問

$D = \{(x, y, z) : z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \le r^2\}$ と定義するとき, D の曲面積を求めよ.

xy 平面上の集合 E 上で, C^1 級の関数 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in E$, で定義される曲面の面積 S は,
$S = \iint_E \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$ である.
$z = f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = (r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ とすると,

$$f_x = \frac{1}{2}(r^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(r^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \quad ,$$

$$f_y = \frac{1}{2}(r^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y) = -y(r^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \quad .$$

曲面積 S は　$E = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le r^2\}$ として,

$$\begin{aligned}
S &= \iint_E \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy \\
&= \iint_E \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{r^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \iint_E \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2 - y^2}} dxdy \\
&= r \iint_E \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dxdy \ \text{（極座標で変数変換すると）} \\
&= r \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - (a\cos\theta)^2 - (a\sin\theta)^2}} \ a \ d\theta da \\
&= r \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \ d\theta da \\
&= 2\pi r \int_0^r \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \ da (\ a = r\sin b \ \text{と変数変換して}) \\
&= 2\pi r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin b}{\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 b}} r\cos b \ db \\
&= 2\pi r \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin b \ db \\
&= 2\pi r^2 \Big[-\cos b \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r\{(-0) - (-1)\} \\
&= 2\pi r^2 \ .
\end{aligned}$$

ここで求めた曲面積は, 半径 r の球の半分なので, 半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ であることが分かる.