\cos\theta}{r}$$

となり, ゆえに,

$$\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} = \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{5}$$

が成り立つ. 従って, (4), (5) を (3) に代入すると,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{\partial^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

ここで

$$\rho = r\sin\theta$$

より

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

を得る.

3 170page
4 174page

4.4 177page

1
(a) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} = 0, \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 2 + 6y$. 点 $(0,0)$ で極小値 0.
(b) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} = 1, \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 2$. 点 $(2,0)$ で極小値 -4.
(c) $f_x = f_y = 0$ の解は次の 9 点:$(0,0), (\pm1,0), (0,\pm1), (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ 点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ で極小値 $-\frac{7}{4}$, 極大値 $-\frac{7}{4}$ をとる.

2

3

4

5

6

7

4.5187page
4.67 1927page

5 章 1

5.2 P,177

1

(1)

$\iint_D (x^3+y^2)dxdy$D:$0 \le x \le 10 \le y \le 1$

$=\int_0^1 \{\int_0^1 (x^3+y^2)dy\}dx$

$=\int_0^1 [x^3y+\frac{1}{3}y^3]_0^1 dx$

$=\int_0^1 (x^3+\frac{1}{3})dx$

$=[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x]_0^1$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

(2)

$\iint_{(\sqrt{|x|}-y^2)dxdy}$D:$-1 \le x \le 1$ $1 \le y \le 2$

$=\int_{-1}^1 \{\int_1^2 (|x|^{\frac{1}{2}}-y^2)dy\}dx$

$$[|x|^{\frac{1}{2}}y-\frac{1}{3}y^3]_1^2 = 2|x|^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}-(|x|^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3})$$

$=|x|^{\frac{1}{2}}-\frac{7}{3}$

$$\int_{-1}^1 (|x|^{\frac{1}{2}}-\frac{7}{3})dx = 2\int_0^1 (|x|^{\frac{1}{2}}-\frac{7}{3})dx$$

$=2[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{7}{3}x]_0^1$

$=2(\frac{2}{3}-\frac{7}{3})=-\frac{10}{3}$

p.178

(7)

$\iint_D \frac{x}{y}dxdy$D:$x+1 \le y \le x+2 \quad 0 \le x \le 1$

$=\int_0^1 \int_{x+1}^{x+2} \frac{x}{y}dydx$

$$[x\log y]_{x+1}^{x+2} = x\log(x+2)-x\log(x+1)$$

$$\int x\log(x+a)dx = \int (\frac{1}{2}x^2)'\log(x+a)dx$$

$=\frac{1}{2}x^2\log(x+a)-\int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x+a}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\log(x+a)-\frac{1}{2}\int (x-a+\frac{a^2}{x+a})dx$

$=\frac{1}{2}x^2\log(x+a)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x-a)^2-\frac{1}{2}a^2\log|x+a|$

$=\frac{1}{2}x^2\log(1+a)-\frac{1}{4}(1-a)^2-\frac{1}{2}a^2\log(1+a)-\{-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a^2\log a\}$

$$\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{4}+1-2(\log 3-\log 2)-\{\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2\}$$

$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log 3+2\log 2$
2,
(6)

3

5.3

5.4, 237 ページ

(a)
   i. π
   ii. $\begin{cases}\frac{2^{2-\alpha}-2}{(2-\alpha)(1-\alpha)} & \alpha\neq -1\\ 2\log 2 & \alpha=-1\end{cases}$
   iii. w
   iv. 2π
   v. r
   vi. d
   vii. r
   viii. t
   ix. f

(b) qqqqqqqqqqqqqqqqqq
(c) zzzzzzzzzzzzzzzzzz

5

5.5

5.6.4

6 章 1

2

6.2 （273 ページ） . . . .
6.2 節-節の問題

1

2

3

4

5

6

6.3.2 （285 ページ）

. . . .

6.3 節の演習問題

問題を解く前に次の 2 つを先に示しておく。$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \cdots$ と考えると () のなかは，それぞれ $\frac{1}{2}$ を超える。よって部分和 $\sum_{m=2k+1}^{2k} \frac{1}{k}$　となりコーシーの収束条件を満たさない。よって，発散。
$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots 1 = 1\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{2^2}$
であるから，任意の自然数 k に対して，$k \leqq 2^k - 1$　となる自然数 k をとると，$S_k \leqq S_{2^k - 1} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 2$ となり $\sum \frac{1}{n^2}$ は収束。

一般に，$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^v}$ で，
(1)$1 < v$　のとき，収束する。
(2)$0 < v \leqq 1$　のとき，発散する。

7.1 $0 < \sum \frac{1}{n^2+1} < \sum \frac{1}{n^2}$
$\sum \frac{1}{n^2}$ は収束するので，$\sum \frac{1}{n^2+1}$ は，収束する。

