

問題 2.3

1.

(1)

$$y = f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ とする.}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}. \\ f^{(1)}(x) &= (-1)(1+x)^{-2}. \\ f^{(2)}(x) &= (-2)(-1)(1+x)^{-3}. \end{aligned}$$

より,

$$f^{(n)}(x) = (-n)((-n-1)) \cdots (-2)(-1)(1+x)^{-(n+1)} = (-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

と推測される.

この推測が正しいことを数学的帰納法で確かめる. $n = 1$ のときは正しい. n のとき正しいとすると, $f^{(n)}(x)$ を微分して,

$$f^{(n+1)}(x) = -(n+1)(-1)^n n! (1+x)^{-(n+2)} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(1+x)^{(n+1)+1}}.$$

よって, $n+1$ のときも正しい. 以上より, すべての自然数で成り立つ.

$$\therefore f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

(2)

$$y = f(x) = \log(1-x) \text{ とする.}$$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= (-1)(1-x)^{-1}. \\ f^{(2)}(x) &= (-1)(1-x)^{-2}. \\ f^{(3)}(x) &= -2 \cdot 1 (1-x)^{-3}. \\ f^{(4)}(x) &= -3 \cdot 2 \cdot 1 (1-x)^{-4}. \end{aligned}$$

よって,

$$f^{(n)} = -(n-1)!(1-x)^{-n} = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

と推測される.

(1) と同様にして数学的帰納法より, この推測が正しいことが示される.

$$\therefore f^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

(3)

$y = f(x) = (1+x)^\alpha$ とする.

$$\begin{aligned}f^{(1)}(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}. \\f^{(2)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}. \\f^{(3)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}.\end{aligned}$$

よって,

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$$

と推測される.

(1) と同様にして数学的帰納法により, この推測が正しいことが示される.

$$\therefore f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

(4)

$y = f(x) = x^2 e^{2x}$ とする. $(e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x}$ に注意する.

ライプニッツの公式より,

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (x^2)^{(k)} (e^{2x})^{(n-k)} \\&= {}_n C_0 (x^2)^{(0)} (e^{2x})^{(n)} + {}_n C_1 (x^2)^{(1)} (e^{2x})^{(n-1)} + {}_n C_2 (x^2)^{(2)} (e^{2x})^{(n-2)} \\&= x^2 2^n e^{2x} + n \cdot (2x) \cdot 2^{n-1} e^{2x} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot 2^{n-2} e^{2x} \\&= 2^{n-2} e^{2x} (4x^2 + 4nx + n(n-1)).\end{aligned}$$

(5)

$y = f(x) = (x^2 + x) 3^x$ とする. $(3^x)^{(n)} = (\log 3)^n 3^x$ に注意する.

ライプニッツの公式より,

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (x^2 + x)^{(k)} (3^x)^{(n-k)} \\&= {}_n C_0 (x^2 + x)^{(0)} (3^x)^{(n)} + {}_n C_1 (x^2 + x)^{(1)} (3^x)^{(n-1)} + {}_n C_2 (x^2 + x)^{(2)} (3^x)^{(n-2)} \\&= (x^2 + x)(\log 3)^n 3^x + n(2x+1)(\log 3)^{n-1} 3^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2(\log 3)^{n-2} 3^x \\&= (\log 3)^{n-2} 3^x \{ (\log 3)^2 (x^2 + x) + (\log 3)n(2x+1) + n(n-1) \} \\&= (\log 3)^{n-2} 3^x \{ (\log 3)^2 x^2 + \log 3(2n + \log 3)x + n(n-1 + \log 3) \}.\end{aligned}$$

(6)

$(\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + \frac{n}{2}\pi \right)$ に注意すると, $(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos \left(2x + \frac{n}{2}\pi \right)$ である.

$y = f(x) = x^2 \cos 2x$ とすると, ライプニッツの公式より,

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (x^2)^{(k)} (\cos 2x)^{(n-k)} \\&= {}_n C_0 (x^2)^{(0)} (\cos 2x)^{(n)} + {}_n C_1 (x^2)^{(1)} (\cos 2x)^{(n-1)} + {}_n C_2 (x^2)^{(2)} (\cos 2x)^{(n-2)} \\&= x^2 2^n \cos \left(2x + \frac{n}{2}\pi \right) + n2x 2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n-1}{2}\pi \right) + \frac{n(n-1)}{2} 2 \cdot 2^{n-2} \cos \left(2x + \frac{n-2}{2}\pi \right) \\&= 2^n x^2 \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right) + n2^n x \cos \left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) + n(n-1) 2^{n-2} \cos \left(2x + \frac{(n-2)\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

(7)

$$y = \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) .$$

ここで、(厳密には(1)のように数学的帰納法で証明する。)

$$\left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}} , \quad \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

より、

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n)} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ (-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}} - (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{3} \left\{ \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right\} . \end{aligned}$$

(8)

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{に注意する。}$$

$y = f(x) = \frac{e^x}{1-x} = e^x \left(\frac{1}{1-x} \right)$ とすると、ライプニッツの公式より、

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (e^x)^{(k)} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} e^x \frac{(n-k)!}{(1-x)^{n-k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^n n! e^x \frac{1}{k!} (1-x)^{-n-1+k} \\ &= e^x (1-x)^{-n-1} n! \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (1-x)^k \right\} . \end{aligned}$$

2 .

(1)

$y = f(x) = 2x^2\sqrt{x} - 5x^2$ とする.

$$f(x) = 2x^{\frac{5}{2}} - 5x^2 .$$

$$f'(x) = 5x^{\frac{3}{2}} - 10x . \quad f''(x) = \frac{15}{2}x^{\frac{1}{2}} - 10 .$$

$f'(x) = 0$ より

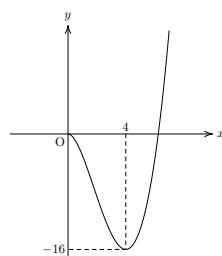
$$5x(x^{\frac{1}{2}} - 2) = 0 . \quad \therefore x = 0, 4 .$$

$f''(x) = 0$ より

$$\therefore x = \frac{16}{9} .$$

よって増減表は右図
グラフは

x	0	…	$\frac{16}{9}$	…	4	…
$f'(x)$	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	0	↘	変曲点	↘	極小	↗



(2)

$$y = f(x) = \frac{\log x}{x}$$
 とする.

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

$$f''(x) = \frac{2\log x - 3}{x^3}.$$

$$f'(x) = 0 \text{ より } x = e$$

$$f''(x) = 0 \text{ より } x = e^{\frac{3}{2}}$$

よって増減表は右図

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ に注意する。 グラフは

x	0	…	e	…	$e^{\frac{3}{2}}$	…
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	極大	↘	変曲点	↘