2.$\sum \frac{1}{\log(n+1)}$
$\log(n+1) < n (n \geqq 1)$
よって，$\frac{1}{n} < \frac{1}{\log(n+1)}$
$\sum \frac{1}{n}$ は発散するので，$\sum \frac{1}{\log(n+1)}$ は発散する。

3.$\sum \frac{1}{(2n^-1)^2}$
$n \geqq 1$ より，$2n - 1 \geqq n$
$0 < \frac{1}{(2n-1)^2} \leqq \frac{1}{n^2}$
$\frac{1}{n^2}$ は，収束するので，$\sum \frac{1}{(2n^-1)^2}$ は収束する。

4.$\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
$n \geqq 1$ より $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^3} \leqq \frac{1}{n^2}$
よって，$0 < \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \sum \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{n^2}$ は，収束するので，$\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ は，収束する。

5.$\sum \frac{\log(n+1)}{(n+1)^s}(s>0)$
$n>1$ で，$n+1>\log(n+1)$ より，
$0<\sum \frac{\log(n+1)}{(n+1)^s}<\sum \frac{n+1}{(n+1)^s}=\sum \frac{1}{(n+1)^{s-1}}$
ゆえに，$0<s \leqq 2 \sum \frac{\log(n+1)}{(n+1)^s}$ は発散。
$s>2 \sum \frac{\log(n+1)}{(n+1)^s}$ は収束。

6.$\sum \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^s}(s>0)$
$s=1$ のとき，自然対数の底を 2 にかえても極限に関して，影響ないので $\log(n+1)$ を，$\log_2(n+1)$ と考える。また $n \geqq 2$ として，$n+1$ を n と考える。
$\sum \frac{1}{n(\log n)}=\frac{1}{2\log_2 2}+(\frac{1}{3\log_2 3}+\frac{1}{4\log_2 4})+(\frac{1}{5\log_2 5}+\frac{1}{6\log_2 6}+\frac{1}{7\log_2 7}+\frac{1}{8\log_2 8}+\cdots$
() ごとに見ていくと
$\frac{1}{n(\log n)}>\frac{1}{2*1}+\frac{2}{4*2}+\frac{2^2}{8*3}+\cdots=\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$
$\sum \frac{1}{n}$ は発散するので $\sum \frac{1}{(n)(\log(n))}$ は発散。
よって，$0<s \leqq 1$ で発散し $s>1$ で収束する。

. . . .

6.4 節の演習問題

6.4

1 aaaaabbbbbbwwwwwwwwww

2 vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv

3 kkkkkkkkkkkkkkkkkkkkkkkkkkkkkkk

4 yyyyyyyyyyyyyrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr

5 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz

6 dddddddddddddddddsssssssssssssssssssss

. . . .

6 章 6.5 節-節の問題解答 307 ページ

1
(a) $\int_0^\infty e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}(1-\frac{a}{x^2})dx.$
(b) 変数変換 $y=\frac{a}{x}$ をする.

この 2 つのヒント問より $I(a)$ は a について定数.$I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2

3

4

5

6

7

8

(a) $\sum_{k=0}^{n} \frac{\{10^k x\}}{10^k} \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{10^k}$.
(b) 定理 6.14（277 ページ）より.
(c)

参考文献

[1] Polya·Szegö. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Springer, 1971.
[2] 高木貞治. 解析概論. 岩波, 1931.
[3] 三省堂. 高校 数学 III. 三省堂, 1999.
[4] 占部実, 佐々木右左編. 微分積分学教科書. 共立出版, 1965.
[5] 村田全. 日本の数学 西洋の数学. 中公新書, 1981.
[6] 長瀬道弘, 芦野隆一. 微分積分学概説. サイエンス社, 1998.
[7] 難波誠. 微分積分学. 裳華房, 1996.

索引

以下で索引した術語は全てを網羅はしなかった。煩雑さを避けたからです。意味のある個所のみ。

後書き

数学を学ぶのも研究するのも私たちの社会の平和が前提です。

日本国憲法　第2章

第9条　日本国民は，正義と秩序を基調とする国際平和を誠実に希求し，国権の発動たる戦争と，武力による威嚇又は武力の行使は，国際紛争を解決する手段としては，永久にこれを放棄する。

2　前項の目的を達するため，陸海空軍その他の戦力は，これを保持しない。国の交戦権は，これを認めない。

THE CONSTITUTION OF JAPAN.

CHAPTER II.　RENUNCIATION OF WAR

Article 9. Aspiring sincerely to an international peace based on justice and order,the Japanese people forever renounce war as a sovereign right of the nation and the threat or use of force as means of setting international disputes. In order to accomplish the aim of the preceding paragraph,land,sea,and air forces,as well as other war potential,will never be maintained.The right of belligerency of the state will not be recognized.

平和町憲法９条の会